

УДК 519.6

## МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ МНОГОЭКСТРЕМАЛЬНАЯ БИКРИТЕРИАЛЬНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ НА ОСНОВЕ РЕДУКЦИИ РАЗМЕРНОСТИ И АППРОКСИМАЦИИ СПЛАЙНОВЫМИ КРИВЫМИ

© 2017 г.

Маркина М.В.<sup>1</sup>, Маркин В.Л.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

<sup>2</sup>Дельфтский технический университет, Дельфт, Нидерланды

marina.markina@itmm.unn.ru

Поступила в редакцию 20.03.2017

Предложен новый численный метод решения оптимизационных бикритериальных многоэкстремальных задач с ограничениями, аппроксимирующий множество Парето с заданной точностью. Функции критериев и ограничений заданы набором точек, в которых экспериментально вычислены значения функций в многомерном пространстве. Метод основан на редукции размерности пространства, аппроксимации одномерных функций модифицированными кривыми Безье, для которых минимизируется отклонение кривой от всех опорных точек, и информационно-статистическом подходе к глобальной оптимизации. В качестве приложения предлагаемого метода рассматривается двухкритериальная задача оптимизации формы рельса в крестовинах железнодорожных стрелок. Математическая модель задачи включает в себя четыре управляемых параметра, определяющих размеры двух сечений рельса, и два оптимизационных критерия. Первый критерий отражает возможность появления усталостных дефектов в рельсе, второй критерий отражает степень износа рельса.

*Ключевые слова:* многокритериальная оптимизация, оптимальное проектирование, аппроксимация многомерной функции, глобальная оптимизация, Парето-оптимальные решения, крестовина, форма рельса в крестовинах железнодорожных стрелок.

### Введение

К проектируемым конструкциям часто предъявляются противоречивые требования. Например, проектируемый объект должен иметь минимальную массу и при этом удовлетворять требованиям прочности, устойчивости, долговечности и т.д. Многокритериальная формулировка задачи усложняет поиск наилучшего значения параметров объекта. Встречаются постановки задач, когда функции критериев оптимальности или ограничений не могут быть заданы аналитически, но могут быть вычислены экспериментально при некоторых конкретных значениях управляемых параметров. Новизна предложенного подхода заключается в ранее не применяв-

шейся комбинации известных и новых методик, позволяющих найти множество эффективных решений бикритериальных многомерных задач, заданных набором точек в пространстве любой размерности без задания коэффициентов свертки. На первом этапе точки многомерного пространства переводятся на одномерный интервал с помощью кривой Пеано. На втором этапе проводится аппроксимация критериев и ограничений. Предложенная аппроксимация обладает свойствами кривой Безье, но минимально отклоняется от опорных точек. На третьем этапе с помощью информационно-статистического подхода решается одномерная бикритериальная задача. На заключительном этапе оптимальные по Парето точки переводятся в многомерное пространство и в них вычисляются значения критериев.

### 1. Постановка задачи

Дана последовательность из  $n$  векторов управляемых параметров  $x_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) с вычисленными в них значениями критериев  $y_k^1$  и  $y_k^2$  и ограничениями  $g_k^i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Требуется определить Парето-оптимальное решение бикритериальной задачи минимизации функций  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  таких, что  $f_1(x_k) = y_k^1$  и  $f_2(x_k) = y_k^2$ ,  $k = 1, \dots, n$ , удовлетворяющих ограничениям  $g_i(x) \leq 0$ , таким, что  $g_i(x_k) = g_k^i$ ,  $k = 1, \dots, n$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Предлагается алгоритм решения этой задачи, основанный на композиции следующих трех этапов:

- 1) редукция размерности, основанная на развертке типа кривой Пеано;
- 2) аппроксимация одномерной функции модифицированными кривыми Безье. Для построения таких кривых решается задача минимизации их отклонения от заданных опорных точек;
- 3) информационно-статистический подход к решению задач оптимизации.

### 2. Метод редукции размерности, основанный на развертке типа кривой Пеано

Один из возможных подходов к численному анализу многомерных задач состоит в сведении их к эквивалентным задачам с помощью однозначных непрерывных отображений отрезка  $[0, 1]$  вещественной оси на  $n$ -мерный гиперинтервал  $D [1]$ .

Схема редукции, которая сопоставляет точке в многомерном пространстве ее образ на отрезке  $[0, 1]$ , показана на рис. 1.

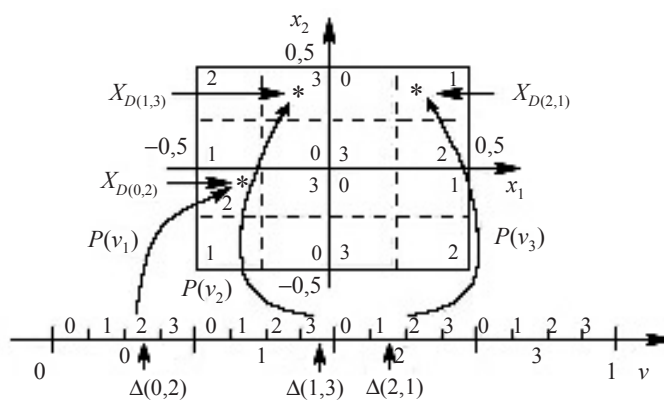


Рис. 1

На первом шаге предлагаемого алгоритма находятся одномерные образы исходного набора многомерных точек  $x_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Известные в этих точках значения критериев и ограничений становятся значениями одномерных функций.

### 3. Аппроксимация одномерной функции модифицированными кривыми Безье

Предлагается делать аппроксимацию функции с помощью кривой Безье третьего порядка, минимизирующей отклонения кривой Безье от точек, в которых были проведены испытания. Эта кривая является достаточно простой для построения, а также обладает свойствами, необходимыми для простого управления ее формой, и улучшенным сопряжением с другими кривыми. Для вычисления отклонений параметрической кривой Безье от точек с заданными координатами и для вычисления значений кривой Безье в произвольных точках используются формулы Кардано. Способ выбора точек аппроксимации исходной задачи оптимизации гарантирует отсутствие перегибов кривой.

Кривая Безье задается выражением [2]:

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i b_{i,n}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

где  $n$  – количество опорных точек,  $i$  – номер опорной точки,  $P_i$  – координата опорной точки,  $b_{i,n}(t)$  – базисная функция кривой Безье, которая определяет вес опорной точки и является полиномом Бернштейна:

$$b_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^{i(1-t)^{n-1}}, \quad (2)$$

где

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}.$$

Форму кривой однозначно определяют ее опорные точки. Следовательно, задача получения кривой определенной формы сводится к изменению координат опорных точек, при которых такая форма будет получена. Если установить зависимость отклонения кривой от координат ее опорных точек, то с помощью методов оптимизации можно определить такие значения координат опорных точек, при которых отклонение будет иметь минимальную величину.

Целевая функция отклонения кривой от точек имеет вид

$$C = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (y_i - y_{bi})^2, \quad (3)$$

где  $N$  – количество исходных точек,  $y_i$  – ордината  $i$ -й исходной точки,  $y_{bi}$  – ордината соответствующей точки на кривой Безье.

Кривая Безье, построенная для произвольного набора точек, состоит из набора элементарных кривых Безье, построенных по четырем опорным точкам  $P_0, P_1, P_2, P_3$ . Только координаты точек  $P_1$  и  $P_2$  доступны для варьирования в целях приближения. Эти точки всегда лежат на прямых, касательных к окружностям в точках сопряжения с кривой, и их координаты могут быть получены из параметрических уравнений двух прямых. Для вычисления значения целевой функции определяется

такая точка на кривой Безье, которая имеет равную абсциссу с точкой целевой функции, затем вычисляется разность их ординат. За выбор точек на кривой отвечает параметр  $t$ . Для каждого  $i$  в уравнении целевой функции величина  $t$  должна иметь такое значение, при котором выполняется равенство абсцисс. В таком случае из выражения для целевой функции можно исключить параметр  $t$ . Окончательный вид целевой функции:

$$C(t_1, t_2) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (B_{y_i}(t_1, t_2) - y_i)^2. \quad (4)$$

Добавим функцию штрафов для следующих ограничений на параметры:

$$0 < t_1 < \frac{P_3 - P_0}{P_1 - P_0}, \quad (5)$$

$$0 < t_2 < \frac{P_0 - P_3}{P_2 - P_3}. \quad (6)$$

Основная цель метода штрафных функций состоит в преобразовании задачи минимизации функции

$$C = C(t_1, t_2) \quad (7)$$

с соответствующими ограничениями, наложенными на  $t_1, t_2$ , в задачу поиска минимума без ограничений функции

$$C_1(t_1, t_2) = C(t_1, t_2) + P(t_1, t_2). \quad (8)$$

Функция  $P(t_1, t_2)$  является штрафной. При нарушении ограничений она увеличивает значение функции  $C$ . В этом случае минимум функции  $C$  будет находиться внутри области ограничений. Функция  $P(t_1, t_2)$ , обеспечивающая это условие, может быть не единственной, ее удобно записать в виде:

$$P(t_1, t_2) = -r \sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j(t_1, t_2)}, \quad (9)$$

где  $r$  – положительная величина.

Тогда функция  $C_1(t_1, t_2)$  примет вид

$$C_1(t_1, t_2) = C(t_1, t_2) - r \sum_{j=1}^m \frac{1}{g_j(t_1, t_2)}. \quad (10)$$

Для минимизации функции  $C_1(t_1, t_2)$  используем градиентный метод. На каждой итерации значение шага градиентного метода  $X^{r+1}$  вычисляется по формуле

$$X^{r+1} = X^r + \lambda^r S^r, \quad (11)$$

где  $X^r$  – текущее значение шага градиентного метода,  $\lambda^r$  – текущее значение шага в направлении  $S^r$  ( $S^r$  – вектор направления антиградиента целевой функции в точке  $X^r$ ).

Итерации повторяются до достижения заданной точности, то есть до достижения целевой функцией определенного значения, либо до тех пор, пока изменение значения функции по отношению к предыдущему значению не будет меньше некоторого значения  $\epsilon$ .

Значение шага выбирается по следующему алгоритму:

- 1) устанавливаются  $\lambda^r = \lambda_0$  и  $k = 0$ ;
  - 2) если  $C_1(t_1^{r+1}, t_2^{r+1}) < C_1(t_1, t_2)$  и  $k < 4$ , то  $k$  увеличивается на единицу;
  - 3) если  $C_1(t_1^{r+1}, t_2^{r+1}) < C_1(t_1, t_2)$  и  $k = 4$ , то  $k = 0$ ,  $\lambda^{r+1} = 2\lambda^r$ ;
  - 4) если  $C_1(t_1^{r+1}, t_2^{r+1}) \geq C_1(t_1, t_2)$ , то  $k = 0$ ,  $\lambda^{r+1} = \lambda^r/2$ .
- Если  $r \sum_{j=1}^m 1/(g_j(t_1, t_2)) < \varepsilon$ , происходит останов.

На рис. 2 показан результат изменения положения опорных точек  $P_1$  и  $P_2$  и изменения формы элементарной кривой Безье после процедуры оптимизации. Красная кривая – классическая кривая Безье, проходящая через первую и четвертую опорные точки. Зеленая кривая – модифицированная кривая Безье, проходящая через все четыре опорные точки за счет перемещения двух внутренних опорных точек.

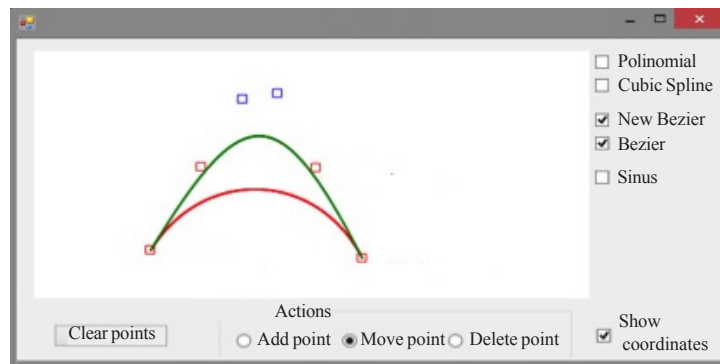


Рис. 2

Метод работает для произвольного числа опорных точек.

#### 4. Информационно-статистический подход к решению задач оптимизации

После двух предыдущих этапов получаем следующую задачу одномерной векторной оптимизации:

$$(f_1(x), f_2(x)) \rightarrow \min_{x \in D}, \quad (12)$$

где  $D = \{x \in [a, b], g_i \leq 0, i = 1, \dots, m\}$ . Функции  $f_1(x), f_2(x)$  и  $g_i(x)$  могут быть многоэкстремальными.

Известно, что задача (12) может быть заменена следующей задачей:

$$\min \{f_2(x) : x \in D; f_1(x) \leq q\}, \quad q \in \min \{f_1(x), \infty\}. \quad (13)$$

Решение задачи (13) при некотором фиксированном  $q$  является слабо эффективным решением задачи (12) [3, 4]. Для получения множества слабо эффективных решений необходимо решить задачи с различными значениями параметра  $q$ . Традиционными методами для получения какой-либо Парето-точки каждый раз решается новая задача. Предлагается решать несколько различных задач вида (13) одновременно, используя информационно-статистический подход к решению задач оптимизации [5–7].

Множество предельных точек предлагаемого алгоритма аппроксимируют множество Парето. Точность аппроксимации задается шагом  $h$ , который рекомендуется

выбирать из условия  $h < (f_1^{\max} - f_1^{\min})$ , где  $f_1^{\max}$  и  $f_1^{\min}$  – соответственно наибольшее и наименьшее значения первого критерия. Вариант формирования набора параметров  $q$  может быть следующим:

$$q_i = q_{i-1} + h, \quad i = 1, 2, \dots, \quad q_0 = f_1^{\min}. \quad (14)$$

Каждая итерация алгоритма включает в себя определение индекса  $1 \leq v(x_i) \leq m + 1$  точки  $x_i$  ( $1 \leq i \leq k$ ), равного номеру первого нарушенного ограничения. Если  $v(x_i) < m + 1$ , то точке испытания  $x_i$  соответствует значение  $z_i = g_v(x_i)$ . Если  $v(x_i) = m + 1$  (все ограничения вида  $g_i(x) \leq 0$  выполняются), то в точке испытания  $x_i$  вычисляются значения критериев  $z_{ji} = f_j(x_i), j = 1, 2$ .

Граничным точкам присваиваются нулевые индексы, значения функций в них не вычисляются. Выбор точки  $x^{k+1}$ ,  $k \geq 2$ , для любой следующей итерации определяется правилами:

1) точки  $x^1, \dots, x^k$  предшествующих итераций перенумеровываются нижними индексами в порядке возрастания координаты:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_i < x_k < x_{k+1} = b; \quad (15)$$

2) определяются множества:

$$I_0 = \{0, k + 1\}, \quad I_v = \{i : 1 \leq i \leq k, v = v(x_i)\}, \quad (16)$$

содержащие номера всех точек, индекс которых равен  $v$ ;

$$S_v = \{I_0 \cup \dots \cup I_{v-1}\}, \quad 1 \leq v \leq m + 1, \quad (17)$$

содержащие номера всех точек, индексы которых меньше  $v$ ;

$$T_v = \{I_{v+1} \cup \dots \cup I_{m+1}\}, \quad 1 \leq v \leq m + 1, \quad (18)$$

содержащие номера всех точек, индексы которых больше  $v$ ;

3) вычисляются максимальные абсолютные значения относительных первых разностей:

если  $I_{m+1} = 0$ , то

$$\mu'_v = \max \left\{ \frac{|z_i - z_p|}{x_i - x_p}, \quad i, p \in I_v, i > p \right\}, \quad 1 \leq v \leq m; \quad (19)$$

если  $I_{m+1} \neq 0$ , то вычисляются как  $\mu'_v$ , так и  $\mu_j$ , где

$$\mu_j = \max \left\{ \frac{|z_{ji} - z_{jp}|}{x_i - x_p}, \quad i, p \in I_{m+1}, i > p \right\}, \quad j = 1, 2, \quad (20)$$

причем в случаях, когда мощность множества  $I_v$   $\text{card}(I_v) < 2$ ,  $1 \leq v \leq m + 1$ , или когда  $\mu'_v(\mu_j)$  оказываются равными нулю, принимаем  $\mu'_v = 1$  ( $\mu_j = 1$ );

4) для всех непустых множеств  $I_v$ ,  $1 \leq v \leq m$ , определяются величины

$$z_v^* = \begin{cases} 0, & T_v \neq 0, \\ \min \{z_i : i \in I_v\}, & T_v = 0; \end{cases} \quad (21)$$

5) каждой точке  $x_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , индекс которой  $v(x_k) > m$ , сопоставляется вектор  $q^i = (q_1^i, q_2^i)$ , где

$$q_1^i = E \left\{ \frac{z_{ij} - z_{i \min}}{h_i} \right\} + z_{j \min}, \quad (22)$$

$$q_2^i = \infty;$$

6) для каждого интервала  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $1 \leq i < k + 1$ , вычисляется характеристика  $R(i)$  ( $r > 1$  – параметры метода), причем если  $\max \{v(x_{i-1}), v(x_i)\} \leq m$ , то

$$R(i) = \begin{cases} (x_i - x_{i-1}) + \frac{(z_i - z_{i-1})^2}{(\mu'_v)^2 (x_i - x_{i-1})^2} - \frac{2(z_i + z_{i-1} - 2z_v^*)}{r\mu'_v}, & v(x_{i-1}) = v(x_i), \\ 2(x_i - x_{i-1}) - \frac{4(z_i - z_v^*)}{r\mu'_v}, & v(x_{i-1}) < v(x_i), \\ 2(x_i - x_{i-1}) - \frac{4(z_{i-1} - z_v^*)}{r\mu'_v}, & v(x_i) < v(x_{i-1}), \end{cases} \quad (23)$$

в противном случае

$$R(i) = \begin{cases} \max \left\{ x_i - x_{i-1} + \frac{(z_{ji} - z_{ji-1})^2}{\mu_j^2 (x_i - x_{i-1})} - \frac{2(z_j + z_{j-1} - 2 \max \{q_j, z'_{j \min}\})}{r\mu_j} \right\}, & v(x_{i-1}) = v(x_i), \\ \max \left\{ 2(x_i - x_{i-1}) - \frac{4(z_{ji} - \max \{q_j, z'_{j \min}\})}{r\mu_j} \right\}, & v(x_{i-1}) < v(x_i), \\ \max \left\{ 2(x_i - x_{i-1}) - \frac{4(z_{ji-1} - \max \{q_j, z'_{j \min}\})}{r\mu_j} \right\}, & v(x_i) < v(x_{i-1}), \end{cases} \quad (24)$$

$$q_j = \min \{q_j^i, q_j^{i-1}\},$$

в (24)  $1 \leq j \leq 2$ ,

$$z'_{j \min} = \begin{cases} \min \{z_{li} : 1 \leq i \leq k\}, & j = 1, \\ \min \{z_{2i} : z_{li} \leq q_1 + h, 1 \leq i \leq k\}, & j = 2; \end{cases} \quad (25)$$

7) определяется интервал  $(x_{t-1}, x_t)$ , имеющий максимальную характеристику

$$R(t) = \max \{R(i) : 1 \leq i \leq k + 1\}; \quad (26)$$

8) очередная итерация осуществляется в точке

$$x^{k+1} = \begin{cases} \frac{x_t + x_{t-1}}{2}, & v(x_{t-1}) \neq v(x_t), \\ \frac{x_t + x_{t-1}}{2} - \frac{z_t - z_{t-1}}{2r'_v \mu'_v}, & v(x_{t-1}) = v(x_t) < m + 1, \\ \frac{x_t + x_{t-1}}{2} - \frac{z_{jt} - z_{jt-1}}{2r_j \mu_j}, & (v(x_{t-1}) = v(x_t) = m + 1) \& (R(t) = R_j(t)), \end{cases} \quad (27)$$

где  $R_j(t)$  обозначает характеристику, использующую значения  $j$ -го критерия.

Алгоритм можно дополнить условием остановки (по заданной точности  $\varepsilon > 0$ ), прекращающим итерации при выполнении неравенства

$$x_t - x_{t-1} \leq \varepsilon. \quad (28)$$

На рис. 3 представлен результат работы алгоритма определения множества Парето для двух тестовых критериев без ограничений, полученных путем аппроксимации с помощью модернизированных кривых Безье. Представлены графики функций, точки испытаний и отобранные из них эффективные по Парето точки. Общее число испытаний 90. Число отобранных из них эффективных точек 31. Шаг алгоритма  $h = 8$ , точность в условии останова  $\varepsilon = 0,0001$ . Рисунок демонстрирует сходимость численного метода ко всем точкам, оптимальным по Парето.

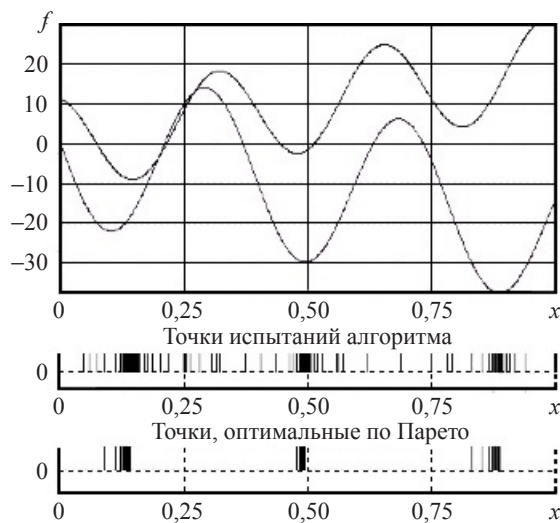


Рис. 3

Для полученных одномерных эффективных точек находятся прообразы в исходном многомерном пространстве и вычисляются значения критериев и ограничений.

### 5. Приложение методики для решения задачи оптимального проектирования

В качестве приложения предлагаемого метода рассмотрена задача оптимизации формы рельса в крестовинах железнодорожных стрелок [5]. Стрелки являются самым уязвимым элементом железных дорог. Наиболее часто встречаются дефекты рельса, связанные с пластическими поверхностными деформациями и усталостными процессами в носовой части крестовины. Основной причиной износа стрелки являются большие ударные силы, действующие на носовую часть крестовины в момент прохождения колесной пары через стрелку. Такие повреждения ведут к увеличению расходов по техническому обслуживанию стрелки и к ее преждевременной замене. Уменьшение ударных сил в крестовине можно достичь путем изменения ее формы.

Математическая модель задачи оптимизации включает в себя:

- четыре управляемых параметра, определяющих размеры двух сечений рельса;
- два оптимизационных критерия, которые по своему физическому характеру являются конкурентными.



Первый критерий отражает возможность появления усталостных дефектов в рельсе, которые зависят от величины удельной нормальной контактной силы:

$$S(t) = \frac{3}{2} \frac{F_n(t)}{A(t)}, \quad (29)$$

где  $F_n$  – нормальная контактная сила,  $A$  – размер контакта.

Второй критерий – степень износа:

$$W(t) = |F_x(t)\gamma_x(t)| + |F_y(t)\gamma_y(t)|, \quad (30)$$

где  $F_x$  и  $F_y$  – силы трения в продольном и поперечном направлениях соответственно,  $\gamma_x$  и  $\gamma_y$  – силы проскальзывания в плоскости контакта колеса с рельсом, полученные путем динамического моделирования.

Модель имеет два ограничения, которые налагаются на значения управляемых параметров для предотвращения нереальных форм рельса и для предотвращения схода состава с рельсов.

Значения критериев и ограничений в заданных точках испытаний вычисляются методом конечных элементов.

Подробное описание задачи и решение ее методом свертки критериев, дающим единственное решение, оптимальное по Парето, которое зависит от коэффициентов свертки, содержится в работе [8].

Для апробации предлагаемой в статье методики в 40 точках четырехмерного пространства управляемых параметров с помощью пакета программ VI-RAIL были вычислены значения двух критериев и ограничений данной задачи. После получения одномерных образов этих точек была осуществлена аппроксимация критериев и ограничений и найдены Парето-оптимальные решения одномерной бикритериальной задачи. Затем одномерные координаты Парето-оптимальных решений были переведены в исходное многомерное пространство и в них были вычислены значения критериев с помощью пакета VI-RAIL. Множество полученных эффективных точек содержало в себе решение задачи, полученное в работе [8], что говорит о правильности предлагаемой методики.

#### Список литературы

1. Стронгин Р.Г. *Численные методы в многоэкстремальных задачах*. М.: Наука, 1978. 240 с.
2. Шикин Е.В., Боресков А.В. *Компьютерная графика. Динамика, реалистические изображения*. М.: Диалог-МИФИ, 1995. 288 с.
3. Подиновский В.В., Ногин В.Д. *Парето-оптимальные решения многокритериальных задач*. М.: Наука, 1982. 256 с.
4. Кини Р.Л., Райфа Х. *Принятие решений при многих критериях: предпочтения и замещения*. М.: Радио и связь, 1981. 560 с.
5. Стронгин Р.Г., Маркин Д.Л., Маркина М.В. Сведение многоэкстремальных, многокритериальных задач с ограничениями к безусловным задачам оптимизации (теория и алгоритмы). В кн.: *Математическое моделирование*. М.: Изд-во МГУ, 1993. С. 110–117.
6. Малков В.П., Маркина М.В. *Поэтапная параметрическая оптимизация*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1998. 142 с.
7. Стронгин Р.Г., Маркина М.В. Бикритериальные задачи многоэкстремальной многомерной условной оптимизации. Информационно-статистический подход. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Математическое моделирование и оптимальное управление*. 2003. №1. С. 162–180.

8. Wan C., Markine V.L., Shevtsov I.Y. Improvement of vehicle-turnout interaction by optimising the shape of crossing nose. *Vehicle System Dynamics*. 2014. **52**(11). P. 1517–1540.

#### References

1. Strongin R.G. *Chislennyye metody v mnogoekstremalnykh zadachakh [Numerical Methods in Multiextremal Problems]*. Moscow. Nauka Publ. 1978. 240 p. (In Russian).
2. Shikin E.V., Boreskov A.B. *Kompyuternaya grafika. Dinamika, realisticheskie izobrazheniya [Computer Graphics. Dynamics, Realistic Images]*. Moscow. Dialog-MIPhI Publ. 1995. 288 p. (In Russian).
3. Podinovskii V.V., Nogin V.D. *Pareto-optimalnye resheniya mnogokriterialnykh zadach [Pareto-optimal Solutions of Multicriteria Problems]*. Moscow. Nauka Publ. 1982. 256 p. (In Russian).
4. Keeney R.L., Raiffa H. *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*. John Wiley & Sons. 1981. 560 p.
5. Strongin R.G., Markine D.L., Markina M.V. Svedenie mnogoekstremalnykh, mnogokriterialnykh zadach s ogranicheniyami k bezuslovnym zadacham optimizatsii (teoriya i algoritmy) [Reduction of multiextremal, multicriteria problems with constraints to unconditional optimization problems (theory and algorithms)]. V kn.: *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical Simulation]*. 1993. Moscow. MGU Publ. P. 110–117 (In Russian).
6. Malkov V.P., Markina M.V. *Poetapnaya parametricheskaya optimizatsiya [Step-by-step Parametrical Optimization]*. Nizhni Novgorod. NNGU Publ. 1998. 142 p. (In Russian).
7. Strongin R.G., Markina M.V. Bikriterial'nye zadachi mnogoekstremal'noy mnogomernoy uslovnoy optimizatsii. Informatsionno-statisticheskii podkhod. [Bicriterial problems of multiextreme multidimensional conditional optimization. Informative and statistical approach]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo. Seriya: Matematicheskoe modelirovanie i optimal'noe upravlenie [Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod. Ser.: Mathematical modeling and optimum control]*. 2003. No 1. P. 162–180. (In Russian)
8. Wan C., Markine V.L., Shevtsov I.Y. Improvement of vehicle-turnout interaction by optimising the shape of crossing nose. *Vehicle System Dynamics*. 2014. **52**(11). P. 1517–1540.

### SOLUTION OF MULTIPLE PARAMETER, BI-CRITERIA OPTIMIZATION PROBLEMS BASED ON REDUCTION OF PROBLEM DIMENSION AND SPLINE APPROXIMATIONS

Markina M.V.<sup>1</sup>, Markine V.L.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation

<sup>2</sup>Delft University of Technology, Delft, Netherlands

A new numerical method for solving optimization bicriteria multiextremal problems with constraints is proposed that approximates the Pareto set with a given accuracy. The functions of the criteria and constraints are defined by a set of points in which the values of functions in the multidimensional space are experimentally (numerical experiments) calculated. The method is based on the reduction of the dimensionality of the design space, the approximation of one-dimensional functions by modified Bezier curves (for which the deviation of the curve from all control points is minimised), and the information-statistical approach for global optimization. As an example application of the proposed method, the two-objective problem of optimizing the shape of the rail in the railway crossings considered. The mathematical model of the problem includes four design parameters that determine the dimensions of the two controlling cross-sections of the rail and two optimization criteria. The first criterion reflects the occurrence of fatigue defects in the rail, the second criterion reflects the rail wear.

**Keywords:** multicriteria optimization, optimal design, approximation of multidimensional function, global optimization, Pareto-optimal solutions, railway crossings.