

УДК 539.3

**ВЛИЯНИЕ АППРОКСИМАЦИИ ДИАГРАММЫ
ДЕФОРМИРОВАНИЯ НА КРИТИЧЕСКИЕ НАГРУЗКИ
ПРИ ПОПЕРЕЧНОМ ИЗГИБЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ***

© 2017 г. **Гоник Е.Г.¹, Кибец А.И.², Петров М.В.¹,
Федорова Т.Г.¹, Фролова И.А.¹**

¹*Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова,
Чебоксары, Российская Федерация*

²*Научно-исследовательский институт механики
Национального исследовательского Нижегородского государственного
университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*

kibec@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 06.03.2017

Рассматривается трехмерная геометрически и физически нелинейная задача упругопластического деформирования и потери устойчивости стальной цилиндрической оболочки с сыпучим наполнителем при поперечном изгибе. Задача формулируется в динамической постановке с применением лагранжевых переменных (текущая лагранжева формулировка задачи). Деформирование оболочки описывается с позиций механики упруговязкопластических сред без введения гипотез теории тонкостенных конструкций. Уравнение движения выводится из баланса мощности виртуальной работы. Кинематические соотношения определяются в метрике текущего состояния. Для описания упругопластического деформирования применяется теория течения с изотропным упрочнением. Влияние наполнителя моделируется аналитической функцией, зависящей от пространственных переменных и времени. Потеря устойчивости оболочки определяется методом продолжения по параметру, в качестве которого используется время. Численное решение задачи основано на моментной схеме метода конечных элементов и явной схеме интегрирования по времени типа «крест». Цилиндрическая оболочка опирается на торцах на жесткие опоры. Для достижения предельного состояния оболочка, кроме собственного веса и веса наполнителя, нагружается в средней части дополнительным поперечным усилием. Показано, что результаты расчетов существенно отличаются от экспериментальных данных, если применяется билинейная аппроксимация диаграммы деформирования без учета критических значений напряжений и деформаций, так как для анализа устойчивости упругопластической оболочки необходимо правильно задавать касательный модуль упрочнения материала.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, наполнитель, устойчивость, пластические деформации, метод конечных элементов.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-38-60051 мол_а_дк).

Введение

Упругопластическое деформирование и потеря устойчивости тонкостенных цилиндрических оболочек при поперечном изгибе анализировались многими отечественными и зарубежными учеными [1–23]. Результаты теоретических и экспериментальных исследований, представленные в этих работах, показали, что упругопластические деформации существенно снижают критические значения нагрузок. Цель настоящей статьи – оценка влияния аппроксимации диаграммы деформирования конструкционного материала на точность определения значения критической нагрузки. Для достижения этой цели проведен численный анализ устойчивости упругопластической цилиндрической оболочки, заполненной песком, при поперечном изгибе. Решение задачи основано на моментной схеме метода конечных элементов и явной схеме интегрирования по времени типа «крест». Результаты численного решения сопоставляются с экспериментальными данными.

1. Экспериментальное исследование устойчивости тонкостенной оболочки

Эксперименты выполнялись на тонкостенных стальных трубах (рис. 1) с наружным диаметром $R = 8$ см, толщиной стенки $h = 0,075$ см ($h/R = 0,0094$), длиной $L = 250$ см. Труба с песком устанавливалась по концам на две опоры, расстояние между которыми равно 240 см. Как показали предварительные исследования, под действием собственного веса и веса песка исследуемая оболочка не теряет устойчивость. Поэтому она догружалась дополнительными поперечными силами, создаваемыми домкратом 1 через динамометр 2 марки ДОСМ-3-3 и передаваемыми через нагружающее устройство 3. Расстояние между опорами нагружающего устройства составляло 60 см. Средняя часть трубы (зона потери устойчивости) оставалась свободной от нагрузки. Прогиб трубы на середине длины измерялся индикатором 4 часового типа ИЧ-10.

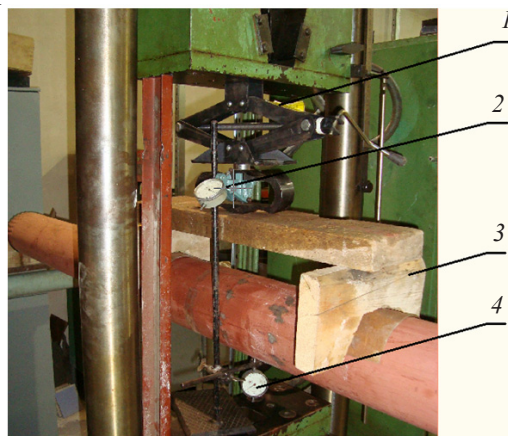


Рис. 1

Образец после установки на опоры нагружался поперечными силами, величина которых увеличивалась с шагом 0,5 кН. По мере приближения к критическому значению шаг нагружения уменьшался до 0,1 кН. На каждом шаге нагружения фиксировался прогиб оболочки в центре нижней поверхности оболочки. Были испытаны

ны пять образцов. Для этих образцов среднее значение критической нагрузки F_{cr} , создаваемой домкратом, равно 4,9 кН. Прогиб оболочки u_{cr} , при котором была достигнута критическая нагрузка, составил 0,99 см. При потере устойчивости в средней части оболочки на ее поверхности со стороны нагружающего устройства (точка А на рис. 2) образовывались локальные поперечные вмятины, расположенные в шахматном порядке.

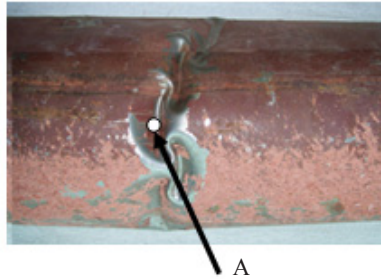


Рис. 2

2. Постановка задачи, метод решения

Деформирование оболочки описывается в переменных Лагранжа (текущая лагранжева формулировка) с позиций механики сплошных сред [24, 25]. Наряду с общим базисом $X = [X_1 X_2 X_3]$ вводится местная (сопутствующая) система координат $x = [x_1 x_2 x_3]$ с направляющими косинусами n_{ij} [26]:

$$x_i = n_{ij} X_j, \quad i, j = \overline{1, 3} \quad (1)$$

(по повторяющимся индексам ведется суммирование). Здесь x_3 – координата, отсчитываемая от срединной поверхности оболочки и нормальная к ней; x_1, x_2 – ортогональны к x_3 . Деформации поперечного сдвига предполагаются малыми, что позволяет считать местный базис ортогональным в течение всего процесса деформирования. Компоненты тензора скоростей деформаций в местном базисе $\dot{\epsilon}_{ij}$ выражаются через компоненты \dot{e}_{ij} скорости деформаций в общем базисе

$$\dot{\epsilon}_{ij} = n_{im} n_{jk} \dot{e}_{mk}, \quad (2)$$

которые определяются в метрике текущего состояния

$$\dot{e}_{ij} = \frac{\dot{U}_{i,j} + \dot{U}_{j,i}}{2} \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad X_i = X_i|_{t=0} + \int_0^t \dot{U}_i dt. \quad (3)$$

В (3) U_i – перемещения в общей декартовой системе координат X , индекс после запятой означает частную производную по соответствующей пространственной переменной, точка над символом – частную производную по времени t .

Уравнение движения выводится из баланса виртуальных мощностей [24–26]:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \dot{\epsilon}_{ij} dV + \int_{\Omega} \rho \ddot{U}_i \delta \dot{U}_i dV = \int_{\Gamma_p} P_i \delta \dot{U}_i d\gamma + \int_{\Gamma_q} P_i^q \delta \dot{U}_i d\gamma \quad (i, j = \overline{1, 3}), \quad (4)$$

где \dot{U}_i – компоненты вектора скорости перемещения в общей декартовой системе координат X ; σ_{ij} – компоненты тензоров напряжений Коши; ρ – плотность; P_i^q – контактное давление; P_i – распределенная нагрузка; Ω – исследуемая область; Γ_q –

поверхность контакта; Γ_p – зона действия внешнего давления; $\delta\dot{\epsilon}_{ij}, \delta\dot{U}_i$ – вариации $\dot{\epsilon}_{ij}, \dot{U}_i$ (на поверхности с заданными кинематическими граничными условиями $\delta\dot{U}_i = 0$).

Упругопластическое деформирование материала описывается соотношениями теории течения [27, 28]:

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \sigma_{ij} + \sigma^V \delta_{ij}, \quad \dot{\sigma}^V = -3K\dot{\epsilon}^V, \quad \dot{\epsilon}^V = \frac{\dot{\epsilon}_{ii}}{3}, \\ \dot{\epsilon}'_{ij}{}^e &= \dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}^V \delta_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^p, \quad \dot{\epsilon}_{ii}^p = 0, \quad \dot{\sigma}'_{ij} = 2G\dot{\epsilon}'_{ij}{}^e, \\ \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \sigma'_{ij}}, \quad f = \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - \frac{2}{3} \sigma_T^2 = 0; \quad \sigma_T = \sigma_T(\chi), \quad \chi = \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{\epsilon}'_{ij}{}^p \dot{\epsilon}'_{ij}{}^p} dt.\end{aligned}\tag{5}$$

Здесь $\sigma'_{ij}, \dot{\epsilon}'_{ij}$ и $\sigma^V, \dot{\epsilon}^V$ – девиаторные и шаровые компоненты тензоров напряжения и скоростей деформаций; $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ – скорости пластических деформаций; G, K – модули сдвига и объемного сжатия; δ_{ij} – символы Кронекера; f – поверхность текучести Мизеса, σ_T – предел текучести; $\dot{\lambda}$ – параметр, тождественно равный нулю при упругом деформировании и определяемый при упругопластическом деформировании из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки.

Влияние заполнителя моделируется в расчетах весовой нагрузкой, которая описывается аналитической функцией, зависящей от пространственных переменных и времени [16]. На верхней поверхности нагружающего устройства задается давление, моделирующее воздействие домкрата, величина которого определялась в соответствии с результатами экспериментальных исследований.

Контакт между оболочкой, опорами и нагружающим устройством моделируется условиями непроникания:

$$\dot{u}_n^1 = \dot{u}_n^2, \quad q_n^1 = -q_n^2, \quad q_i^1 = q_i^2 = 0, \quad i = \tau_1, \tau_2,\tag{6}$$

где n, τ_1, τ_2 – единичные векторы локального ортогонального базиса: n – вектор нормали к поверхности контакта, τ_1, τ_2 ортогональны n ; нижний индекс i означает проекцию вектора на оси подвижной системы координат, верхними индексами 1 и 2 обозначены номера соответствующих подобластей, поверхности которых находятся в контакте. Условия непроникания (6) выполняются только в активной фазе контактного взаимодействия. При нарушении контакта они заменяются условиями на свободной поверхности. Определяющая система уравнений (1)–(6) дополняется кинематическими граничными и начальными условиями.

Потеря устойчивости оболочки определяется методом точки перегиба [7]. В соответствии с этим методом нагрузка на оболочку постепенно увеличивается. Критическим считается значение нагрузки, при малом превышении которого резко возрастают перемещения оболочки.

Для дискретизации определяющей системы уравнений применяются моментная схема метода конечных элементов и явная конечно-разностная схема типа «крест» [29–31]. Оболочка моделируется лагранжевой сеткой, состоящей из восьмиузловых конечных элементов (КЭ). В узлах сетки определяются ускорения $\{\ddot{U}\}$, скорости $\{\dot{U}\}$ и перемещения $\{U\}$ в общей системе координат $X = [X_1 X_2 X_3]^T$. В каждом конечном элементе вводится локальный базис $x = [x_1 x_2 x_3]^T$ (1), отслеживающий его

вращение как жесткого целого пошаговым пересчетом направляющих косинусов осей [26, 32]. Конечный элемент с помощью полилинейного изопараметрического преобразования отображается на куб $-1 \leq \xi_i \leq 1$ ($i = \overline{1, 3}$):

$$x_i = \sum_{k=1}^8 x_i^k N_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad N_k = \frac{(1 + \xi_1/\xi_1^k)(1 + \xi_2/\xi_2^k)(1 + \xi_3/\xi_3^k)}{8}. \quad (7)$$

В (7) x_i^k, ξ_i^k – координаты узлов в базисах x, ξ ; N_k – функции формы. Компоненты скорости деформаций $\dot{\varepsilon}_{ij}$ в КЭ аппроксимируются линейными функциями

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^0 + \dot{\varepsilon}_{ij}^1 \xi_1 + \dot{\varepsilon}_{ij}^2 \xi_2 + \dot{\varepsilon}_{ij}^3 \xi_3, \quad (8)$$

где $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$ – значения компонент скорости деформаций в центре КЭ (безмоментные составляющие), а $\dot{\varepsilon}_{ij}^k = \partial \dot{\varepsilon}_{ij} / \partial \xi_k = \text{const}$ ($k = \overline{1, 3}$) – их градиент (моментные составляющие). Чтобы не превышать сдвиговую жесткость элемента, в (8) учитываются только компоненты $\dot{\varepsilon}_{ij}^k$, соответствующие изгибающим и крутящим моментам в теории оболочек [26, 30].

Интегрирование по пространственным переменным в (1) выполняется с применением квадратурных формул [25]. Напряжения, определенные в локальном базисе конечного элемента, заменяются статически эквивалентными узловыми силами, которые проецируются в общую систему координат. Дискретный аналог уравнений движения записывается в виде:

$$[M] \{\ddot{U}\} = \{F\}, \quad (9)$$

где $[M]$ – диагональная матрица масс; $\{\ddot{U}\}, \{F\}$ – векторы, составленные из ускорений узлов КЭ-сетки и результирующих узловых сил в общей системе координат. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (9) интегрируется по явной конечно-разностной схеме типа «крест».

Численная схема для определения контактного давления и статически эквивалентных ему узловых сил приведена в [33].

Изложенная конечно-элементная методика реализована в рамках вычислительной системы (ВС) «Динамика-3» [34, 35].

3. Сопоставление и анализ результатов расчетов и экспериментов

Диаграмма деформирования для стали 3, полученная на универсальной испытательной машине ZWICK-Z030, изображена на рис. 3 сплошной линией.

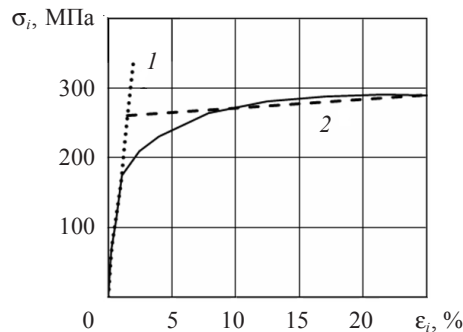


Рис. 3

Для анализа влияния аппроксимации диаграммы деформирования на точность определения критической нагрузки проведены расчеты с применением теории течения для диаграммы с линейным изотропным упрочнением. Рассмотрены следующие варианты:

1) пунктирная линия 1 на рис. 3 аппроксимирует начальный участок экспериментальной диаграммы деформирования при $\chi \leq 0,3\%$;

2) штриховая линия 2 аппроксимирует экспериментальную диаграмму деформирования при $\chi \geq 10\%$.

Рассматриваемая задача (геометрия исследуемой конструкции, условия закрепления и нагружения) имеет две плоскости симметрии. Для снижения вычислительных затрат в расчетах рассматривалась 1/4 часть конструкции и задавались краевые условия, устраняющие перемещения граничных узлов оболочки по нормали к плоскостям симметрии. Поскольку моментная схема метода конечных элементов (МКЭ) является аналогом теории оболочек типа С.П. Тимошенко [26, 29], для численного решения задачи применялась сетка с одним слоем КЭ по толщине оболочки. Всего сетка расчетной области насчитывала 4000 КЭ. Для повышения точности описания выпучивания оболочки применялось локальное сгущение конечно-элементной сетки в ее средней части.

По предварительным расчетам, период T упругих изгибных колебаний рассматриваемой оболочки по нижней форме составляет примерно 12,5 мс. Воздействие домкрата на нагружающее устройство моделировалось в расчетах усилием F_D , изменение во времени которого показано штрихпунктирной линией на рис. 4.

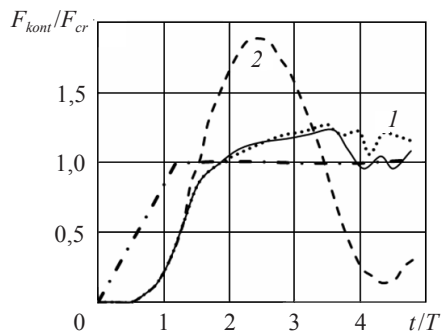


Рис. 4

Результаты численного решения задачи представлены на рис. 4–7. Графики на рисунке отображают зависимости от безразмерного времени t/T следующих параметров:

а) контактной силы F_{kont} между оболочкой и нагружающим устройством, определенной расчетным путем с использованием нелинейной диаграммы деформирования (сплошная линия на рис. 4) и вариантов 1 и 2 – линейной аппроксимации диаграммы деформирования (соответственно линии 1 и 2 на рис. 4);

б) прогиба u/u_{cr} оболочки в центре зоны образования гофров, полученного из численного решения задачи (рис. 5). Обозначения на рис. 5 соответствуют обозначениям на рис. 4;

в) продольных σ_{11} (сплошные линии) и окружных σ_{22} (пунктирные линии) напряжений в области первой складки, отнесенных к значению предела текучести $\sigma_T(0)$ при $\chi = 0$ (рис. 6). Цифрами 1, 2 на рис. 6 помечены графики, полученные для внутренней и внешней поверхностей оболочки соответственно;

г) продольной компоненты пластической деформации ε_{11}^p в центре первой складки (рис. 7), определенной в пяти точках по толщине h оболочки: 1 – $x_3 = -h/2$ (внутренняя поверхность оболочки), 2 – $x_3 = -h/4$, 3 – $x_3 = 0$, 4 – $x_3 = h/4$, 5 – $x_3 = h/2$.

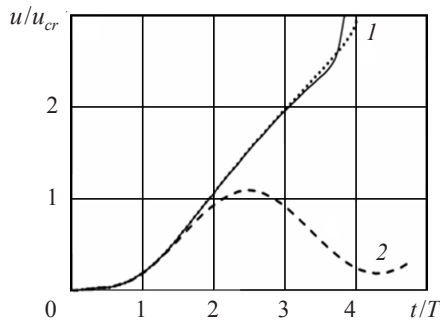


Рис. 5

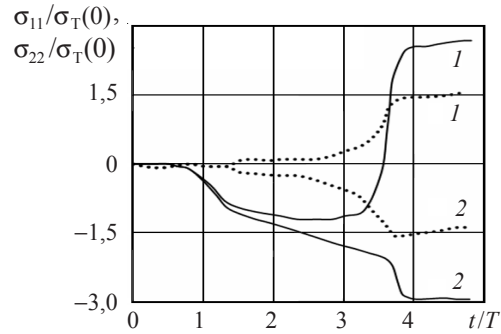


Рис. 6

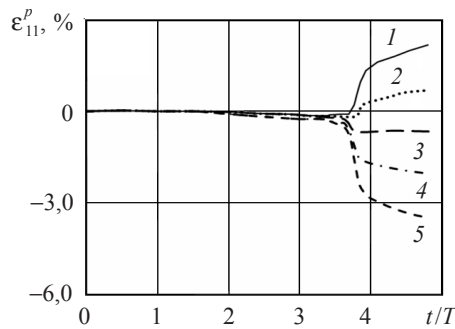


Рис. 7

Согласно результатам численного решения задачи, действие заданной нагрузки F_D порождает при $t/T \approx 2$ пластические деформации в центре оболочки между опорами нагружающего устройства. В последующем в этой области происходит потеря устойчивости оболочки, сопровождаемая образованием локальных поперечных вмятин. При снижении на 2% ($\approx 0,1$ кН) максимальной величины силы F_D , действующей на нагружающее устройство, потери устойчивости оболочки по расчетным данным не происходит.

Поскольку время T_F нарастания нагрузки F_D , моделирующей действие домкрата, было сравнительно невелико ($\approx 1,2T$), на результатах расчетов сказались динамические эффекты. В частности, максимальное значение контактной силы F_{kont} между нагружающим устройством и оболочкой на 20% превышает значение критической нагрузки F_{cr} , что связано с изгибными колебаниями оболочки. С увеличением времени T_F в 5 раз расхождение F_{kont} и F_{cr} уменьшается до 10%, однако время численного решения задачи соответственно увеличивается, что затрудняет проведение многовариантного компьютерного моделирования.

В зоне складкообразования преобладающими являются продольные напряжения σ_{11} . На внутренней поверхности оболочки в зоне первой складки на закритической стадии напряжения меняют знак (сжимающие напряжения переходят в растягивающие) и возрастают окружающие растягивающие напряжения (см. рис. 6). Изменение продольных и окружных компонент тензора напряжений происходит непропорционально. В процессе разгрузки продольные напряжения в области склад-

ки вновь достигают предела текучести. На внешней поверхности оболочки продольные и окружные напряжения в этой же зоне остаются сжимающими. Следовательно, образование вмятины на оболочке происходит при наличии пластических деформаций и приводит к росту в этой области изгибающих моментов в условиях сложного напряженного состояния. Несмотря на значительные локальные формоизменения оболочки, максимальные продольные деформации в области складок на рассмотренном этапе нагружения по расчетным данным не превышают 5%, а сдвиговые деформации – 0,03%.

Хорошее согласование результатов расчета и эксперимента по критической нагрузке (пунктирная линия на рис. 4) наблюдается также при применении в расчетах модели пластичности с линейным изотропным упрочнением, если ее параметры определены по начальному участку экспериментальной диаграммы деформирования при $\chi \leq 0,3\%$. Если эти параметры соответствуют участку диаграммы деформирования при $\chi \geq 10\%$, расчет дает завышенное значение критической нагрузки по сравнению с значением, полученным экспериментально (штриховые линии на рис. 4 и 5).

Заключение

Моментная схема МКЭ при малых деформациях поперечного сдвига позволяет решать задачи устойчивости тонкостенных оболочек на сетке с одним слоем конечных элементов по толщине. При численном исследовании потери устойчивости оболочек в упругопластической области необходимо применять модель пластичности с нелинейным упрочнением, так как критическая нагрузка и закритическое деформирование оболочки существенно зависит от текущего касательного модуля.

Список литературы

1. Вольмир А.С. *Устойчивость деформируемых систем*. М.: Наука, 1967. 984 с.
2. Григолок Э.И., Кабанов В.В. *Устойчивость оболочек*. М.: Наука, 1978. 360 с.
3. Кабанов В.В. *Устойчивость неоднородных цилиндрических оболочек*. М.: Машиностроение, 1982. 253 с.
4. Гудрамович В.С. *Устойчивость упругопластических оболочек*. Киев: Наукова думка, 1987. 216 с.
5. Ворович И.И. *Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек*. М.: Наука, 1989. 376 с.
6. Григолок Э.И. Теоретические и экспериментальные исследования устойчивости оболочек за пределами устойчивости. *Итоги науки и техники. Механика. Устойчивость и пластичность*. М.: ВИНТИ, 1966. С. 7–81.
7. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
8. Железнов Л.П., Кабанов В.В. Конечный элемент и алгоритм исследования нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек. *Прикладные проблемы механики тонкостенных конструкций*. М.: Изд-во МГУ, 2000. С. 120–127.
9. Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования и устойчивости некруговых цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внутреннем давлении. *Прикладная механика и техническая физика*. 2002. Т. 43. №4. С. 155–160.
10. Железнов Л.П., Кабанов В.В., Бойко Д.В. Нелинейное деформирование и устойчивость овалных цилиндрических оболочек при чистом изгибе с внутренним давлением. *Прикладная механика и техническая физика*. 2006. Т. 47. №3. С. 119–125.
11. Бойко Д.В., Железнов Л.П., Кабанов В.В. Исследование нелинейного деформирования

ния и устойчивости овальных цилиндрических оболочек при комбинированном нагружении изгибающим и крутящим моментами. *Изв. вузов. Авиационная техника*. 2007. №3. С. 3–7.

12. Баженов В.Г., Кибец А.И., Петров М.В., Федорова Т.Г., Шошин Д.В. Теоретическое и экспериментальное исследование потери устойчивости и закритического поведения тонкостенной цилиндрической оболочки при изгибе. *Проблемы прочности и пластичности*. 2009. Вып. 71. С. 77–83.

13. Баженов В.Г., Гоник Е.Г., Кибец А.И., Кибец Ю.И., Павленкова Е.В., Петров М.В., Федорова Т.Г. Конечно-элементное решение задачи устойчивости и закритического поведения автоцистерн для транспортировки сыпучих грузов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Вып. 75. Ч. 1. С. 56–62.

14. Баженов В.Г., Кибец А.И., Петров М.В., Федорова Т.Г., Шошин Д.В., Артемьева А.А. Экспериментально-теоретическое исследование нелинейного деформирования и потери устойчивости оболочек вращения при изгибе. *Проблемы прочности и пластичности*. 2010. Вып. 72. С. 80–85.

15. Гоник Е.Г., Кибец А.И., Петров М.В., Федорова Т.Г. Экспериментальное исследование упругопластического деформирования и потери устойчивости подкрепленных цилиндрических оболочек с наполнителем при изгибе. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Вып. 75. Ч. 3. С. 215–220.

16. Баженов В.Г., Гоник Е.Г., Кибец А.И., Петров М.В., Федорова Т.Г. Устойчивость и закритическое поведение большегабаритных цистерн для транспортировки сыпучих грузов. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2015. №5. С. 34–40.

17. Rotter J.M. Local inelastic collapse of pressurised thin cylindrical steel shells under axial compression. *ASCE Journal of Structural Engineering*. 1990. Vol. 116. No 7. P. 1955–1970.

18. Li L.-Y., Kettle R. Nonlinear bending response and buckling of ring-stiffened cylindrical shells under pure bending. *International Journal of Solids and Structures*. 2002. Vol. 39. No 3. P. 765–781.

19. Mathon C., Limam A. Experimental collapse of thin cylindrical shells submitted to internal pressure and pure bending. *Thin-Walled Structure*. 2006. Vol. 44. P. 39–50.

20. Yeh M.K., Lin M.C., Wu W.T. Bending buckling of an elastoplastic cylindrical shell with a cutout. *Engineering Structures*. 1999. Vol. 21. P. 996–1005.

21. Chen L., Doerich C., Rotter J.M. A study of cylindrical shells under global bending in the elastic-plastic range. *Steel Construction – Design and Research*. 2008. Vol. 1. No 1. P. 59–65.

22. Bazhenov V.G., Gonik E.G., Kibets A.I., Petrov M.V., Fedorova T.G., Frolova I.A. Stability and supercritical behaviour of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending. *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Vol. 28. P. 16–20.

23. Sadowski A.J., Rotter J.M. Solid or shell finite elements to model thick cylindrical tubes and shells under global bending. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. Vol. 74. P. 143–153.

24. Поздеев А.А., Трусов П.В., Няшин Ю.И. *Большие упругопластические деформации: теория, алгоритмы, приложения*. М.: Наука, 1986. 232 с.

25. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. New York: John Wiley & Sons. 2000. 600 p.

26. Баженов В.Г., Демарева А.В., Жестков М.Н., Кибец А.И. Особенности численного моделирования упругопластического выпучивания полусферических оболочек при нагружении жестким индентором. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. №2. С. 22–33.

27. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. М.: Наука, 1969. 420 с.

28. Казаков Д.А., Капустин С.А., Коротких Ю.Г. *Моделирование процессов деформирования и разрушения материалов и конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1999. 226 с.

29. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. *Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций*. М.: Физматлит, 2006. 391 с.

30. Баженов В.Г., Гоник Е.Г., Кибец А.И., Шошин Д.В. Устойчивость и предельные состояния упругопластических сферических оболочек при статических и динамических нагружениях. *Прикладная механика и техническая физика*. 2014. Т. 55. №1. С. 13–18.

31. Баженов В.Г., Жестков М.Н., Замятин В.А., Кибец А.И. Математическое моделиро-

вание развития запроектной аварии внутри корпуса реактора на быстрых нейтронах. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2015. №3. С. 5–14.

32. Коробейников С.Н., Шутов А.В. Выбор отсчетной поверхности в уравнениях пластин и оболочек. *Вычислительные технологии*. 2003. Т. 8. №6. С. 38–59.

33. Баженов В.Г., Кибец А.И., Цветкова И.Н. Численное моделирование нестационарных процессов ударного взаимодействия деформируемых элементов конструкций. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 1995. №2. С. 20–26.

34. Сертификат соответствия Госстандарта России № РОСС RU.МЕ.20.Н00338.

35. *Вычислительный комплекс «Динамика-3»*. Научно-технический центр по ядерной и радиационной безопасности. Аттестационный паспорт программного средства. Регистрационный паспорт аттестации ПС № 325 от 18.04.2013.

References

1. Volmir A.S. *Ustoychivost deformiruemyykh sistem [Stability of Deformable Systems]*. Moscow. Nauka Publ. 1967. 984 p. (In Russian).

2. Grigolyuk E.I., Kabanov V.V. *Ustoychivost obolochek [Stability of Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1978. 360 p. (In Russian).

3. Kabanov V.V. *Ustoychivost neodnorodnykh tsilindricheskikh obolochek [Stability of Inhomogeneous Cylindrical Shells]*. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1982. 253 p. (In Russian).

4. Gudramovich V.S. *Ustoychivost uprugoplasticheskikh obolochek [Stability of Elastoplastic Shells]*. Kiev. Naukova dumka Publ. 1987. 216 p. (In Russian).

5. Vorovich I.I. *Matematicheskie problemy nelineynoy teorii pologikh obolochek [Mathematical Problems of the Nonlinear Theory of Shallow Shells]*. Moscow. Nauka Publ. 1989. 376 p. (In Russian).

6. Grigolyuk E.I. Teoreticheskie i eksperimentalnye issledovaniya ustoychivosti obolochek za predelami ustoychivosti [Theoretical and experimental studies of the stability of shells beyond stability]. *Itogi nauki i tekhniki. Mekhanika. Ustoychivost i plastichnost [The Results of Science and Technology. Mechanics. Stability and Plasticity]*. Moscow. VINITI Publ. 1966. P. 7–81 (In Russian).

7. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy [Nonlinear Problems of the Dynamics of Composite Structures]*. Nizhni Novgorod. NNGU Publ. 2002. 400 p. (In Russian).

8. Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Konechnyy element i algoritm issledovaniya nelineynogo deformirovaniya i ustoychivosti nekrugovykh tsilindricheskikh obolochek [Finite element and algorithm for investigating nonlinear deformation and stability of non-circular cylindrical shells]. *Prikladnye problemy mekhaniki tonkostennykh konstruksiy [Applied Problems of the Mechanics of Thin-walled Structures]*. Moscow. MGU Publ. 2000. P. 120–127 (In Russian).

9. Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Issledovanie nelineynogo deformirovaniya i ustoychivosti nekrugovykh tsilindricheskikh obolochek pri osevom szhatii i vnutrennem davlenii [Nonlinear deformation and stability of noncircular cylindrical shells under internal pressure and axial compression]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*. 2002. Vol. 43. No 4. P. 161–169 (In Russian).

10. Zheleznov L.P., Kabanov V.V., Boiko D.V. Nelineynoe deformirovanie i ustoychivost oval'nykh tsilindricheskikh obolochek pri chistom izgibe s vnutrennim davleniem [Nonlinear deformation and stability of oval cylindrical shells under pure bending and internal pressure]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*. 2006. Vol. 47. No 3. P. 119–125 (In Russian).

11. Boiko D.V., Zheleznov L.P., Kabanov V.V. Issledovanie nelineynogo deformirovaniya i ustoychivosti ovalnykh tsilindricheskikh obolochek pri kombinirovannom nagruzenii izgibayushchim i krutyashchim momentami [Analysis of nonlinear deformation and stability of oval cylindrical shells under combined loading by bending and torsion moments]. *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Aviatsonnaya tekhnika [Russian Aeronautics]*. 2007. No 3. P. 3–7 (In Russian).

12. Bazhenov V.G., Kibetz A.I., Petrov M.V., Shoshin D.V., Fedorova T.G. Teoreticheskoe i eksperimentalnoe issledovanie poteri ustoychivosti i zakriticheskogo povedeniya tonkostennoy tsilindricheskoy obolochki pri izgibe [Theoretically and experimentally investigating the loss of stability and supercritical behaviour of a thin-walled cylindrical shell loaded in bending]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2009. Iss. 71. P. 77–83 (In Russian).
13. Bazhenov V.G., Gonik E.G., Kibets A.I., Kibets Yu.I., Pavlenkova E.V., Petrov M.V., Fyodorova T.G. Konechno-elementnoe reshenie zadachi ustoychivosti i zakriticheskogo povedeniya avtostern dlya transportirovki sypuchikh gruzov [Finite-element analysis of the problem of stability and supercritical behavior of tank-trucks for transporting loose freights]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2013. Vol. 75. No 1. P. 56–62 (In Russian).
14. Bazhenov V.G., Kibets A.I., Petrov M.V., Fyodorova T.G., Shoshin D.V., Artemyeva A.A. Eksperimentalno-teoreticheskoe issledovanie nelineynogo deformirovaniya i poteri ustoychivosti obolochek vrashcheniya pri izgibe [The experimental-theoretical study of nonlinear deformation and loss of stability in shells of revolution loaded in bending]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2010. Iss. 72. P. 80–85 (In Russian).
15. Gonik Ye.G., Kibets A.I., Petrov M.V., Fyodorova T.G. Eksperimentalnoe issledovanie uprugoplasticheskogo deformirovaniya i poteri ustoychivosti podkreplennykh tsilindricheskikh obolochek s zapolnitelem pri izgibe [Experimentally investigating the elastoplastic deformation and loss of stability of stiffened cylindrical shells with a filling loaded in bending]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2013. Vol. 75. No 3. P. 215–220 (In Russian).
16. Bazhenov V.G., Gonik E.G., Kibets A.I., Petrov M.V., Fedorova T.G. Ustoychivost i zakriticheskoe povedenie bol'shegabaritnykh tsistem dlya transportirovki sypuchikh gruzov [Stability and supercritical behavior of large-size tankers for transportation of loose goods]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]*. 2015. No 5. P. 34–40 (In Russian).
17. Rotter J.M. Local inelastic collapse of pressurised thin cylindrical steel shells under axial compression. *ASCE. Journal of Structural Engineering*. 1990. Vol. 116. No 7. P. 1955–1970.
18. Li L.-Y., Kettle R. Nonlinear bending response and buckling of ring-stiffened cylindrical shells under pure bending. *International Journal of Solids and Structures*. 2002. Vol. 39. No 3. P. 765–781.
19. Mathon C., Limam A. Experimental collapse of thin cylindrical shells submitted to internal pressure and pure bending. *Thin-Walled Structure*. 2006. Vol. 44. P. 39–50.
20. Yeh M.K., Lin M.C., Wu W.T. Bending buckling of an elastoplastic cylindrical shell with a cutout. *Engineering Structures*. 1999. Vol. 21. P. 996–1005.
21. Chen L., Doerich C., Rotter J.M. A study of cylindrical shells under global bending in the elastic-plastic range. *Steel Construction – Design and Research*. 2008. Vol. 1. No 1. P. 59–65.
22. Bazhenov V.G., Gonik E.G., Kibets A.I., Petrov M.V., Fedorova T.G., Frolova I.A. Stability and supercritical behaviour of thin-walled cylindrical shell with discrete aggregate in bending. *Materials Physics and Mechanics*. 2016. Vol. 28. P. 16–20.
23. Sadowski A.J., Rotter J.M. Solid or shell finite elements to model thick cylindrical tubes and shells under global bending. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2013. Vol. 74. P. 143–153.
24. Pozdeev A.A., Trusov P.V., Niashin Yu.I. *Bolshie uprugoplasticheskie deformatsii: teoriya, algoritmy, prilozheniya [Large Elastoplastic Deformations: Theory, Algorithms, Applications]*. Moscow. Nauka Publ. 1986. 232 p. (In Russian).
25. Belytschko T., Liu W.K., Moran B. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. New York. John Wiley & Sons. 2000. 600 p.
26. Bazhenov V.G., Demareva A.V., Zhestkov M.N., Kibets A.I. Osobennosti chislennogo modelirovaniya uprugoplasticheskogo vypuchivaniya polusfericheskikh obolochek pri nagruzhennii zhestkim indentorom [Special features of numerical simulation for elastic-plastic buckling of hemispherical shells under loading with the rigid indenter]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2016. No 2. P. 22–33 (In Russian).

27. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti [Fundamentals of the Theory of Plasticity]*. Moscow. Nauka Publ. 1969. 420 p. (In Russian).
28. Kazakov D.A., Kapustin S.A., Korotkikh Yu.G. *Modelirovanie protsessov deformirovaniya i razrusheniya materialov i konstruksiy [Modeling of Processes of Deformation and Destruction of Materials and Structures]*. Nizhni Novgorod. NNGU Publ. 1999. 226 p. (In Russian).
29. Golovanov A.I., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. *Metod konechnykh elementov v statike i dinamike tonkostennykh konstruksiy [Finite Element Method in Static and Dynamics of Thin-walled Structures]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2006. 391 p. (In Russian).
30. Bazhenov V.G., Gonik E.G., Kibets A.I., Shoshin D.V. Ustoychivost i predelnye sostoyaniya uprugoplasticheskikh sfericheskikh obolochek pri staticheskikh i dinamicheskikh nagruzheniyakh [Stability and limit states of elastoplastic spherical shells under static and dynamic loading]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*. 2014. Vol. 55. No 1. P. 13–18 (In Russian).
31. Bazhenov V.G., Zhestkov M.N., Zamyatin V.A., Kibets A.I. Matematicheskoe modelirovanie razvitiya zaproektnoy avarii vnutri korpusa reaktora na bystrykh neytronakh [Mathematical modeling of development of beyond design basis accident in integral fast-neutron reactors vessel]. *Vestnik Permskogo natsionalnogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika [PNRPU Mechanics Bulletin]*. 2015. No 3. P. 5–14 (In Russian).
32. Korobeinikov S.N., Shutov A.V. Vybora otschetnoy poverkhnosti v uravneniyakh plastin i obolochek [A choice of the reference surface in plate and shell equations]. *Vychislitelnye tekhnologii [Journal Computational Technologies]*. 2003. Vol. 8. No 6. P. 38–59 (In Russian).
33. Bazhenov V.G., Kibets A.I., Tsvetkova I.N. Chislennoe modelirovanie nestatsionarnykh protsessov udarnogo vzaimodeystviya deformiruemykh elementov konstruksiy [Numerical simulation of nonstationary processes of impact interaction of deformed structural elements]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]*. 1995. No 2. P. 20–26 (In Russian).
34. *Sertifikat sootvetstviya Gosstandarta Rossii [Certificate of Conformity of Gosstandart of Russia]* № POCC RU.ME.20.H00338 (In Russian).
35. *Vychislitelnyy kompleks "Dinamika-3" [Computing Complex "Dynamics-3"]*. Nauchno-tekhnicheskii tsentr po yadernoy i radiatsionnoy bezopasnosti. Attestatsionnyy pasport programmnogo sredstva. Registratsionnyy pasport attestatsii PS No 325 ot 18.04.2013. [Scientific and Technical Center for Nuclear and Radiation Safety. Certificate of attestation. Registration of attestation PS No 325 of 18.04.2013] (In Russian).

THE EFFECT OF APPROXIMATING DEFORMATION CURVES ON CRITICAL LOAD VALUES OF LATERAL BENDING OF A CYLINDRICAL SHELL

Gonik E.G.¹, Kibets A.I.², Petrov M.V.¹, Fedorova T.G.¹, Frolova I.A.¹

¹*I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation*

²*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

A 3D geometrically and physically nonlinear problem of elastoplastic deformation and loss of stability of a steel cylindrical shell with loose filling loaded in lateral bending is considered. The problem is formulated in a dynamic form, using Lagrange variables (a current Lagrange formulation of the problem). Deformation of the shell is described in terms of mechanics of elastic-viscoplastic media without using the hypotheses of the theory of thin-walled structures. The equation of motion is derived from the power balance of virtual work kinematic relation are defined in the metrics of the current state. Elastoplastic deformation is described using the theory of flow with isotropic hardening. The effect of the filling is modeled with an analytical function depending on spatial variables and time. Loss of stability of the shell is determined using the parameter protraction method, the parameter used being time. The problem is numerically analyzed using the moment

scheme of the FEM and the cross-type explicit time integration scheme. The ends of the cylindrical shell rest on rigid supports. To reach the ultimate state, the shell, in addition to its weight and the weight of the filling, is loaded with an additional lateral force. It is shown that the analytical results do not differ considerably from the experimental data if a bilinear approximation without accounting for critical values of stresses and strains is used, as, to analyze stability of an elastoplastic shell, the tangential module of hardening of the material has to be correctly prescribed.

Keywords: cylindrical shell, filling, stability, plastic strains, finite element method.