

УДК 534.01

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ОБУСЛОВЛЕННОСТЬ ЗАДАЧИ БАЛАНСИРОВКИ РОТОРА *

© 2017 г.

Ляхов А.Ф.

Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

Lyakhov@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 23.12.2016

Исследуется проблема балансировки жесткого ротора в двух радиальных упругих подшипниках. Идентификация параметров дисбаланса ротора осуществляется на основе решения обратной задачи динамики. Параметры дисбаланса ротора находятся по измеренным радиальным биениям ротора. Показано, что задача об идентификации параметров дисбаланса является плохо обусловленной задачей, то есть малые погрешности при измерении вибраций ротора приводят к большим погрешностям при определении параметров дисбаланса.

Вблизи резонансных частот вращения ротора число обусловленности задачи наибольшее, а относительные погрешности измерений малы, вдали от резонансных частот вращения число обусловленности меньше, но относительные погрешности велики. Предложена новая методика выбора частот вращения ротора, при которых погрешности определения параметров дисбаланса ротора будут минимальными из возможных.

Ключевые слова: балансировка, жесткий ротор, радиальные упругие подшипники, резонансные частоты, обратная задача динамики, плохо обусловленная задача.

Введение

В научной и инженерной практике часто возникает проблема несоответствия результатов теоретических исследований и их практической реализации в технологии производства. Например, для исследования балансировки высокоскоростного ротора газовой центрифуги создана хорошая математическая модель, описывающая процесс балансировки, создана соответствующая корректная вычислительная модель [1]. Выполнены тестирование и численные расчеты, которые качественно совпадают с экспериментально наблюдаемыми биениями ротора при раскрутке. На основе проведенных исследований сформулированы рекомендации для использования в технологическом процессе балансировки ротора. Однако применение этих рекомендаций на практике показало, что для балансировки требуется большее число раскруток ротора, чем предлагалось в статье [1]. Попытки улучшить результат повышением точности измерений и вычислений, как правило, не приводят к успеху.

* Выполнено при поддержке РФФИ (грант №15-01-08326).

Задача балансировки роторов является классической инженерной задачей. Как известно, дисбаланс ротора определяется смещением центра масс и собственной оси инерции от оси вращения. При вращении ротора возникают периодические силы, которые при больших скоростях достигают больших значений и могут приводить к разрушению подшипников опор. В публикациях [2–5] приводится обширная библиография работ, посвященных динамике роторов и проблеме их балансировки.

Существует несколько методов определения положения центра масс и смещения оси по измеряемым перемещениям ротора. После определения смещения дисбаланс компенсируется присоединением дополнительных масс к ротору [6–8].

В [1] показано теоретически, что для определения дисбаланса ротора достаточно провести измерения перемещений оси ротора при двух различных скоростях вращения. Однако реальная балансировка высокоскоростных роторов, осуществляемая экспериментально, состоит в последовательном многократном замере биений ротора и присоединении дополнительных масс. Эта проблема становится особенно острой для высокоскоростных роторов, так как время разгона ротора до рабочих скоростей и его торможение занимают много времени и требуют больших энергетических затрат.

Представленные в настоящей статье результаты исследования позволили ответить на вопрос о причинах несоответствия практики балансировки роторов и теоретических результатов. Показано, что система линейных алгебраических уравнений, описывающих задачу балансировки ротора, плохо обусловлена. Малые погрешности при измерении вибраций ротора приводят к большим погрешностям при определении параметров дисбаланса.

Заметим, что вблизи резонансных частот вращения ротора числа обусловленности задачи наибольшие, а относительные погрешности измерений малы. Вдали от резонансных частот вращения число обусловленности меньше, но относительные погрешности велики. Следовательно, существуют частоты вращения ротора, при которых погрешности определения дисбаланса будут минимальными. Это позволяет предложить новую методику выбора частот вращения ротора, при которых влияние погрешности измерений оказывается минимальным из возможных.

Балансировка абсолютно жесткого цилиндрического ротора

Рассмотрим жесткий ротор цилиндрической формы, вращающийся в упругих подшипниках с угловой скоростью Ω относительно оси Oz , близкой к вертикальной оси ротора $O'z'$ (рис. 1а). Во вращающейся системе координат задача о поиске дисбалансов сводится к решению задачи о равновесии ротора и, следовательно, к решению алгебраической системы уравнений [1].

Обозначения основных характеристик ротора и геометрических размеров: k_1, k_2 – жесткости верхнего и нижнего упругих подшипников; m – масса ротора; A – поперечный, C – осевой моменты инерции ротора ($A > C$); O' – центр масс ротора; l_1, l_2 – расстояния от центра масс ротора до его торцов; R – радиус ротора. Крепление ротора на торцах осуществляется с эксцентриситетами e_1, e_2, ψ_1, ψ_2 . Предполагается, что массы дисбалансов μ_1, μ_2 расположены на торцах ротора. Расположение масс дисбаланса на окружностях балансировки задаются углами φ_1, φ_2 (рис. 1б).

Ротор рассматривается в системе координат $Oxyz$, которая вращается с угловой скоростью Ω вокруг оси Oz . В этой системе координат ротор не вращается. Равно-

весное положение ротора определяется четырьмя обобщенными координатами: x_c, y_c – координаты центра масс, α, β – углы наклона оси ротора. Эти координаты учитывают поступательные и угловые степени свободы ротора как твердого тела и находятся по данным измерения его радиальных биений. Измерения осуществляются на торцах ротора.

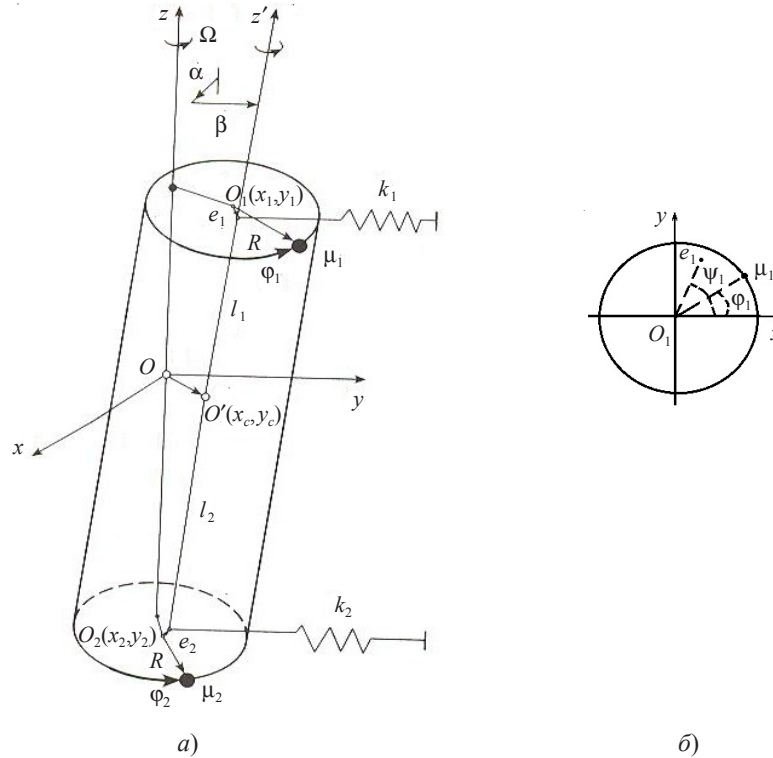


Рис. 1

Равновесие в подвижной системе координат определяется потенциальной энергией упругих подшипников и центробежной энергией ротора [2].

Центробежная энергия сбалансированного ротора записывается в виде:

$$E_c = -\frac{\Omega^2}{2} [m(x_c^2 + y_c^2) + (A - C)(\alpha^2 + \beta^2)],$$

центробежная энергия масс дисбаланса

$$E'_c = -\frac{\Omega^2}{2} \sum_{i=1}^2 \mu_i [(x_{1i} + R \cos \varphi_i)^2 + (y_{1i} + R \sin \varphi_i)^2],$$

потенциальная энергия упругих закреплений

$$\Pi = \sum_{i=1}^2 \frac{k_i}{2} [(x_i + e_i \cos \psi_i)^2 + (y_i + e_i \sin \psi_i)^2],$$

где x_1, y_1 и x_2, y_2 – смещения геометрических центров верхнего и нижнего торцов ротора:

$$x_1 = x_c + l_1 \sin \alpha, \quad x_2 = x_c - l_2 \sin \alpha, \quad y_1 = y_c + l_1 \sin \beta, \quad y_2 = y_c - l_2 \sin \beta.$$

Учитывая малость углов α, β , последние соотношения запишем в виде:

$$x_1 = x_c + l_1\alpha, \quad x_2 = x_c - l_2\alpha, \quad y_1 = y_c + l_1\beta, \quad y_2 = y_c - l_2\beta.$$

Уравнения стационарного вращения ротора в неинерциальной (вращающейся) системе отсчета можно представить в виде [9]:

$$\frac{\partial(E_c + \Pi)}{\partial q_i} = -\frac{\partial E'_c}{\partial q_i}, \quad i = \overline{1, 4}, \quad q = (x_c, y_c, \alpha, \beta). \quad (1)$$

Система уравнений (1) позволяет поставить как прямую, так и обратную задачу стационарного движения ротора.

Прямая задача состоит в определении параметров движения ротора при заданных массах дисбаланса и заданных эксцентриситетах закрепления ротора.

Обратная задача состоит в определении масс дисбалансов и их размещения при известном движении ротора.

В уравнения системы (1) входит восемь неизвестных параметров дисбаланса ротора в проекциях на оси Ox, Oy . Введем обозначения: $\mu_{ix} = \mu_i \cos \varphi_i, \mu_{iy} = \mu_i \sin \varphi_i, e_{ix} = e_i \cos \psi_i, e_{iy} = e_i \sin \psi_i; i = 1$ соответствует верхнему торцу, $i = 2$ – нижнему торцу ротора.

Введем безразмерные параметры системы:

$$\begin{aligned} \mu'_i &= \frac{\mu_i}{m}, \quad e'_i = \frac{e_i}{R}, \quad l'_i = \frac{l_i}{R}, \quad i = 1, 2; \\ x'_c &= \frac{x_c}{R}, \quad y'_c = \frac{y_c}{R}, \quad (A - C)' = \frac{A - C}{mR^2}, \end{aligned}$$

штрих в обозначениях в дальнейшем опускается.

Члены, содержащие неизвестные параметры дисбаланса, перенесем в левую часть уравнений системы (1) и с учетом введенных обозначений получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mu_{1x} + \mu_{2x} - \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} e_{1x} - \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} e_{2x} &= -x_c + \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} (x_c + l_1\alpha) + \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} (x_c - l_2\alpha), \\ l_1\mu_{1x} - l_2\mu_{2x} - l_1 \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} e_{1x} + l_2 \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} e_{2x} &= -(A - C)\alpha + l_1 \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} (x_c + l_1\alpha) - l_2 \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} (x_c - l_2\alpha), \\ \mu_{1y} + \mu_{2y} - \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} e_{1y} - \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} e_{2y} &= -y_c + \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} (y_c + l_1\beta) + \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} (y_c - l_2\beta), \\ l_1\mu_{1y} - l_2\mu_{2y} - l_1 \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} e_{1y} + l_2 \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} e_{2y} &= -(A - C)\beta + l_1 \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} (y_c + l_1\beta) - l_2 \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} (y_c - l_2\beta), \end{aligned} \quad (2)$$

где $\omega_1^2 = k_1/m, \omega_2^2 = k_2/m$ – парциальные частоты упругих закреплений ротора.

Система содержит восемь неизвестных $\mu_{ix}, \mu_{iy}, e_{ix}, e_{iy} (i = 1, 2)$. Следовательно, для того чтобы получить восемь уравнений, необходимо рассмотреть эту систему с двумя различными частотами вращения ротора Ω_1, Ω_2 .

В силу радиальной симметрии ротора уравнения его движения в проекциях на оси Ox, Oy расщепляются на идентичные уравнения и могут исследоваться независимо.

Запишем четыре уравнения для определения параметров дисбаланса в проекции на ось Ox :

$$\begin{aligned}
\mu_{1x} + \mu_{2x} - \frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} e_{1x} - \frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} e_{2x} &= \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} + \frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} - 1 \right) x_{1c} + \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} l_1 - \frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} l_2 \right) \alpha_1, \\
l_1 \mu_{1x} - l_2 \mu_{2x} - l_1 \frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} e_{1x} + l_2 \frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} e_{2x} &= \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} l_1 - \frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} l_2 \right) x_{1c} + \left(l_1^2 \frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} + l_2^2 \frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} - (A-C) \right) \alpha_1, \\
\mu_{1x} + \mu_{2x} - \frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} e_{1x} - \frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} e_{2x} &= \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} + \frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} - 1 \right) x_{2c} + \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} l_1 - \frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} l_2 \right) \alpha_2, \\
l_1 \mu_{1x} - l_2 \mu_{2x} - l_1 \frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} e_{1x} + l_2 \frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} e_{2x} &= \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} l_1 - \frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} l_2 \right) x_{2c} + \left(l_1^2 \frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} + l_2^2 \frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} - (A-C) \right) \alpha_2,
\end{aligned} \tag{3}$$

x_{1c} и α_1 , x_{2c} и α_2 – координаты центра масс и углы наклона оси ротора соответственно для частот Ω_1 , Ω_2 .

Определитель этой системы записывается так:

$$\Delta = (l_1 + l_2)^2 \omega_1^2 \omega_2^2 \left[\frac{1}{\Omega_1^2} - \frac{1}{\Omega_2^2} \right]^2.$$

Решив систему (3), получим значения дисбалансов и эксцентриситетов закрепления ротора

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= \sqrt{\mu_{1x}^2 + \mu_{1y}^2}, \quad \mu_2 = \sqrt{\mu_{2x}^2 + \mu_{2y}^2}, \\
\varphi_1 &= 2 \operatorname{arctg} \frac{\mu_{1y}}{\mu_{1x} + \sqrt{\mu_{1x}^2 + \mu_{1y}^2}}, \quad \varphi_2 = 2 \operatorname{arctg} \frac{\mu_{2y}}{\mu_{2x} + \sqrt{\mu_{2x}^2 + \mu_{2y}^2}}, \\
e_1 &= \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2}, \quad e_2 = \sqrt{e_{2x}^2 + e_{2y}^2}, \\
\psi_1 &= 2 \operatorname{arctg} \frac{e_{1y}}{e_{1x} + \sqrt{e_{1x}^2 + e_{1y}^2}}, \quad \psi_2 = 2 \operatorname{arctg} \frac{e_{2y}}{e_{2x} + \sqrt{e_{2x}^2 + e_{2y}^2}}.
\end{aligned}$$

Резонансное нарастание обобщенных координат ротора от несбалансированности происходит на критических (резонансных) частотах вращения, которые определяются из характеристического уравнения прямой задачи динамики

$$\begin{vmatrix} \omega_1^2 + \omega_2^2 - \Omega^2 & \omega_1^2 l_1 - \omega_2^2 l_2 \\ \omega_1^2 l_1 - \omega_2^2 l_2 & \omega_1^2 l_1^2 + \omega_2^2 l_2^2 - (A-C)\Omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Это уравнение имеет наиболее простой вид при симметричном расположении подшипников относительно центра масс ротора и в случае подшипников с одинаковой жесткостью ($l_1 = l_2 = l$, $\omega_1^2 = \omega_2^2 = \omega^2$, $A \neq C$):

$$\begin{vmatrix} 2\omega^2 - \Omega^2 & 0 \\ 0 & 2\omega^2 l^2 - (A-C)\Omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Решение характеристического уравнения имеет вид:

$$\Omega_{1r}^2 = 2\omega^2, \quad \Omega_{2r}^2 = \frac{2\omega^2 l^2}{A-C}.$$

Первая резонансная частота соответствует цилиндрической форме движения, когда возмущенные движения ротора являются поступательными ($\alpha = \beta = 0$).

Цилиндрическая форма движения возбуждается массами дисбаланса и эксцентриситетами крепления с одинаковыми проекциями на оси Ox , Oy (односторонний дисбаланс).

Компенсация найденных масс дисбаланса μ_1, μ_2 может быть осуществлена добавлением равных им по величине балансировочных масс $\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2$, помещенных в точки окружности балансировки $\bar{\Phi}_{1,2}$, диаметрально противоположные точкам $\Phi_{1,2}$ нахождения масс дисбаланса.

Вторая критическая частота соответствует конической форме движения, если массы дисбаланса и эксцентриситета имеют разносторонний дисбаланс. Коническая форма стационарного движения ротора имеет место при $x_c = 0, y_c = 0$.

Компенсация дисбаланса, вызванного эксцентриситетами крепления ротора в упругих подшипниках, может быть осуществлена с помощью двух балансировочных масс $\mu_{1,2}^e$, располагаемых на тех же окружностях балансировки, что и массы, компенсирующие массовый дисбаланс с учетом углов ψ_1, ψ_2 . Эти массы сдвигают ось инерции ротора и наклоняют ее таким образом, чтобы она проходила через точки закрепления ротора.

Методика определения дисбалансов ротора при большом количестве измерений смещений ротора при различных скоростях вращения

Для определения четырех дисбалансов по оси $Ox - \mu_{1x}, \mu_{2x}, e_{1x}, e_{2x}$ из системы (2) – запишем два уравнения:

$$\begin{aligned} \mu_{1x} + \mu_{2x} - \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} e_{1x} - \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} e_{2x} &= -x_c + \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} (x_c + l_1 \alpha) + \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} (x_c - l_2 \alpha), \\ l_1 \mu_{1x} - l_2 \mu_{2x} - l_1 \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} e_{1x} + l_2 \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} e_{2x} &= -(A - C) \alpha + l_1 \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} (x_c + l_1 \alpha) - l_2 \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} (x_c - l_2 \alpha). \end{aligned}$$

Предположим, что центр масс ротора расположен посередине ротора, то есть $l_1 = l_2 = l$. Выразим безразмерные координаты центра масс и угол отклонения через измеренные смещения ротора x_1, x_2 , взятые в безразмерной форме, $x'_1 = x_1/R, x'_2 = x_2/R$ (штрих в обозначениях в дальнейшем опускается):

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \alpha = \frac{x_2 - x_1}{2l}, \\ \mu_{1x} + \mu_{2x} - \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} e_{1x} - \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} e_{2x} &= \left(\frac{\omega_2^2}{\Omega^2} - \frac{1}{2} \right) x_1 + \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega^2} - \frac{1}{2} \right) x_2, \\ \mu_{1x} - \mu_{2x} - \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} e_{1x} + \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} e_{2x} &= \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega^2} - \frac{A - C}{2l^2} \right) x_2 + \left(-\frac{\omega_2^2}{\Omega^2} + \frac{A - C}{2l^2} \right) x_1. \end{aligned}$$

Складывая и вычитая эти уравнения, получим

$$\begin{aligned} \mu_{1x} - \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} e_{1x} &= D_1(\Omega, x_1, x_2), \\ \mu_{2x} - \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} e_{2x} &= D_2(\Omega, x_1, x_2), \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$D_1(\Omega, x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{A-C}{2l^2} - \frac{1}{2} \right) x_1 + \left(2 \frac{\omega_1^2}{\Omega^2} - \frac{A-C}{2l^2} - \frac{1}{2} \right) x_2 \right],$$

$$D_2(\Omega, x_1, x_2) = \frac{1}{2} \left[\left(2 \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} - \frac{A-C}{2l^2} - \frac{1}{2} \right) x_1 + \left(\frac{A-C}{2l^2} - \frac{1}{2} \right) x_2 \right].$$

При изменении частоты вращения ротора изменяются измеряемые смещения x_1, x_2 . В дальнейшем для сокращения формы записи выражений будем использовать следующий вид записи функций: $D_1(\Omega) = D_1(\Omega, x_1, x_2)$, $D_2(\Omega) = D_2(\Omega, x_1, x_2)$.

Полученная система уравнений (4) недоопределена (два уравнения, а неизвестных четыре). Для того чтобы доопределить систему, необходимо провести несколько измерений смещений ротора при различных частотах вращения $\Omega_i, i = 1, \dots, n$. В результате при $n > 2$ получается переопределенная система из n уравнений:

$$\mu_{1x} - \frac{\omega_1^2}{\Omega_i^2} e_{1x} = D_1(\Omega_i),$$

$$\mu_{2x} - \frac{\omega_2^2}{\Omega_i^2} e_{2x} = D_2(\Omega_i).$$

Решение системы можно искать методом наименьших квадратов. Введем функционал

$$S(\mu_{1x}, e_{1x}, \mu_{2x}, e_{2x}) = \sum_{i=1}^n \left(D_1(\Omega_i) - \mu_{1x} + \frac{\omega_1^2}{\Omega_i^2} e_{1x} \right)^2 + \left(D_2(\Omega_i) - \mu_{2x} + \frac{\omega_2^2}{\Omega_i^2} e_{2x} \right)^2.$$

Его экстремум будет определяться из решения следующей системы:

$$\frac{\partial S}{\partial \mu_{1x}} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial e_{1x}} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial \mu_{2x}} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial e_{2x}} = 0.$$

Полученная система имеет вид:

$$n\mu_{1x} - \omega_1^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Omega_i^2} \right) e_{1x} = \sum_{i=1}^n D_1(\Omega_i),$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Omega_i^2} \right) \mu_{1x} - \omega_1^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Omega_i^4} \right) e_{1x} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Omega_i^2} D_1(\Omega_i),$$

$$n\mu_{2x} - \omega_2^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Omega_i^2} \right) e_{2x} = \sum_{i=1}^n D_2(\Omega_i),$$

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Omega_i^2} \right) \mu_{2x} - \omega_2^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{\Omega_i^4} \right) e_{2x} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\Omega_i^2} D_2(\Omega_i).$$

Заметим, что минимальное количество частот вращения, при которых система будет определена, равно двум.

Погрешность определения дисбалансов ротора

Система, определяющая дисбалансы ротора с центром масс, расположенным в середине ротора ($l_1 = l_2 = l$), при двух частотах вращения ротора имеет вид:

$$\begin{aligned}\mu_{1x} + \mu_{2x} - \frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} e_{1x} - \frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} e_{2x} &= \left(\frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} - \frac{1}{2} \right) x_1^{(1)} + \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} - \frac{1}{2} \right) x_2^{(1)}, \\ \mu_{1x} - \mu_{2x} - \frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} e_{1x} + \frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} e_{2x} &= \left(-\frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} + \frac{A-C}{2l^2} \right) x_1^{(1)} + \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} - \frac{A-C}{2l^2} \right) x_2^{(1)}, \\ \mu_{1x} + \mu_{2x} - \frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} e_{1x} - \frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} e_{2x} &= \left(\frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} - \frac{1}{2} \right) x_1^{(2)} + \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} - \frac{1}{2} \right) x_2^{(2)}, \\ \mu_{1x} - \mu_{2x} - \frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} e_{1x} + \frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} e_{2x} &= \left(-\frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} + \frac{A-C}{2l^2} \right) x_1^{(2)} + \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} - \frac{A-C}{2l^2} \right) x_2^{(2)},\end{aligned}$$

где $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}$ – смещения ротора при Ω_1 , а $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}$ – при Ω_2 .
Или в матричном виде

$$\bar{\mu} \mathbf{A} = \mathbf{B} \bar{x}, \quad (5)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} & -\frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} \\ 1 & -1 & -\frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} & \frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} \\ 1 & 1 & -\frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} & -\frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} \\ 1 & -1 & -\frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} & \frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} - \frac{1}{2} & \frac{\omega_1^2}{\Omega_1^2} - \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} + \frac{A-C}{2l} & \frac{\omega_2^2}{\Omega_1^2} - \frac{A-C}{2l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} - \frac{1}{2} & \frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} - \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\omega_2^2}{\Omega_2^2} + \frac{A-C}{2l} & \frac{\omega_1^2}{\Omega_2^2} - \frac{A-C}{2l} \end{pmatrix},$$

$\bar{\mu} = (\mu_{1x}, \mu_{2x}, e_{1x}, e_{2x})^T$ – вектор дисбалансов, $\bar{x} = (x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, x_1^{(2)}, x_2^{(2)})^T$ – вектор измеряемых смещений.

Следовательно, задача о балансировке ротора может быть решена за два измерения смещений ротора в процессе одной раскрутки при двух частотах из рабочего диапазона.

Однако практика балансировки показывает, что после присоединения найденных балансировочных масс возмущения ротора, как правило, превышают требования по их малости. В этом случае требуется дополнительный анализ, уточняющий балансировочные массы и их размещения.

Как показали численные исследования погрешностей определения вектора дисбалансов, это связано с тем, что матрица \mathbf{A} системы (5) плохо обусловлена.

Погрешность вектора дисбалансов связана с погрешностью измерения смещений формулой

$$\frac{\|\Delta\bar{\mu}\|}{\|\bar{\mu}_0\|} = \text{cond}(\mathbf{A}(\Omega_1, \Omega_2)) \frac{\|\Delta\bar{x}\|}{\|\bar{x}_0\|}.$$

Число обусловленности $\text{cond}(\mathbf{A})$ зависит от жесткостей нижнего и верхнего закреплений ротора.

В качестве примера приведем вычисление числа обусловленности при следующих параметрах ротора: $m = 5$ кг, $\Omega_1 = 20$ с⁻¹, $\Omega_2 = 420$ с⁻¹, жесткости изменялись в пределах $k_1 = 100\text{--}500$ Н·м, $k_2 = 1000\text{--}40000$ Н·м. Парциальные частоты изменялись в пределах $\omega_1 \approx 4,3\text{--}10$ с⁻¹, $\omega_2 \approx 14,4\text{--}89,4$ с⁻¹.

Результаты вычислений числа обусловленности $\text{cond}(\mathbf{A})$ от жесткостей приведены на рис. 2.

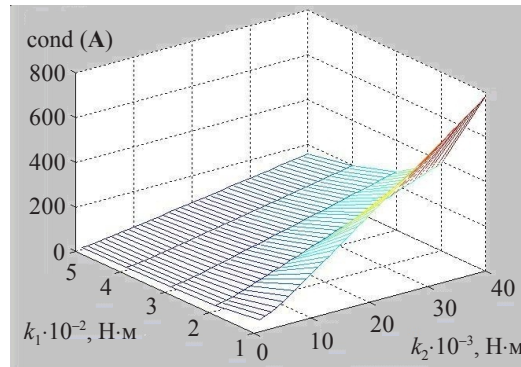


Рис. 2

Видно, что при увеличении жесткости верхнего закрепления k_1 число обусловленности убывает, а при увеличении жесткости нижнего закрепления k_2 число обусловленности растет. При рассматриваемых параметрах ротора число обусловленности $\text{cond}(\mathbf{A}) \approx 800$.

Покажем, как изменяется погрешность определения дисбаланса. В вычислительном эксперименте для частот $\Omega_1 = 8,7$ с⁻¹ и $\Omega_2 = 20$ с⁻¹ зададим погрешности измерения вибраций ротора $\|\Delta\bar{x}\|/\|\bar{x}_0\| \approx 0,0025$, тогда погрешность определения дисбаланса $\|\bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_0\|/\|\bar{\mu}_0\| \geq 0,3$.

Найденные дисбалансы ротора определяются с большой погрешностью даже при малых погрешностях измерения смещений ротора.

Вычислительный эксперимент показал, что число обусловленности зависит от близости частот вращения ротора к резонансным частотам Ω_{1r} и Ω_{2r} . Чем ближе частоты вращения к резонансным частотам, тем больше число обусловленности. Изменение числа обусловленности $\text{cond}(\mathbf{A}(\Omega_1, \Omega_2))$ в зависимости от угловых скоростей вращения при $\Omega_{1r} = 8,8$ с⁻¹ и $\Omega_{2r} = 433$ с⁻¹ показано на рис. 3.

Зависимость числа обусловленности от частот вращения позволяет сформулировать задачу о поиске оптимальных частот Ω_1, Ω_2 , на которых необходимо производить балансировку.

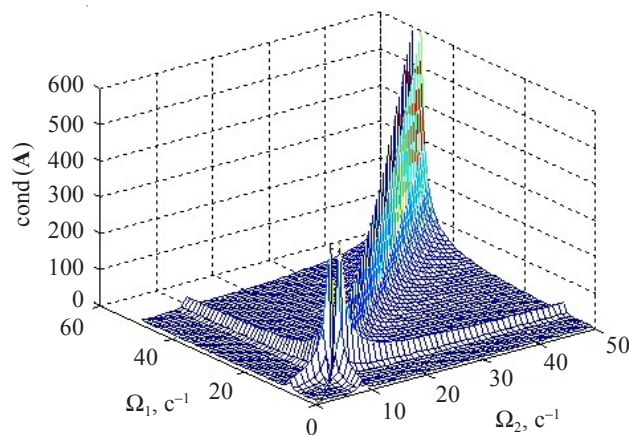


Рис. 3

Методика выбора оптимальных частот вращения ротора для его балансировки

Для определения дисбалансов ротора необходимо произвести измерение его вибраций на двух частотах вращения ротора.

Если частоты, на которых производится измерение смещений ротора, далеки от резонансных частот ротора, то смещения ротора \bar{x} малы и при этом относительная погрешность измерений $\|\Delta\bar{x}\|/\|\bar{x}_0\|$ велика. Следовательно, погрешности определения дисбалансов также велики.

Если частоты измерения смещений берутся вблизи резонансных частот, то смещения ротора \bar{x} велики, а относительная погрешность мала, но при этом число обусловленности принимает большие значения и погрешности определения дисбалансов вновь будут большими.

Может быть предложена следующая методика балансировки ротора [10]. За одну раскрутку ротора до высоких скоростей вращения последовательно измеряются смещения ротора и находятся соответствующие относительные погрешности измерения как функции Ω . Затем формируется множество векторов $x = (x_{1\Omega_1}, x_{2\Omega_1}, x_{1\Omega_2}, x_{2\Omega_2})^T$ и определяются частоты вращения ротора, при которых имеет место $\min(\text{cond}(A(\Omega_1, \Omega_2))\|\Delta\bar{x}\|/\|\bar{x}_0\|)$, абсолютная погрешность измерений определяется шкалой измерительного прибора. Найденные частоты используются при определении дисбалансов ротора.

Можно показать, что обратная задача о нахождении смещений ротора по известным дисбалансам также плохо обусловлена вблизи резонансных частот.

В обсуждении постановки задачи и результатов исследования принимал активное участие Геннадий Григорьевич Денисов.

Список литературы

1. Воронков В.С., Денисов Г.Г. Методика балансировки жесткого ротора в двух радиальных упругих подшипниках. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2006. №4. С. 32–39.
2. Щепетильников В.А. *Основы балансировочной техники*. Т. 2. М.: Машиностроение, 1975. 679 с.

3. Рогов В.А., Позняк Г.Г. Теоретические основы балансировки роторов турбокомпрессоров. *Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования*. 2003. Вып. 1. С. 73–84.
4. Никифоров А.Н. Состояние проблемы уравнивания роторов. *Вестник научно-технического развития*. 2013. №4(68). С. 20–28.
5. Николаев М.Я., Кирюшин А.А., Овчинников В.Ф., Фадеева Е.В., Митенков Ф.М., Кодочигов Н.Г., Белов С.Е., Соловьев С.А., Друмов И.В., Знаменский Д.С. Балансировка гибкого вертикального ротора на электромагнитном подвесе. *Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского*. 2011. №4-1. С. 134–139.
6. *Балансировка вращающихся тел. ГОСТ 19534-76*. 1974. С. 49.
7. *Машины и технологическое оборудование. Системы классов точности балансировки. ГОСТ-22061-76*. С. 22.
8. *Методические указания по балансировке жестких роторов (к ГОСТ 22061-76)*. С. 120.
9. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Теоретическая физика. Т. 1. Механика*. М.: Наука, 1965. 204 с.
10. Денисов Г.Г., Ляхов А.Ф. Проблемы вычислительной обусловленности балансировки жесткого ротора. *Труды XI Всероссийского съезда по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики*. Казань, 20–24 авг. 2015. С. 1163–1165.

References

1. Voronkov V.S., Denisov G.G. Metodika balansirovki zhestkogo rotora v dvukh radial'nykh uprugikh podshipnikakh [The technique of balancing a rigid rotor in two radial elastic bearings]. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin* [Journal of Machinery Manufacture and Reliability]. 2006. No 4. P. 32–39 (In Russian).
2. Schepetilnikov V.A. *Osnovy balansirovochnoy tekhniki* [Fundamentals of Balancing Technology]. Vol. 2. Moscow. Mashinostroenie Publ. 1975. 679 p. (In Russian).
3. Rogov V.A., Poznyak G.G. Teoreticheskie osnovy balansirovki rotorov turbokompressorov [Theoretical basis of the turbocompressor rotor balancing]. *Vestnik RUDN. Seriya: Inzhenernye issledovaniya* [Messenger PFUR Bulletin. Series: Engineering Studies]. 2003. Iss. 1. P. 78–84 (In Russian).
4. Nikiforov A.N. Sostoyanie problemy uravnoveshivaniya rotorov [State of balancing rotors problems]. *Vestnik nauchno-tekhnicheskogo razvitiya* [Journal of Scientific and Technological Development]. 2013. No 4(68). P. 20–28 (In Russian).
5. Nikolayev M.Ya., Kiryushin A.A., Ovchinnikov V.F., Fadeeva E.V., Mitenkov F.M., Kodochigov N.G., Belov S.E., Solovyov S.A., Drumov I.V., Znamensky D.S. Balansirovka gibkogo vertikalnogo rotora na elektromagnitnom podvese [Balancing a flexible vertical electromagnetic-suspension rotor]. *Vestnik NNGU im. N.I. Lobachevskogo* [Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod]. 2011. No 4-1. P. 134–139 (In Russian).
6. *Balansirovka vrashchayushchikhsya tel. GOST 19534-76* [Balancing of Rotating Bodies. GOST 19534-76]. 1974. P. 49 (In Russian).
7. *Mashiny i tekhnologicheskoe oborudovanie. Sistemy klassov tochnosti balansirovki. GOST-22061-76* [Machines and Technological Equipment. Class System Balancing Accuracy. GOST 22061-76]. P. 22 (In Russian).
8. *Metodicheskie ukazaniya po balansirovke zhestkikh rotorov (k GOST 22061-76)* [Methodical Instructions for Balancing Rigid Rotors (to GOST 22061-76)]. P. 120 (In Russian).
9. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 1. Mekhanika* [Theoretical Physics. Vol. 1. Mechanics]. Moscow. Nauka Publ. 1965. 204 p. (In Russian).
10. Denisov G.G., Lyakhov A.F. Problemy vychislitel'noy obuslovlennosti balansirovki zhestkogo rotora [Problems of computational conditionality of balancing a rigid rotor]. *Trudy XI Vserossiyskogo s'ezda po fundamentalnym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki* [Proceedings of the XIth All-Russian Congress on Basic Problems of Theoretical and Applied Mechanics]. Kazan. 20–24.08.2015. P. 1163–1165 (In Russian).

COMPUTATIONAL CONDITIONALITY OF THE ROTOR BALANCING PROBLEM

Lyakhov A.F.

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation

The problem of balancing a rigid rotor in two radial elastic bearings is analyzed. The misbalance parameters of a rotor are identified based on the solution of an inverse problem of dynamics. The misbalance parameters of the rotor are found using measured radial oscillations of the rotor. The problem of identification of misbalance parameters is shown to be a weakly conditioned problem, that is, small inaccuracies in measuring rotor vibrations result in large inaccuracies in determining the misbalance parameters.

Near the resonance rotation frequencies of the rotor, the condition number of the problem is the highest, whereas relative inaccuracies of the measurements are small; farther from the resonance rotation frequencies the condition number is lower, whereas relative inaccuracies are large. A new methodology for choosing rotation frequencies of the rotor is introduced, which makes it possible to minimize inaccuracies in determining rotor misbalance parameters.

Keywords: balancing, rigid rotor, radial elastic bearings, resonance frequencies, inverse dynamic problem, weakly conditioned problem.