

УДК 539.37

КРИВЫЕ ПОЛЗУЧЕСТИ И РЕЛАКСАЦИИ НЕЛИНЕЙНОГО ОПРЕДЕЛЯЮЩЕГО СООТНОШЕНИЯ Ю.Н. РАБОТНОВА ДЛЯ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧНЫХ МАТЕРИАЛОВ

© 2016 г.

Хохлов А.В.

НИИ механики Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация

andrey-khokhlov@ya.ru

Поступила в редакцию 03.10.2016

Аналитически изучены общие свойства семейств кривых релаксации, ползучести и обратной ползучести, порожденных нелинейным определяющим соотношением Работнова с двумя произвольными материальными функциями в одноосном случае. Выявлены необходимые ограничения на обе материальные функции, обеспечивающие адекватное моделирование типичных кривых ползучести и релаксации вязкоупругопластичных материалов. Указаны те эффекты, которые соотношение Работнова принципиально не может описать ни при каких материальных функциях (например, зависимость формы кривых релаксации от уровня деформации), и те, которые могут быть описаны при определенных дополнительных ограничениях, наложенных на материальные функции (наличие точки перегиба и участков выпуклости вниз у кривых ползучести, ускоряющаяся ползучесть на третьем или первом участках кривых ползучести, полное восстановление при разгрузке, затухание памяти и т.п.). Возможности и область применимости определяющего соотношения Работнова сопоставлены с возможностями линейного интегрального соотношения вязкоупругости, которое оно обобщает.

Ключевые слова: вязкоупругопластичность, нелинейное определяющее соотношение, скорость ползучести, кривые ползучести, обратная ползучесть, разнсопротивляемость.

Введение

Определяющее соотношение Работнова [1–11] описывает одномерные процессы изотермического деформирования структурно-стабильных вязкоупругопластичных материалов, связывая историю напряжения $\sigma(t)$ и деформации $\varepsilon(t)$ в данной точке тела:

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \int_0^t \Pi(t - \tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) \varphi'(\varepsilon(\tau)) d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Здесь $\Pi(t)$, $R(t)$ – функции ползучести и релаксации, а $\varphi(u)$ – дополнительная материальная функция (МФ), введенная Работновым [1–3]. Входные процессы ($\sigma(t)$ или $\varepsilon(t)$) предполагаются кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими на любом отрезке.

Определяющее соотношение (ОС) (1) обобщает линейное ОС вязкоупругости

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Если $\Pi(0+) \neq 0$ (модель регулярна), то $R(0+) < \infty$ и на линеале непрерывных кусочно-гладких при $t \geq 0$ функций взаимно обратные операторы (1) представимы в виде

$$\varphi(\varepsilon(t)) = \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau, \quad \sigma(t) = R(0)\varphi(\varepsilon(t)) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varphi(\varepsilon(\tau)) d\tau. \quad (3)$$

ОС (3) с регулярной функцией ползучести $\Pi(x)$ было предложено Ю.Н. Работновым еще в 1948 г. [1]. В [1–3] ОС (3) называлось «соотношением наследственной теории ползучести» и «пластичности», в [4] было дано название «нелинейная теория наследственности». В монографии [8] Работнов писал о нем: «При формулировке теории автор пытался построить теорию наследственной *пластичности*, применимую для описания существенно необратимой ползучести материалов при высоких температурах...» В англоязычных публикациях ОС (1) называется уравнением квазилинейной вязкоупругости (QLV) [12–21], а его автором считается Y.C. Fung [12, 14].

В [1–11] ОС (1) прилагалось к описанию поведения стеклопластиков, графита, металлов и сплавов, а в [12–21] – связок, сухожилий и других биологических тканей (см. подробно библиографию в [22, 23]). При моделировании МФ $\varphi(u)$ определялась численно в отдельных точках, не использовались аналитические представления для $\varphi(u)$ (за исключением многочлена четвертого порядка [6, 8]). Тщательное аналитическое изучение общих свойств основных теоретических квазистатических кривых (деформирования, релаксации, ползучести при базовых программах нагружения) ОС (1) с произвольными МФ и необходимых ограничений на МФ, систематическое исследование комплекса моделируемых эффектов в зависимости от характеристик МФ, границ области применимости ОС (1) и их маркеров (за исключением требования подобия изохронных кривых ползучести [1–8]) до сих пор не проведены.

Цель настоящей статьи – восполнить эти пробелы, выявить возможности и преимущества ОС (1) (как по сравнению с линейным ОС вязкоупругости, так и с более сложными и громоздкими нелинейными ОС) и способствовать расширению и уточнению сферы его обоснованного применения в моделировании деформирования и длительной прочности вязкоупругопластичных материалов, обладающих выраженной нелинейной наследственностью и скоростной чувствительностью (полимеров, композитов, пен, керамик, асфальтобетонов, твердых топлив, титановых сплавов, нержавеющей стали, биологических тканей и т.п.). К ОС (1) применена технология качественного анализа определяющих соотношений для вязкоупругопластичных материалов, разработанная ранее автором в цикле работ [22–30], в которых подробно изучены два новых нелинейных ОС с двумя МФ для вязкоупругопластических материалов, учитывающие историю деформирования и нагружения, нелинейная модель типа Максвелла с двумя МФ и линейное интегральное ОС вязкоупругости (2). Выведены также в общем виде [22, 23] уравнения семейств всех основных квазистатических кривых ОС (1): семейств диаграмм деформирования при постоянных скоростях деформации или нагружения, кривых ползучести при ступенчатом нагружении (в частности, обратной ползучести), кривых ползучести и релакса-

ции с произвольной начальной стадией нагружения до заданного уровня ($\bar{\varepsilon}$ или $\bar{\sigma}$) и др. Анализ позволил указать характерные особенности поведения теоретических кривых ОС (1), которые могут служить индикаторами применимости ОС, удобными для экспериментальной проверки. Подобный качественный анализ всех семейств теоретических кривых ОС – важная стадия аттестации любого ОС, создания своеобразного паспорта-руководства модели, фундамент для разработки способов идентификации, верификации и численной реализации.

В статье приняты следующие сокращения и обозначения: МФ – материальные функции ОС (1); $(\omega_-; \omega_+)$ и $(\underline{x}; \bar{x})$ – области определения и значений МФ $\varphi(u)$; ФП – функция ползучести, КП – кривая ползучести; $h(t)$ – функция Хевисайда, $\delta(t)$ – дельта-функция; РеМ – регулярные модели (с ФП: $\Pi(0) \neq 0$); СиМ – сингулярные модели ($R(t)$ содержит слагаемое $\eta\delta(t)$).

1. Ограничения на материальные функции соотношения Работнова

Из трех МФ в ОС (1) только две независимы, так как функции релаксации и ползучести связаны условием взаимнообратности операторов (1), отображающих друг в друга функции $\sigma(t)$ и $e(t) = \varphi(\varepsilon(t))$:

$$\int_0^t \Pi(t - \tau) R(\tau) d\tau = t.$$

Линейное ОС вязкоупругости (2) содержит лишь одну независимую МФ $\varphi(u) = u$. Соотношением (2) задаются, в частности, все модели, собранные из линейных пружин и демпферов посредством параллельных и последовательных соединений (ФП классических моделей будут использованы для иллюстрации общих свойств КП ОС (1)). Схемы и названия всех двух-, трех- и четырехзвенных моделей (в терминологии нет единства) приведены в [24]. Можно доказать, что множество всех несократимых n -звенных моделей распадается на два класса эквивалентности: РеМ- n и СиМ- n (структурно различные модели эквивалентны, если задаются одинаковыми семействами ФП). В частности, эквивалентны друг другу трехзвенные РеМ Пойнтинга – Томсона и Кельвина [26], а все четыре РеМ-4 [24] эквивалентны модели стандартного тела (последовательному соединению моделей Максвелла и Фойгта). Свойства основных теоретических кривых линейного ОС (2) с произвольной ФП, необходимые математические и феноменологические ограничения на функции ползучести и релаксации проанализированы автором в цикле работ [24–26].

На функции ползучести и релаксации в ОС (1) наложим те же минимальные первичные ограничения, что и в линейной теории: $\Pi(t)$ и $R(t)$ должны быть положительными и дифференцируемыми на интервале $(0; \infty)$, $\Pi(t)$ – возрастающей выпуклой вверх [25], а $R(t)$ – убывающей и выпуклой вниз на $(0; \infty)$ (в точке $t = 0$ $R(t)$ может иметь интегрируемую особенность или δ -сингулярность). Из этих условий, в частности, следует существование пределов $\Pi(0+) \geq 0$, $\Pi(+\infty) \geq 0$ и $R(+\infty) \geq 0$ [27, 30].

Например, семейство ФП

$$\Pi(t) = \alpha + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in [0, \beta], \quad (4)$$

порождает все РеМ-4 при $\gamma \in (0; \beta)$, $\alpha, \beta > 0$, а при $\alpha = 0$ – все РеМ-3. Так как $\Pi(0) = \beta - \gamma$, то ФП (4) порождает СиМ, когда $\gamma = \beta$: при $\lambda\beta = 0$ – ньютоновскую

жидкость ($R = \eta\delta(t)$), при $\alpha = 0$ – модель Фойгта, при $\alpha > 0$ получаются все СиМ-3 ($R = \eta\delta(t) + Ee^{-\mu t}$). При $\gamma = 0$ семейство ФП (4) дает модель Максвелла.

На МФ $\varphi(u)$ в ОС (1) необходимо наложить следующие минимальные первичные требования [22, 23]: $\varphi(u)$ непрерывно дифференцируема и строго возрастает на $(\omega_-; 0) \cup (0; \omega_+)$ (возможны случаи $\omega_- = -\infty$, $\omega_+ = +\infty$ и $\varphi'(0) = +\infty$), причем $\varphi(0+) = \varphi(0-) = 0$ (иначе входному процессу $\varepsilon(t) \equiv 0$ соответствует ненулевой отклик $\sigma(t)$). Для материалов с одинаковым поведением при растяжении и сжатии $\omega_- = -\omega_+$ и МФ $\varphi(u)$ нечетна. Из возрастания $\varphi(u)$ следует существование обратной функции $\Phi = \varphi^{-1}$ на промежутке $D_\Phi = (\underline{x}; \bar{x})$, где $\bar{x} = \sup \varphi(u) = \varphi(\omega_+ - 0)$, $\underline{x} = -\inf \varphi(u) = \varphi(\omega_- + 0)$, и обратимость ОС (1). Величины \bar{x} и \underline{x} – важные характеристики МФ φ и Φ , существенно влияющие на поведение теоретических кривых ОС (1) [22, 23]. Если $\bar{x} < +\infty$, то при $\omega_+ = \infty$ $\Phi(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = \bar{x}$, а при $\omega_+ < \infty$ $\Phi(x)$ непрерывно продолжается в точку $\bar{x} : \Phi(\bar{x}) = \omega_+$. Если $\underline{x} > -\infty$, то при $\omega_- = -\infty$ $\Phi(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = \underline{x}$, а при $\omega_- > -\infty$ $\Phi(x)$ непрерывно продолжается в точку $\underline{x} : \Phi(\underline{x}) = \omega_-$.

Для задания МФ φ или Φ удобно, например, пятипараметрическое семейство функций

$$y(x) = A \left[\vartheta \left(\frac{x}{C} \right)^n + (1 - \vartheta) \left(\frac{x}{C} \right)^m \right], \quad x \geq 0, n > 1, m < 1, \vartheta \in [0; 1], A, C > 0. \quad (5)$$

При любых значениях параметров (кроме $\vartheta = 0; 1$) $y(0) = 0, y'(0) = \infty, y(C) = A$, функция (5) возрастает и имеет точку перегиба

$$\tilde{x} = Cq^{1/(n-m)}, \quad q = m(1-m)(1-\vartheta)[n(n-1)\vartheta]^{-1} \quad (6)$$

($\tilde{x} = C[(\vartheta^{-1} - 1)n^{-3}]^{n/(n^2-1)}$ при $m = n^{-1}$). Весовой параметр $\vartheta \in (0; 1)$ позволяет совместить точку перегиба \tilde{x} с любой точкой $x > 0$ и моделировать кривые ползучести с тремя стадиями; семейство (5) убывает по ϑ на интервале $x \in (0; C)$ и возрастает на интервале $(C; \infty)$. На рис. 1 приведены графики функций (5) с $m = 1/n, n = 3, A = C = 1$ и $\vartheta = 0; 0,25; 0,5; 0,75; 1$ (черные кривые) и графики при $n = 5$ и $\vartheta = 0; 0,5; 1$ (голубые кривые). С ростом n производные $\varphi(x)$ в окрестностях точек $x = 0$ и $x = 1$ возрастают.

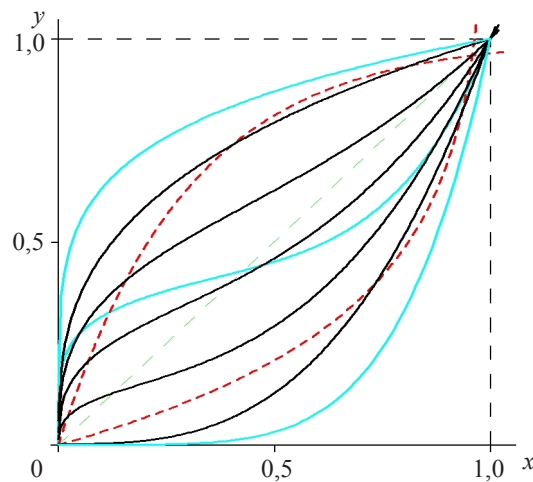


Рис. 1

Красные штриховые линии на рис. 1 – графики взаимно обратных МФ

$$\Phi(x) = A \ln \left[\frac{\sigma_*}{\sigma_* - x} \right], \quad x \in [0; \bar{x}) \quad (\bar{x} = \sigma_* < \infty, \omega_+ = \infty), \quad \varphi(u) = \sigma_* (1 - e^{-u/A}), \quad u \geq 0, \quad (7)$$

при $\sigma_* = 1, A = 0,25$. Последняя пара МФ интересна тем, что приводит к дробно-линейной зависимости для скорости ползучести от напряжения: $V(\sigma) = A\sigma/(\sigma_* - \sigma)$, $x \in [0; \sigma_*)$ [31, 22] и показывает, что конечность \bar{x} вовсе не экзотический случай.

Конечность ω_+ или \bar{x} (ω_- или \underline{x}) означает, что, благодаря такому выбору МФ, в ОС (1) встроен критерий разрушения при растяжении или сжатии, обеспечивающий обрыв определенных теоретических кривых (ползучести, деформирования и др.) в некоторый момент времени и позволяющий моделировать длительную прочность. Последняя тема не рассматривалась в литературе.

2. Кривые релаксации

Кривые релаксации, порождаемые ОС (1) при мгновенном деформировании $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon}h(t)$ до уровня $\bar{\varepsilon} \in (\omega_-; \omega_+)$, имеют вид $\sigma(t, \bar{\varepsilon}) = \varphi(\bar{\varepsilon})R(t)$, $t > 0$.

Кривые релаксации с $\bar{\varepsilon} > 0$ убывают и выпуклы вниз по t и возрастают по $\bar{\varepsilon}$ (то есть ОС (1) воспроизводит основные качественные свойства типичных экспериментальных кривых релаксации), так как $R(t)$ убывает и выпукла вниз, а $\varphi(u)$ возрастает. Кривые релаксации подобны и имеют точно такую же форму, как и у линейного ОС (2), но их зависимость от $\bar{\varepsilon}$ уже не линейна, а задается МФ φ . Существенно, что МФ φ не влияет на форму кривых и на скорость (время, спектр) релаксации. Подобие кривых релаксации ОС (1) – важный индикатор применимости ОС (1). Разделение переменных в уравнении кривых релаксации позволяет определить обе МФ по нескольким экспериментальным кривым релаксации материала для разных $\bar{\varepsilon}$ (если наблюдается их подобие).

3. Общие свойства кривых ползучести

Кривые ползучести ОС (1) при мгновенном нагружении $\sigma(t) = \bar{\sigma}h(t)$ имеют вид:

$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}) = \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) \quad \text{при} \quad \underline{x} < \bar{\sigma}\Pi(t) < \bar{x}, \quad (8)$$

где $\bar{x} = \sup \varphi(u)$, $\underline{x} = \inf \varphi(u)$ – верхняя и нижняя границы области определения $\Phi(x)$.

Семейство КП (8) возрастает по $\bar{\sigma}$ (так как Φ возрастает), а при любом $\bar{\sigma} > 0$ (будем рассматривать этот случай) КП возрастает по t на всем промежутке, где $\bar{\sigma}\Pi(t) < \bar{x}$. Если $\bar{x} = \infty$ (как для линейного ОС (2)), то КП с $\bar{\sigma} > 0$ определены при всех $t \geq 0$. Если же $\bar{x} < \infty$, то $\bar{\sigma}\Pi(t) \in D_\Phi$ только при $\bar{\sigma} < \bar{x}/\Pi(0)$ и $\Pi(t) < \bar{x}/\bar{\sigma}$; это означает, что КП существует только для напряжений $\bar{\sigma} < \sigma_+$, $\sigma_+ = \bar{x}/\Pi(0)$ и обрывается в момент t_* , удовлетворяющий уравнению $\Pi(t_*) = \bar{x}/\bar{\sigma}$, если $\bar{\sigma} > \bar{x}/\Pi(\infty)$ (если $\Pi(\infty) < \infty$, то КП с $\bar{\sigma} < \bar{x}/\Pi(\infty)$ не обрывается).

Таким образом, если $\bar{x} < \infty$ и $\Pi(0) \neq 0$ (модель регулярна), то параметр $\sigma_+ = \bar{x}/\Pi(0) = E\bar{x}$ имеет смысл предела (мгновенной) прочности при растяжении, и в ОС (1) уже встроен критерий разрушения при ползучести. Если $\omega_+ < \infty$, разрушение при растяжении происходит по достижению критической деформации $\varepsilon_* = \Phi(\bar{x}) = \omega_+$. Если же $\Phi(\bar{x}) = \infty$ (то есть $\omega_+ = +\infty$, и $\varphi(u)$ имеет горизонтальную асимптоту $y = \bar{x}$), то любая КП для $\bar{\sigma} > \bar{x}/\Pi(\infty)$ имеет вертикальную асимптоту $t = t_*$, где $t_* = p(\bar{x}/\bar{\sigma})$, $p(x)$ – обратная функция к $\Pi(t)$ ($x \in [\Pi(0); \Pi(\infty))$). Если

$\Pi(\infty) < \infty$ и $\bar{\sigma} < \bar{x}/\Pi(\infty)$, то уравнение $\Pi(t) = \bar{x}/\bar{\sigma}$ решений не имеет, КП определена при всех $t \geq 0$. Поэтому уравнение кривой длительной прочности при растяжении: $t_* = p(\bar{x}/\bar{\sigma})$, $E_\infty \bar{x} < \bar{\sigma} < E\bar{x}$, где $E = 1/\Pi(0)$, $E_\infty = 1/\Pi(\infty)$ – мгновенный и длительный модули диаграмм деформирования линейного ОС (2) [24].

В случае $\bar{\sigma} < 0$ надо заменить в рассуждениях \bar{x} , ω_+ и σ_+ на \underline{x} , ω_- и σ_- , где $\sigma_- = \underline{x}/\Pi(0)$ – предел прочности на сжатие. КП существует только для напряжений $\sigma_- < \bar{\sigma} < \sigma_+$; если $\underline{x} > -\infty$, то КП с $\bar{\sigma} < 0$ обрывается в момент t^* , удовлетворяющий уравнению $\Pi(t^*) = \underline{x}/\bar{\sigma}$, если $|\bar{\sigma}| > \underline{x}/\Pi(\infty)$ (если $\Pi(\infty) < \infty$, то КП с $|\bar{\sigma}| < \underline{x}/\Pi(\infty)$ не обрывается и определена при всех $t \geq 0$).

Из (8) следует, что изохронные КП $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\Pi(t)$ подобны; это один из необходимых признаков применимости ОС (1). Ю.Н. Работнов выделял его: «Подобие изохронных кривых для металлов было отмечено как некий эмпирический факт; именно этот факт был положен в основу при формулировке закона нелинейной наследственности» [8]; в [1–8] подобие изохронных КП материала рассматривалось как *достаточное* условие применимости ОС (3), а не только необходимое. Если $\Pi(0) \neq 0$, то при $t \rightarrow 0$ семейство изохронных КП сходится к кривой $\sigma = \varphi(\varepsilon)/\Pi(0)$, совпадающей с мгновенной диаграммой деформирования, к которой сходятся семейства диаграмм деформирования при стремлении скоростей деформирования или нагружения к бесконечности [23], а если $\Pi(0) = 0$ – сходится к вертикальной прямой $\varepsilon = 0$.

Из (8) вытекает способ идентификации МФ: по экспериментальным КП для разных значений $\bar{\sigma}$ строится изохронная КП $\sigma(\varepsilon)$ (при фиксированном t) и по ней определяется МФ $\varphi(\varepsilon) = \sigma(\varepsilon)\Pi(t)$ с точностью до постоянного множителя, а потом из (8) определяется ФП по одной КП $\varepsilon(t)$: $\Pi(t) = \varphi(\varepsilon(t))/\bar{\sigma}$. В [1–8] рассматривались только регулярные модели с $\Pi(0) = 1$, и потому МФ φ определялась «экстраполяцией» семейства изохронных КП при $t \rightarrow 0$.

Из (8) находится скорость ползучести:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \bar{\sigma} \dot{\Pi}(t) \Phi'(\bar{\sigma} \Pi(t)). \quad (9)$$

МФ $\varphi(u)$, в принципе, можно найти и по известной зависимости скорости ползучести от напряжения: если $\dot{\varepsilon}(\bar{\sigma}) = r(\bar{\sigma})$ (где $r'(x) > 0$ и $r''(x) > 0$), то Φ находится из уравнения $x\Phi'(x) = r(x)$ с начальным условием $\Phi(0) = 0$. Например, для дробно-линейной функции Шестерикова [31] $r(x) = Ax(\sigma_* - x)^{-1}$, $x \in [0; \sigma_*]$ (σ_* – предел прочности), имеем $\Phi'(x) = A(\sigma_* - x)^{-1}$ и получаем МФ вида (7).

Если $\bar{\sigma}\Pi(t) \in D_\Phi$ при всех $t > 0$, то есть $\underline{x} < \bar{\sigma}\Pi(\infty) < \bar{x}$, то скорость ползучести (9) стремится при $t \rightarrow \infty$ к пределу $V(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}v\Phi'(\bar{\sigma}\Pi(\infty))$, где $v = \dot{\Pi}(\infty)$ (если $\bar{x} < \infty$ и $\bar{\sigma} > \bar{x}/\Pi(\infty)$, то переход к пределу $t \rightarrow \infty$ в (9) невозможен, ибо КП с $\bar{\sigma} > 0$ не определена при $t > t_*$; если $\bar{x} = +\infty$ и $\underline{x} = -\infty$, то любая КП определена при всех $t > 0$). Существование конечного предела $v = \dot{\Pi}(\infty)$ следует из ограничений, наложенных на ФП: $\dot{\Pi}(t) \geq 0$ и $\dot{\Pi}(t)$ убывает на луче $t > 0$ (см. п. 1) и потому имеет предел $v \geq 0$ при $t \rightarrow \infty$ [25]. Предел $V(\bar{\sigma})$ конечен, если ФП ограничена или $\Phi'(\infty) < \infty$; если же ни одно из этих условий не выполнено, то есть $\Pi(\infty) = \infty$ и $\Phi'(\infty) = \infty$, то $V(\bar{\sigma}) = \infty$ (скорость ползучести неограниченно нарастает при больших t). Для линейного ОС (2) $\Phi(x) = x$ и скорость ползучести всегда стремится при $t \rightarrow \infty$ к конечному пределу $V(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}v$ [25], то есть в случае $v \neq 0$ ползучесть всегда выходит на установившийся режим.

Итак, из наличия МФ $\varphi(x)$ в ОС (1) вытекают *качественные отличия свойств его КП с $\bar{\sigma} > 0$ по сравнению с линейным ОС:*

1) зависимость КП и скорости ползучести от $\bar{\sigma}$ не линейная (изохронные КП не прямолинейны);

2) КП не обязаны быть выпуклыми вверх, возможно наличие точек перегиба и моделирование КП со всеми тремя стадиями (в [25] доказано, что КП линейного ОС вязкоупругости всегда выпуклы вверх на всем луче $t > 0$, и потому линейное ОС не способно описывать стадию ускоряющейся ползучести); для нелинейного ОС возможен случай стремления скорости ползучести к бесконечности как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow t_*$;

3) если $\bar{x} < +\infty$, то в ОС (1) встроены критерий разрушения, обеспечивающий обрыв КП с $\bar{\sigma} > 0$ и позволяющий моделировать длительную прочность при растяжении, а если $\bar{x} > -\infty$ – при сжатии.

Исследуем выпуклость КП (8) с $\bar{\sigma} > 0$

$$\ddot{\epsilon}(t) = \bar{\sigma} \ddot{\Pi}(t) \Phi'(\bar{\sigma} \Pi(t)) + \bar{\sigma}^2 \dot{\Pi}^2(t) \Phi''(\bar{\sigma} \Pi(t)). \quad (10)$$

Первое слагаемое в (10) отрицательно, знак второго совпадает со знаком $\Phi''(x)$. Если $\Phi''(x) \leq 0$ на D_Φ (то есть $\phi''(u) \geq 0$ на $[0; \omega_+)$), то $\ddot{\epsilon}(t) \leq 0$ при $t > 0$ и КП выпукла вверх, а если есть интервал с $\Phi''(x) > 0$ (то есть $\phi''(u) < 0$), то на интервале времени, где $\Phi''(\bar{\sigma} \Pi(t)) > 0$, возможно $\ddot{\epsilon}(t) > 0$, то есть КП (8) может иметь точки перегиба и участки выпуклости вниз. Абсциссы точек перегиба \tilde{t} – решения уравнения $\ddot{\epsilon}(t) = 0$, то есть

$$-\frac{\ddot{\Pi}(t)}{(\dot{\Pi}(t))^2} = \bar{\sigma} \frac{\Phi''(\bar{\sigma} \Pi(t))}{\Phi'(\bar{\sigma} \Pi(t))}. \quad (11)$$

Пример 1. Для МФ $\Phi(x) = Ax^n$, $n > 0$ (то есть $\phi(u) = (u/A)^{1/n}$, $\omega_+ = \infty$, $\bar{x} = \infty$), имеем $\epsilon = A \bar{\sigma}^n (\Pi(t))^n$ (в этом случае КП (8) с разными $\bar{\sigma}$ подобны, чего нет в общем случае), $\dot{\epsilon}(t) = An \bar{\sigma}^n \dot{\Pi}(t) (\Pi(t))^{n-1}$ (степенная зависимость скорости ползучести от $\bar{\sigma}$), и

$$\ddot{\epsilon}(t) = An \bar{\sigma}^n (\Pi(t))^{n-2} y(t), \quad y(t) = \ddot{\Pi}(t) \Pi(t) + (n-1) (\dot{\Pi}(t))^2.$$

Неравенство $\ddot{\epsilon}(t) > 0$ равносильно $y(t) > 0$, а (11) равносильно $y(t) = 0$. При $n \leq 1$ всегда $y(t) \leq 0$ (так как $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$), и КП выпукла вверх на всей полуоси. При $n > 1$ слагаемые в $y(t)$ имеют разные знаки и могут появиться точки перегиба, причем параметр n управляет положением точки перегиба \tilde{t} : для любого фиксированного $t = t_*$ (с $\ddot{\Pi}(t_*) \neq 0$) можно найти $n > 1$ такое, что $y(t_*) = 0$, то есть КП (8) будет иметь перегиб в точке $t = t_*$ (либо будет прямолинейной в ее окрестности). Действительно, $n_* = 1 - \ddot{\Pi}(t_*) \Pi(t_*) (\dot{\Pi}(t_*))^{-2}$ обеспечивает $y(t_*) = 0$, а так как $\ddot{\Pi}(t_*) \Pi(t_*) < 0$ (в силу требований к ФП), то $n_* > 1$. Для ФП модели Максвелла ($\Pi = \alpha t + \beta$) $y(t) = (n-1)\alpha^2$ и $\ddot{\epsilon}(t) > 0$ при всех $t > 0$, если $n > 1$. Для семейства ФП (4) в сочетании с $\Phi(x) = Ax^n$ имеем $y(t) = -\gamma \lambda^2 e^{-\lambda t} (\alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}) + (n-1)(\alpha + \gamma \lambda e^{-\lambda t})^2$. При $t \rightarrow \infty$ $y(\infty) = (n-1)\alpha^2$, при $n > 1$ и $\alpha > 1$ будет $y(\infty) = 0$, следовательно, при больших t КП нелинейных моделей с ФП РеМ-4, СиМ-3 и РеМ-2 (у них $\alpha > 0$) выпуклы вниз. При $\alpha = 0$ (для ФП РеМ-3 и СиМ-2, то есть моделей Кельвина и Фойгта) это не так: КП будет выпукла вверх при больших t . Для ФП РеМ-3 ($\alpha = 0$, $\gamma \neq \beta$ в (4)) $y(t) = \gamma \lambda^2 e^{-2\lambda t} (n\gamma - \beta e^{-\lambda t})$; при достаточно больших t (при $\beta e^{-\lambda t} > n\gamma$) $y(t) < 0$, то есть КП выпукла вверх (это следует и из наличия горизонтальной асимптоты у КП (8) в случае $\Pi(\infty) < \infty$); $y(t) = 0$, когда $n\gamma - \beta e^{-\lambda t} = 0$, то есть в точке $\tilde{t} = \tau \ln(n\gamma/\beta)$, где

$\tau = \lambda^{-1}$ – время ретардации. Если $\tilde{t} > 0$, то есть $n\gamma > \beta$, то $t = \tilde{t}$ – точка перегиба КП, а начальный участок КП (с $t < \tilde{t}$) выпуклый вниз. Если же $n\gamma \leq \beta$ (так как $\gamma \leq \beta$ в (4), то при $n \leq 1$ это условие выполняется, а при $n > 1$ – не обязательно), то КП выпукла вверх на всей полуоси $t \geq 0$. Для ФП модели Фойгта (при $\alpha = 0$ и $\gamma = \beta$) $\tilde{t} = \lambda^{-1} \ln n$ и потому при $n \leq 1$ КП выпукла вверх при всех $t \geq 0$, а при $n > 1$ имеет точку перегиба и выпукла вниз на отрезке $[0, \tilde{t}]$.

4. Примеры кривых ползучести ОС с различными материальными функциями

Разнообразие форм КП, которое позволяет получить вторая МФ ϕ по сравнению с КП линейного ОС (2), демонстрирует рис. 2.

На рисунке приведены кривые ползучести (8) с $\bar{\sigma} = 1$ пятнадцати нелинейных моделей вида (1), полученных сочетаниями пяти разных ФП и трех МФ $\Phi(x)$, а именно, ФП $\Pi(t) = t^{1/3}/3$ и ФП линейных моделей РеМ-4, РеМ-3, РеМ-2, СиМ-2 (ФП вида (4) с $\lambda = 0,1$ и временем ретардации $\tau = \lambda^{-1} = 10$) с каждой из трех следующих МФ:

- 1) $\Phi(x) = A[\arcsin(x/C - 1) + 0,5\pi]$ с $A = 0,5$, $C = 1$ ($\bar{x} = 2C$, $\omega_+ = \pi A$, точка перегиба $\bar{x} = C$);
- 2) $\Phi(x) = A(x/C)^3$ (КП со стрелками на рисунке);
- 3) $\Phi(x) = A \operatorname{tg}(x/C)$ с $A = 0,05$, $C = 1$, $\bar{x} = C\pi/2$ (штриховые КП).

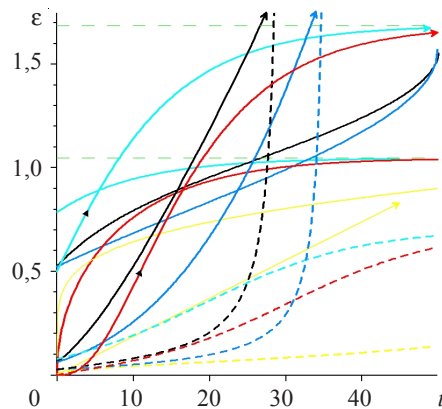


Рис. 2

Вдоль оси абсцисс отложено безразмерное время, рассматриваемые качественные свойства кривых не зависят от его масштабирования. Все три КП для ФП РеМ-4 (с $\beta = 1$, $\gamma = 0,5$, $\alpha = 0,02$) показаны черным цветом, для РеМ-3 (с $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = 0,5$) – голубым, для модели Максвелла (с $\gamma = 0$, $\alpha = 0,03$, $\beta = 1$) – синим, для модели Фойгта (с $\alpha = 0$, $\beta = \gamma = 1,5$) – красным, для степенной ФП – желтым. Поскольку ФП РеМ-3 и СиМ-2 (моделей Кельвина и Фойгта) ограничены ($\Pi(\infty) = \beta$), то при $\bar{\sigma}\beta \in D_\phi$ их КП имеют горизонтальную асимптоту $\varepsilon = \varepsilon_\infty = \Phi(\bar{\sigma}\beta)$. Так как показатель степенной ФП равен $1/3$, то КП для МФ $\Phi = A(x/C)^n$ с $n = 3$ получается прямолинейной. Для РеМ-3 со степенной МФ $\Phi = Ax^3$ (голубая КП со стрелкой) абсцисса точки перегиба КП (8) $\tilde{t} = \tau \ln(n\gamma/\beta) \approx 0,4\tau$; для СиМ-2 $\tilde{t} = \tau \ln n \approx 1,1\tau > \tau$.

Пример 2. Кривые ползучести со всеми тремя стадиями можно получить, взяв, например, $\Pi = \alpha t + \beta$ (как у модели Максвелла) и МФ Φ с точкой перегиба: $\Phi(x) = A[\arcsin(x/C - 1) + 0,5\pi]$, $x \in [0; 2C]$ ($\bar{x} = 2C$, $\omega_+ = \pi A$, точка перегиба $\tilde{x} = C$) или $\Phi(x)$ вида (5) ($\bar{x} = \infty$, параметр $\vartheta \in (0; 1)$) позволяет совместить точку перегиба (6) с любой точкой $x > 0$). Действительно, для ФП $\Pi = \alpha t + \beta$ КП (8) существует при $\bar{\sigma} \in (0; \sigma_+)$, $\sigma_+ = \bar{x}/\Pi(0) = \bar{x}/\beta$ (σ_+ – «предел прочности», если \bar{x} конечно), а формула (10) упрощается: $\ddot{\varepsilon}(t) = \bar{\sigma}^2 \alpha^2 \Phi''(\bar{\sigma}(\alpha t + \beta))$; поэтому знак $\dot{\varepsilon}(t)$ совпадает со знаком $\Phi''(\bar{\sigma}\Pi(t))$, а наличие точки перегиба $\tilde{x} < \bar{x}$ у МФ $\Phi(x)$ является критерием существования точки перегиба у КП (8) при любом $\bar{\sigma} \in (0; \tilde{x}/\beta)$ (но не при всех $\bar{\sigma} \in (0; \sigma_+)$). Абсцисса \tilde{t} точки перегиба КП находится из уравнения $\bar{\sigma}(\alpha\tilde{t} + \beta) = \tilde{x}$: $\tilde{t} = (\alpha\bar{\sigma})^{-1}\tilde{x} - \beta\alpha^{-1}$; функция $\tilde{t}(\bar{\sigma})$ убывает при $\bar{\sigma} \in (0; \sigma_+)$ (то есть с ростом $\bar{\sigma}$ точка перегиба смещается влево), $\tilde{t} > 0$ только тогда, когда $\bar{\sigma} < \tilde{x}\beta^{-1}$, а при $\bar{\sigma} \in (\tilde{x}\beta^{-1}; \bar{x}\beta^{-1})$ КП выпукла вниз или вверх на всем луче $t \geq 0$. Существенно, что значение деформации в точке перегиба $\varepsilon(\tilde{t}, \bar{\sigma}) = \Phi(\bar{\sigma}\Pi(\tilde{t})) = \Phi(\tilde{x})$ не зависит от $\bar{\sigma}$. Это полезный индикатор применимости ФП $\Pi = \alpha t + \beta$ при анализе экспериментальных КП материала и попытке описать его поведение ОС (1).

На рис. 3 приведены КП нелинейной модели, полученной из ФП модели Максвелла (с $\alpha = 0,03$, $\beta = 0,5$) введением МФ Φ вида (5) с $m = 1/n$, $n = 3$, $A = 0,5$, $C = 1$, $\vartheta = 0,5$, то есть

$$\Phi(x) = 0,25(x^3 + x^{1/3}), \quad x > 0 \quad (12)$$

при разных $\bar{\sigma} = 0,01; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$ (синие КП).

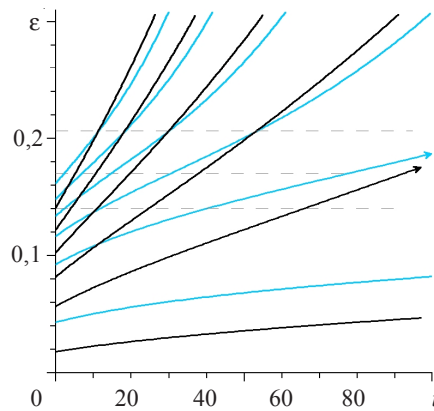


Рис. 3

МФ (12) имеет точку перегиба (6) $\tilde{x} \approx 0,29$. Критерий наличия точки перегиба у КП $\bar{\sigma} < \tilde{x}/\beta$, где $\beta = 0,5$, выполняется для $\bar{\sigma} < 0,58$; при $\bar{\sigma} > 0,59$ точка перегиба исчезает, и КП выпуклы вниз на всем луче $t \geq 0$ (см. синие КП на рис. 4а). Значение деформации в точке перегиба не зависит от $\bar{\sigma}$: $\varepsilon(\tilde{t}, \bar{\sigma}) = \Phi(\tilde{x}) \approx 0,17$. Для МФ $\Phi(x)$ вида (5) с $m = 1/n$ и $n = 2$ будет $\tilde{x} = 0,25$ и значение КП в точке перегиба $\varepsilon(\tilde{t}, \bar{\sigma}) = \Phi(\tilde{x}) \approx 0,14$. КП для этой МФ при тех же $\bar{\sigma} = 0,01; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5$ показаны на рис. 3 черным цветом. Их кривизна меньше, они, фактически, прямолинейны и моделируют ползучесть с постоянной скоростью. При $n \rightarrow 1+0$ семейство функций (5) с $m = 1/n$ стремится к линейной функции $y = AC^{-1}x$ (график спрямляется, и $\tilde{x} \rightarrow C\bar{\sigma}^{-1,5}$ при $n \rightarrow 1$), то есть МФ φ (или Φ) в ОС (1) и уравнении КП (8)

«исчезает», нелинейное ОС (1) с произвольной ФП превращается в линейное ОС (2), а КП с любым фиксированным $\bar{\sigma}$ стремится к прямолинейной КП модели Максвелла $\varepsilon(t, \bar{\sigma}) = \bar{\sigma}(\alpha t + \beta)$, домноженной на A/C .

Пример 3. На рис. 4а показана зависимость от напряжения $\bar{\sigma}$ КП двух нелинейных моделей, полученных из моделей Фойгта (ФП (4) с $\alpha = 0, \lambda = 0,1, \beta = \gamma = 1,5$) и Максвелла ($\alpha = 0,03, \beta = 0,5$) в сочетании с МФ (12). Для модели Фойгта $\bar{\sigma} = 0,01; 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,1; 1,2; 1,3$ (красные КП с двумя точками перегиба), для модели Максвелла $\bar{\sigma} = 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5$ (синие КП). На КП с ФП модели Максвелла и с $\bar{\sigma} \geq 0,6$ нет точек перегиба, так как эти значения $\bar{\sigma}$ достаточно велики: для них выполнено условие

$$\bar{\sigma} > \frac{\tilde{x}}{\beta},$$

где

$$\beta = 0,5, \quad \tilde{x} = C[(9^{-1} - 1)n^{-3}]^{n/(n^2-1)} \approx 0,29.$$

На рис. 4б показана зависимость от напряжения $\bar{\sigma}$ КП двух нелинейных моделей с той же МФ (12) в сочетании с двумя степенными ФП: $\Pi(t) = t^{1/3}/3$ (желтые КП с выраженной стадией установившейся ползучести) и $\Pi(t) = t^{1/2}/5$ (черные КП со стадией ускоренной ползучести); $\bar{\sigma} = 0,01; 0,25; 0,5; 0,75; 1; 1,25; 1,5$.

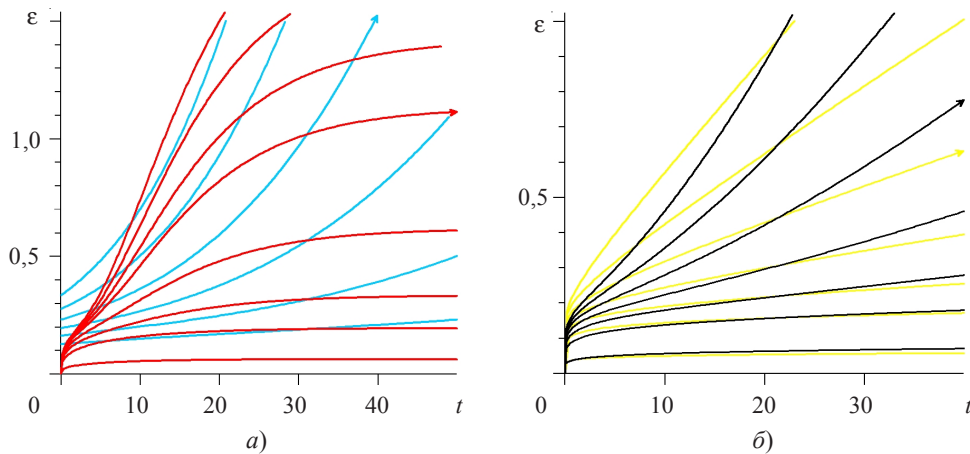


Рис. 4

5. Семейство кривых обратной ползучести

Кривая обратной ползучести (КОП) – отклик ОС (1) на программу нагружения $\sigma(t) = \bar{\sigma}[h(t) - h(t - t_1)]$, $t_1 > 0$, $\bar{\sigma} > 0$:

$$\varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_1) = \Phi(\bar{\sigma}\Pi(t)) \text{ при } t \leq t_1; \quad \varepsilon(t, \bar{\sigma}, t_1) = \Phi(\bar{\sigma}[\Pi(t) - \Pi(t - t_1)]) \text{ при } t > t_1. \quad (13)$$

Формула (13) справедлива при условии $\bar{\sigma}\Pi(t) \in D_\Phi$, то есть $\bar{\sigma}\Pi(t_1) \in D_\Phi$, или $\bar{\sigma}\Pi(t_1) < \bar{x}$ (тогда КОП (13) определена на всем луче $t \geq 0$, так как $\bar{\sigma}[\Pi(t) - \Pi(t - t_1)]$ убывает по t и $\bar{\sigma}[\Pi(t) - \Pi(t - t_1)] < \bar{\sigma}[\Pi(t_1) - \Pi(0)] \leq \bar{\sigma}\Pi(t_1) < \bar{x}$). В частности, если $\bar{x} = \infty$ (как для линейного ОС (2), например), то условие $\bar{\sigma}\Pi(t_1) \in D_\Phi$ выполнено при всех $\bar{\sigma} > 0$, $t_1 > 0$, $t \geq 0$ и КОП (13) определена на всем луче $t \geq 0$. Если же $\bar{x} < \infty$ и $\bar{\sigma}\Pi(t_1) > \bar{x}$ (или $\bar{x} < \infty$ и $\bar{\sigma}\Pi(t_1) < \bar{x}$ при $\bar{\sigma} < 0$), то второй участок КОП

(13) вообще не реализуется, так как разрушение происходит еще на первой стадии: КП обрывается в точке $t_* < t_1$ (см. п. 3).

Семейство КОП (13) возрастает по $\bar{\sigma}$ при любом $t > 0$. Для любого допустимого $\bar{\sigma} > 0$ КОП возрастает по t на всем промежутке $t \leq t_1$, где $\bar{\sigma}\Pi(t) \in D_\Phi$, и убывает (нестрого) на луче $t > t_1$ (у вязкого элемента и модели Максвелла $\varepsilon(t; \bar{\sigma}, t_1) = \Phi(\bar{\sigma}\alpha t_1) = \text{const} > 0$ при $t > t_1$, а у упругого элемента $\varepsilon(t) \equiv 0$).

Ограничение на ФП $\dot{\Pi}(t) \leq 0$, выведенное для линейного ОС [25], и возрастание МФ Φ обеспечивают монотонное убывание функции $\bar{\sigma}[\Pi(t) - \Pi(t - t_1)]$ и КОП (13) при $t > t_1$, никаких дополнительных ограничений на Φ для этого не требуется. Так как при $t \rightarrow \infty$ $\Pi(t) - \Pi(t - t_1) \rightarrow vt_1$, $v = \dot{\Pi}(\infty)$ [25], то КОП (13) стремится к пределу $\varepsilon_\infty = \Phi(\bar{\sigma}vt_1)$ (остаточной деформации). Из возрастания МФ $\Phi(x)$ и требования $\Phi(0) = 0$ следует, что $\varepsilon_\infty = 0$ лишь в случае $v = 0$ (как и для линейного ОС), то есть «полное восстановление» моделируется только при $v = 0$. При $v \neq 0$ знак ε_∞ совпадает со знаком $\bar{\sigma}$.

Если $\bar{\sigma} < 0$, то в проведенном анализе надо заменить \bar{x} и ω_+ на \underline{x} и ω_- , условие $\bar{\sigma}\Pi(t_1) < \bar{x}$ – на $\bar{\sigma}\Pi(t_1) > \underline{x}$, а выпуклость вверх – на выпуклость вниз.

Качественные отличия КОП ОС (1) от КОП линейного ОС [22]:

1) КОП (13) с $\bar{\sigma} > 0$ уже не обязана быть выпуклой вверх на интервале $(0; t_1)$ и выпуклой вниз на луче $t \geq t_1$;

2) скачки деформации $\hat{\varepsilon}(t_1)$ и скорости $\hat{\dot{\varepsilon}}(t_1)$ в точке $t = t_1$ у нелинейных регулярных моделей зависят от t_1 и не совпадают с $-\hat{\varepsilon}(0)$ и $-\hat{\dot{\varepsilon}}(0)$ (эти свойства экспериментальной КОП – индикаторы неприменимости линейного ОС).

Заключение

При минимальных первичных ограничениях на материальные функции аналитически изучены общие качественные свойства кривых релаксации, ползучести и обратной ползучести, порожденных определяющим соотношением Работнова (1). Выявлены те эффекты, которые ОС (1) принципиально не может описать ни при каких МФ (например, зависимость формы кривых релаксации от уровня деформации и др.), и те, которые могут быть описаны при определенных дополнительных ограничениях, наложенных на МФ (наличие точки перегиба и участков выпуклости вниз у кривых ползучести, ускоряющаяся ползучесть на третьем или первом участках КП, затухание памяти и т.п.). Получены формула для остаточной (предельной) деформации при обратной ползучести и критерий ее равенства нулю (критерий полного восстановления при разгрузке). Найдены необходимые признаки применимости и способы настройки ОС за счет выбора МФ и их параметров (в частности, способы позиционирования точки перегиба кривых ползучести и участка установившейся ползучести), намечены несколько способов идентификации ОС.

Анализ позволил сопоставить круг реологических явлений, которые ОС (1) может адекватно описывать, с возможностями линейного ОС вязкоупругости (2), указать как наследуемые свойства, так и дополнительные возможности нелинейного ОС (1). В частности, из наличия второй МФ $\Phi(u)$ в ОС (1) вытекают следующие принципиальные качественные отличия свойств его кривых ползучести по сравнению с линейным ОС (2):

1) зависимость кривых ползучести (и скорости ползучести) от напряжения $\bar{\sigma}$ нелинейная;

2) кривые ползучести ОС (1) с $\bar{\sigma} > 0$ не обязаны быть выпуклыми вверх, возможно наличие точек перегиба и моделирование кривых ползучести со всеми тремя стадиями; возможен случай стремления скорости ползучести к бесконечности как при $t \rightarrow \infty$, так и при $t \rightarrow t_*$ (например, для МФ (7));

3) при $\bar{x} < +\infty$ (если выбрана ограниченная сверху МФ φ , например, (7)) в ОС (1) встроены критерии разрушения, обеспечивающий обрыв кривых ползучести с $\bar{\sigma} > 0$ и позволяющий моделировать длительную прочность при растяжении, а если $\bar{x} > -\infty$ – при сжатии.

Список литературы

1. Работнов Ю.Н. Некоторые вопросы теории ползучести. *Вестник МГУ*. 1948. №10. С. 81–91.
2. Наместников В.С., Работнов Ю.Н. О наследственных теориях ползучести. *ПМТФ*. 1961. Т. 2. №4. С. 148–150.
3. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
4. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах. *Механика полимеров*. 1971. №1. С. 74–87.
5. Дергунов Н.Н., Паперник Л.Х., Работнов Ю.Н. Анализ поведения графита на основе нелинейной наследственной теории. *ПМТФ*. 1971. №2. С. 76–82.
6. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. Нелинейная ползучесть стеклопластика ТС8/3-250. *Механика полимеров*. 1971. №3. С. 391–397.
7. Работнов Ю.Н., Суворова Ю.В. О законе деформирования металлов при одноосном нагружении. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1972. №4. С. 41–54.
8. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.
9. Мельшанов А.Ф., Суворова Ю.В., Хазанов С.Ю. Экспериментальная проверка определяющего уравнения для металлов при нагружении и разгрузке. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1974. №6. С. 166–170.
10. Суворова Ю.В., Алексеева С.И. Нелинейная модель изотропной наследственной среды для случая сложного напряженного состояния. *Механика композитных материалов*. 1993. №5. С. 602–607.
11. Суворова Ю.В. О нелинейно-наследственном уравнении Ю.Н. Работнова и его приложениях. *Изв. РАН. МТТ*. 2004. №1. С. 174–181.
12. Fung Y.C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. *Biomechanics, Its Foundations and Objectives* (ed. by Fung Y.C. et al.). Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1972. P. 181–208.
13. Sauren A.A., Rousseau E.P. A concise sensitivity analysis of the quasi-linear viscoelastic model proposed by Fung. *J. Biomech. Eng.* 1983. Vol. 105. P. 92–95.
14. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York: Springer-Verlag, 1993. 568 p.
15. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments. *J. Biomech. Eng.* 2000. Vol. 122. P. 15–22.
16. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory. *J. Biomech. Eng.* 2004. Vol. 126. P. 92–97.
17. De Frate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2007. Vol. 6. No 4. P. 245–251.
18. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment. *Acta Mechanica*. 2009. Vol. 205. P. 23–33.
19. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 461 p.
20. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations:

a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. *Proc. R. Soc. A*. 2014. Vol. 470. 20140058. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058.

21. Babaei B., Abramowitch S.D., Elson E.L., Thomopoulos S., Genin G.M. A discrete spectral analysis for determining quasi-linear viscoelastic properties of biological materials. *J. Royal. Soc. Interface*. 2015. Vol. 12. 20150707. DOI: 10.1098/rsif.2015.0707.

22. Хохлов А.В. Общие свойства кривых ползучести и длительной прочности, порождаемых нелинейной теорией наследственности Ю.Н. Работнова. Отчет о НИР № 5288. НИИ механики МГУ. 2015. 74 с.

23. Хохлов А.В. Анализ свойств семейства диаграмм деформирования, порождаемых нелинейной теорией наследственности Ю.Н. Работнова. Отчет о НИР № 5332. НИИ механики МГУ. 2016. 65 с.

24. Хохлов А.В. Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации. *Проблемы прочности и пластичности*. 2015. Т. 77. №1. С. 60–74.

25. Хохлов А.В. Кривые обратной ползучести в рамках линейной вязкоупругости и необходимые ограничения на функцию ползучести. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Вып. 75. Ч. 4. С. 257–267.

26. Хохлов А.В. Качественный анализ общих свойств теоретических кривых линейного определяющего соотношения вязкоупругости. *Наука и образование*. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Электрон. журн. 2016. №5. С.187–245. Режим доступа: <http://technomag.edu.ru/doc/840650.html> (дата обращения 14.06.2016).

27. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти. *Изв. РАН. МТТ*. 2007. №2. С. 147–166.

28. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности. *Изв. РАН. МТТ*. 2008. №2. С. 140–160.

29. Хохлов А.В. Свойства нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла с двумя материальными функциями. *Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика*. 2016. №6. С. 36–41.

30. Хохлов А.В. Нелинейная модель вязкоупругопластичности типа Максвелла: свойства кривых ползучести при ступенчатых нагружениях и условия накопления пластической деформации. *Машиностроение и инженерное образование*. 2016. №3. С. 35–48.

31. Шестериков С.А., Юмашева М.А. Конкретизация уравнения состояния при ползучести. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1984. №1. С. 86–91.

References

1. Rabotnov Yu.N. Nekotorye voprosy teorii polzuchesti [Some issues in creep theory]. *Vestnik MGU [MSU Vestnik]*. 1948. No 10. P. 81–91 (In Russian).

2. Namestnikov V.S., Rabotnov Yu.N. O nasledstvennykh teoriyakh polzuchesti [On hereditary creep theories]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*. 1961. Vol. 2. No 4. P. 148–150 (In Russian).

3. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruktsiy [Creep Problems in Structural Members]*. Moscow. Nauka Publ. 1966. 752 p. (In Russian).

4. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. Prilozhenie nelineynoy teorii nasledstvennosti k opisaniyu vremennikh effektov v polymernikh materialakh [Description of time dependent effects in high polymers using the non-linear theory of heredity]. *Mekhanika polimerov [Mechanics of Composite Materials]*. 1971. No 1. P. 74–87 (In Russian).

5. Dergunov N.N., Papernik L.Kh., Rabotnov Yu.N. Analiz povedeniya grafita na osnove nelineynoy nasledstvennoy teorii [Graphite behavior analysis using the non-linear theory of heredity]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*. 1971. No. 2. P. 76–82 (In Russian).

6. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. Nelineynaya polzuchest' stekloplastika TS8/3-250 [Non-linear creep of fibre-glass reinforced plastic TS 8/3-250]. *Mekhanika polymerov [Mechanics of Composite Materials]*. 1971. No 3. P. 391–397 (In Russian).

7. Rabotnov Yu.N., Suvorova Yu.V. O zakone deformirovaniya metallov pri odnoosnom nagruzhenii [On a law of metals deforming under uni-axial loading]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1972. No 4. P. 41–54 (In Russian).
8. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoi mekhaniki tverdykh tel [Fundamentals of Hereditary Solid Mechanics]*. Moscow. Nauka Publ. 1977. 384 p. (In Russian).
9. Mel'shanov A.F., Suvorova Yu.V., Khazanov S.Yu. Eksperimental'naya proverka opredelyayushchego sootnosheniya dlya metallov pri nagruzhenii i razgruzke [Test verification of a constitutive relation for metals under loading and unloading]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1974. No 6. P. 166–170 (In Russian).
10. Suvorova Yu.V., Alekseeva S.I. Nelineynaya model' izotropnoi nasledstvennoi sredy dlya sluchaya slozhnogo napryazhonnogo sostoyaniya [A non-linear model for isotropic hereditary media under complex stress state]. *Mekhanika kompozitnykh materialov [Mechanics of Composite Materials]*. 1993. No 5. P. 602–607 (In Russian).
11. Suvorova Yu.V. O nelineyno-nasledstvennom uravnenii Yu.N. Rabotnova i yego prilozheniyakh [On the Rabotnov non-linear hereditary equation and its applications]. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 2004. № 1. P. 174–181 (In Russian).
12. Fung Y.C. Stress-strain history relations of soft tissues in simple elongation. *Biomechanics, Its Foundations and Objectives* (ed. by Fung Y.C. et al.). Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1972. P. 181–208.
13. Sauren A.A., Rousseau E.P. A concise sensitivity analysis of the quasi-linear viscoelastic model proposed by Fung. *J. Biomech. Eng.* 1983. Vol. 105. P. 92–95.
14. Fung Y.C. *Biomechanics. Mechanical Properties of Living Tissues*. New York: Springer-Verlag. 1993. 568 p.
15. Funk J.R., Hall G.W., Crandall J.R., Pilkey W.D. Linear and quasi-linear viscoelastic characterization of ankle ligaments. *J. Biomech. Eng.* 2000. Vol. 122. P. 15–22.
16. Abramowitch S.D., Woo S.L.-Y. An improved method to analyze the stress relaxation of ligaments following a finite ramp time based on the quasi-linear viscoelastic theory. *J. Biomech. Eng.* 2004. Vol. 126. P. 92–97.
17. De Frate L.E., Li G. The prediction of stress-relaxation of ligaments and tendons using the quasi-linear viscoelastic model. *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology*. 2007. Vol. 6. No 4. P. 245–251.
18. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment. *Acta Mechanica*. 2009. Vol. 205. P. 23–33.
19. Lakes R.S. *Viscoelastic Materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press. 2009. 461 p.
20. De Pascalis R., Abrahams I.D., Parnell W.J. On nonlinear viscoelastic deformations: a reappraisal of Fung's quasi-linear viscoelastic model. *Proc. R. Soc. A*. 2014. Vol. 470. 20140058. DOI: 10.1098/rspa.2014.0058.
21. Babaei B., Abramowitch S.D., Elson E.L., Thomopoulos S., Genin G.M. A discrete spectral analysis for determining quasi-linear viscoelastic properties of biological materials. *J. Royal. Soc. Interface*. 2015. Vol. 12. 20150707. DOI: 10.1098/rsif.2015.0707.
22. Khokhlov A.V. Obshchie svoystva semeystv krivykh polzuchesti i dlitel'noy prochnosti, porozdaemikh nelineynoy teoriey nasledstvennosti Yu.N. Rabotnova [General properties of creep curves families and long-term strength curves generated by the Rabotnov non-linear theory of heredity]. *Otchet o NIR № 5288. NII mekhaniki MGU im. M.V. Lomonosova*. 2015. 74 p. (In Russian).
23. Khokhlov A.V. Analiz svoystv semeystv krivykh deformirovaniya, porozdaemikh nelineynoy teoriey nasledstvennosti Yu.N. Rabotnova [Analysis of properties of stress-strain curves generated by the Rabotnov non-linear theory of heredity]. *Otchet o NIR № 5332. NII mekhaniki MGU im. M.V. Lomonosova*. 2016. 65 p. (In Russian).
24. Khokhlov A.V. Obshchie svoystva diagramm deformirovaniya lineynykh modeley vyazkouprugosti pri postoyannoy skorosti deformatsii [General properties of stress-strain curves at constant strain rate yielding from linear theory of viscoelasticity]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2015. Vol. 77. No 1. P. 60–74 (In Russian).
25. Khokhlov A.V. Krivye obratnoy polzuchesti v ramkakh lineynoy vyazkouprugosti i neobkhodimye ogranicheniya na funktsiyu polzuchesti [Creep recovery curves yielding from linear

viscoelasticity theory and the necessary restrictions on a creep function]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of strength and plasticity]*. 2013. Iss. 75. Pt. 4. P. 257–267 (In Russian).

26. Khokhlov A.V. Kachestvennyy analiz obshchikh svoystv teoreticheskikh krivykh lineynogo opredelyayushchego sootnosheniya vyzkoupругosti [The qualitative analysis of theoretic curves generated by linear viscoelasticity constitutive equation]. *Nauka i obrazovanie MGTU im. N.E. Baumana [Science and Education of the Bauman MSTU]*. 2016. No 5. P. 187–245. Available at: <http://technomag.edu.ru/doc/840650.html>, accessed 14.06.2016 (In Russian)

27. Khokhlov A.V. Constitutive relation for rheological processes: Properties of theoretic creep curves and simulation of memory decay. *Mechanics of Solids*. 2007. Vol. 42. No 2. P. 291–306.

28. Khokhlov A.V. Constitutive relation for rheological processes with known loading history. Creep and long-term strength curves. *Mechanics of Solids*. 2008. Vol. 43. No 2. P. 283–299.

29. Khokhlov A.V. Svoystva nelineynye modeli vyzkoupругoplastichnosti tipa Maksvella s dvumya material'nimi funktsiyami [Basic properties of the nonlinear Maxwell-type model with two material functions for viscoelastoplastic materials]. *Vestnik MGU. Ser. I. Matematika, mekhanika [Moscow University Mechanics Bulletin]*. 2016. No 6. P. 36–41 (In Russian).

30. Khokhlov A.V. Nelineynaya model' vyzkoupругoplastichnosti tipa Maksvella: svoystva krivykh polzuchesti pri stupenchatykh nagruzheniyakh i usloviya nakopleniya plasticheskikh deformatsiy [The nonlinear Maxwell-type viscoelastoplastic model: properties of creep curves at piecewise-constant stress and criterion for plastic strain accumulation]. *Mashinostroenie i inzhenernoye obrazovanie [Mechanical Engineering and Engineering Education]*. 2016. No 3. P. 35–48 (In Russian).

31. Shesterikov C.A., Yumasheva M.A. Konkretizatsiya uravneniya sostoyaniya pri polzuchesti [Specification of creep constitutive relation]. *Izv. AN SSSR. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 1984. No 1. P. 86–91 (In Russian).

CREEP AND RELAXATION CURVES PRODUCED BY THE RABOTNOV NONLINEAR CONSTITUTIVE RELATION FOR VISCOELASTOPLASTIC MATERIALS

Khokhlov A.V.

*Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russian Federation*

General qualitative properties of the theoretic creep curves and relaxation curves produced by the Rabotnov nonlinear hereditary constitutive relation with two arbitrary material functions are studied analytically in uni-axial case. Necessary restrictions that should be imposed on the material functions to provide an adequate description of typical test relaxation, creep and recovery curves of viscoelastoplastic materials are revealed and clearly formulated. The Rabotnov constitutive relation is proved to be able to simulate the basic rheological phenomena related to creep, relaxation and recovery which are typical to a wide class of viscoelastoplastic materials. In particular, it is capable to produce creep curves with flexure point and convex down arcs, it can simulate primary, secondary and tertiary creep, creep failure, tension compression asymmetry, complete and incomplete recovery, fading memory property and so on. A number of effects are pointed out that the model can't simulate whatever material functions are taken (e.g. strain dependence of relaxation curve shape and relaxation spectrum).

The capabilities of the Rabotnov nonlinear constitutive relation and its applicability scope are elucidated and compared to capabilities of the Boltzmann – Volterra linear viscoelasticity equation which is the particular case the Rabotnov's relation.

Keywords: viscoelastoplasticity, nonlinear constitutive equation, theoretic creep curves, creep rate, recovery, relaxation curves, tension compression asymmetry.