

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ КРИВОЛИНЕЙНЫХ НАНОБАЛОК БЕРНУЛЛИ – ЭЙЛЕРА*

© 2016 г. Крысько В.А., Кутепов И.Е., Добриян В.В.

*Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.,
Саратов, Российская Федерация*

ilyakutepov@yandex.ru

Поступила в редакцию 24.10.2016

Исследована устойчивость гибких криволинейных нанобалок Бернулли – Эйлера под воздействием внешнего импульса бесконечной продолжительности. Проведено исследование влияния размерного коэффициента на потерю устойчивости криволинейной балки. Геометрическая нелинейность введена по модели Т. Кармана. Уравнения движения гибких балок Бернулли – Эйлера в частных производных в перемещениях методом конечных разностей 2-го порядка точности сведены к задаче Коши, которая решается методом Рунге – Кутты 4-го порядка. Достоверность полученных результатов решения основывается на принципе Рунге. Устойчивость криволинейных балок определяется с помощью метода установления. Определены несимметричные формы балки при потере устойчивости. Выявлены новые закономерности потери устойчивости криволинейной балки в зависимости от геометрических параметров балки, условий закрепления и внешней нагрузки.

Ключевые слова: гибкая балка Бернулли – Эйлера, нанобалка, устойчивость, криволинейная балка.

Введение

Микро- и наноразмерные балки, пластинки и оболочки широко используются в микро- и наноэлектромеханических системах, таких как датчики колебаний [1], микроприводы [2], микропереключатели [3].

Зависимость упругого поведения от размеров тела в микронном масштабе экспериментально наблюдалась в металлах [4, 5], сплавах [6], полимерах [7], кристаллах [8].

Несмотря на большое количество работ по указанной тематике, в которых для численного анализа используются линейные модели, необходимо отметить, что эксперименты подтверждают необходимость учета нелинейности при исследовании поведения микро- и наномеханических систем [9].

Классическая механика твердого тела не в состоянии интерпретировать и предсказывать размерно-зависимое поведение, происходящее в структурах масштаба

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 16-31-60027 мол_а_дк) в части численного эксперимента и РНФ (грант № 16-19-10290) в части постановки задачи и построения математической модели.

микрон и субмикрон, из-за отсутствия параметра, учитывающего масштабные эффекты. В последнее время было предпринято много попыток для разработки различных теорий, позволяющих моделировать масштабные эффекты в континууме, такие как: моментная теория упругости [10, 11], нелокальная теория упругости [12], градиентная теория упругости [13], поверхностная упругость [14].

Остановимся более подробно на работах, в которых для исследования задач теории упругости используется моментная теория. Основные теоретические положения моментной теории упругости даны в статье F. Yang [15], в которой в разрешающих уравнениях, помимо двух классических материальных констант Ламе, присутствует дополнительная материальная константа высшего порядка. N.A. Fleck и J.W. Hutchinson [16] использовали модифицированную моментную теорию упругости для объяснения зависимости упругого поведения от размерного коэффициента. В последние годы эта теория была применена многими исследователями для интерпретации размерно-зависимого динамического поведения микроструктур [17–21].

Одним из важнейших аспектов использования моментной теории упругости является ее приложение для задач статики и динамики балок. Это связано с тем, что балки являются основным элементом нанодатчиков, наноприводов и переключателей. В связи с этим имеется необходимость более детально рассмотреть нелинейные деформации размерно-зависимых балок под действием статических нагрузок.

Моделирование криволинейной нанобалки

В модифицированной моментной теории [15] запасенная энергия деформации Π в упругом теле, занимающем область $\Omega = \{0 \leq x \leq L; -h/2 \leq z \leq h/2\}$, при бесконечно малых деформациях записывается в виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} + m_{ij} \chi_{ij}), \quad (1)$$

где σ_{ij} , ε_{ij} , m_{ij} и χ_{ij} – соответственно компоненты классического тензора напряжений $\boldsymbol{\sigma}$, тензора деформаций $\boldsymbol{\varepsilon}$, девиаторной части симметричного тензора момента высшего порядка \mathbf{m} и симметричной части тензора кривизны $\boldsymbol{\chi}$, которые определяются как

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{m,i} u_{m,j}), \\ \chi_{ij} &= \frac{1}{2} (\theta_{i,j} + \theta_{j,i}), \quad \theta_i = \frac{1}{2} (\text{rot } \mathbf{u})_i. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь u_i – компоненты вектора смещения \mathbf{u} ; $\boldsymbol{\theta}$ – бесконечно малый вектор вращения с компонентами θ_i ; δ_{ij} – символ Кронекера. Для изотропного неоднородного материала напряжения, вызванные кинематическими параметрами, входящими в выражение для плотности энергии деформации, определяются следующими уравнениями состояния [15]:

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{ij} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad m_{ij} = 2\mu l^2 \chi_{ij}, \quad (3)$$

где $\lambda = E\nu / ((1 + \nu)(1 - 2\nu))$, $\mu = E / (2(1 + \nu))$ – параметры Ламе; E – модуль Юнга и ν – коэффициент Пуассона.

В этой модели в дополнение к обычным параметрам Ламе необходимо учесть еще один масштабный параметр l [15], появляющийся в моменте высшего порядка

\mathbf{m} и представляющий собой дополнительный независимый материальный параметр длины, связанный с симметричным тензором градиента вращения. Это прямое следствие того, что в моментной теории упругости плотность энергии деформации – функция только тензора деформации и симметричного тензора кривизны. Она не зависит явно от несимметричной части градиента деформации и несимметричной части тензора кривизны [15].

Уравнения движения балки, граничные и начальные условия были получены из энергетического принципа Остроградского – Гамильтона. Согласно этому принципу, производится сравнение близких движений, приводящих систему материальных точек из начального положения в момент времени t_0 в конечное положение в момент времени t_1 . Для истинных движений должно выполняться условие

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi + \delta W) dt = 0, \quad (4)$$

где K – кинетическая энергия системы, Π – потенциальная энергия, W – сумма элементарных работ внешних сил с учетом диссипации энергии.

Балка представляет собой криволинейное тело длиной L , сечение балки прямоугольное шириной b , высотой h и кривизной серединной линии $k_x = 1/R_x$ (рис. 1).

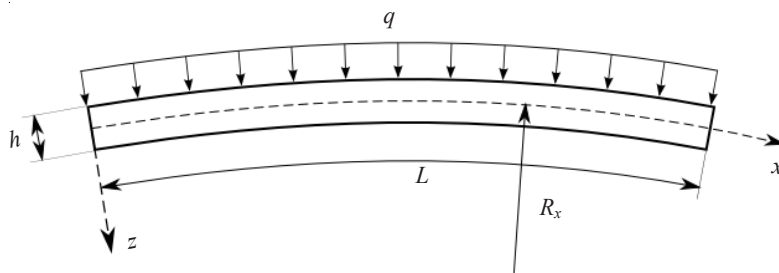


Рис. 1

Математическая модель балки основывается на следующих гипотезах:

- любое поперечное сечение, нормальное к серединной линии до деформации, остается после деформации прямым и нормальным к серединной линии, высота сечения не изменяется;
- учитывается нелинейная зависимость между деформациями и перемещениями в форме Т. Кармана;
- условие пологости принимается по В.З. Власову [22];
- материал балки упругий, изотропный и подчиняется закону Гука.

Основываясь на приведенных гипотезах и допущениях, ненулевую компоненту тензора напряжений σ при $\nu = 0$ запишем в виде:

$$\sigma_{xx} = E \left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 = k_x w \right),$$

где $w(x, t)$ – прогиб балки в направлении нормали; $u(x, t)$ – перемещение в продольном направлении.

Тогда выражения для кинетической и потенциальной энергии балки примут вид:

$$K = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A \rho \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dA dx,$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \int_A E \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - k_x w \right)^2 + \mu l^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dA dx,$$

где ρ – плотность материала балки; A – площадь прямоугольного сечения балки.

Постановка задачи

Математическая модель балки представляет собой систему дифференциальных уравнений движения балки, записанную в безразмерных переменных. Подставляя выражения для вариаций кинетической и потенциальной энергии в уравнение Остроградского – Гамильтона (4) и учитывая вариации δu и δw , рассматриваемые как функции t , получим систему уравнений движения балки:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_x \frac{\partial w}{\partial x} + L_3(w, w) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{1}{\lambda^2} \left[- \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{2} \gamma \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k_x \left[\frac{\partial u}{\partial x} - k_x w - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - w \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] + L_1(u, w) + L_2(w, w) \right] - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} + q = 0, \quad (6)$$

где

$$L_1(u, w) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad L_2(w, w) = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad L_3(w, w) = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

– нелинейные операторы, ε – коэффициент диссипации, q – внешняя нагрузка, t – время.

Уравнения (5), (6) приводятся к безразмерному виду с использованием параметров:

$$\bar{w} = \frac{w}{h}, \quad \bar{u} = \frac{uL}{h^2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{z} = \frac{z}{h}, \quad \bar{q} = q \frac{L^4}{h^4 E}, \quad c = \sqrt{\frac{Eg}{\rho}}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon L}{c}, \quad (7)$$

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{L}{c}, \quad \lambda = \frac{L}{h}, \quad \gamma = \frac{l}{h}, \quad \bar{k}_x = \frac{k_x L^2}{h},$$

где g – ускорение свободного падения, далее черта сверху для безразмерных параметров опущена.

К системе уравнений (5), (6) следует присоединить одно из граничных условий, соответствующих способу закрепления концов балки:

– для жесткой заделки

$$w(0, t) = u(0, t) = w'_x(0, t) = 0, \quad w(1, t) = u(1, t) = w'_x(1, t) = 0; \quad (8)$$

– для неподвижного шарнирного закрепления

$$w(0, t) = u(0, t) = M_x(0, t) = 0, \quad w(1, t) = u(1, t) = M_x(1, t) = 0 \quad (9)$$

и начальные условия:

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x), \quad u(x, 0) = f_3(x), \quad \dot{u}(x, 0) = f_4(x). \quad (10)$$

Алгоритм

При решении полученной системы уравнений (5), (6) был использован метод конечных разностей (МКР) как наиболее эффективный [23]. Для этого на область балки накладывалась равномерная сетка с количеством узлов n . Частные производные по пространственным координатам заменялись центральными конечно-разностными аппроксимациями.

К граничным условиям (8), (9) и начальным условиям (10) также применялась разностная аппроксимация. Методом замены переменных система (5), (6) сводится к задаче Коши относительно эволюционной переменной, решение которой производилось методом Рунге – Кутты 4-го порядка. Решение сопоставлялось с результатами, полученными по методу Рунге – Кутты 6-го порядка. Установлено, что результаты совпадают, однако для вычислений по методу Рунге – Кутты 4-го порядка требуется меньше времени, поэтому ему было отдано предпочтение [23].

Для анализа устойчивости гибких балок Бернулли – Эйлера применялся метод установления, предложенный А.Н. Тихоновым [24] и использованный для задач теории оболочек В.И. Феодосьевым [25]. Этот метод является эффективным и по сути есть метод решения по параметрам [26]. Среди приближенных методов решения динамических задач большое внимание уделяется итерационным методам, которые позволяют с хорошей точностью получить требуемое решение. Если итерационный процесс рассматривать как результат установления некоторого процесса, то из этого следует, что итерационные методы – это методы продолжения решения по параметру. Если придать параметру физический смысл времени, то получаем процесс, который называется методом установления.

На рис. 2 показано установление прогиба в центре балки $w(0,5)$ во времени для балки с кривизной $k_x = 24$. Там же приведена диаграмма зависимости максимального прогиба от внешней нагрузки, полученная путем последовательного решения уравнения движения методом установления при увеличении параметра нагрузки q_0 .

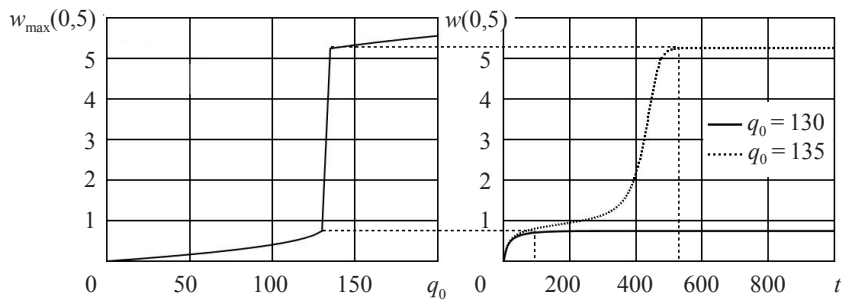


Рис. 2

Программный комплекс, созданный на основе описанных выше подходов, позволяет исследовать статическую устойчивость гибких балок Бернулли – Эйлера для некоторых параметров управления: относительной толщины балки, кривизны, краевых условий для балки (8), (9) и размерно-зависимых параметров.

Результаты исследования

Рассмотрим диаграммы зависимости прогиба в центре балки от внешней распределенной нагрузки в случае, когда $\lambda = 50$, $\gamma = 0$. В качестве критерия устойчиво-

сти рассматриваемого тела используется формулировка, предложенная Б.Я. Кантором [27]. При потере устойчивости прогиб срединной поверхности приблизительно равен удвоенному значению стрелы подъема. Балка прохлопывает, если прогиб в центре достигает значения, большего высоты балки.

На рис. 3 представлены зависимости прогиба от внешней нагрузки для балки различной кривизны для граничных условий (8) и начальных условий (10) при $f_i(x) = 0$. Анализ данных из рисунка позволяет установить значения внешней нагрузки, которые являются критическими. На рис. 4 приведены зависимости критических значений нагрузки q_{crit} от кривизны k_x для граничных условий (8) и (9).

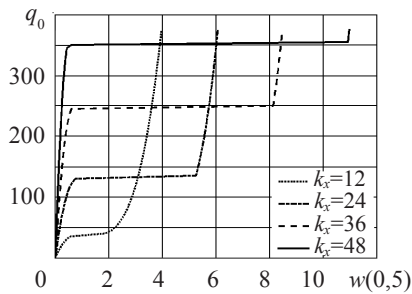


Рис. 3

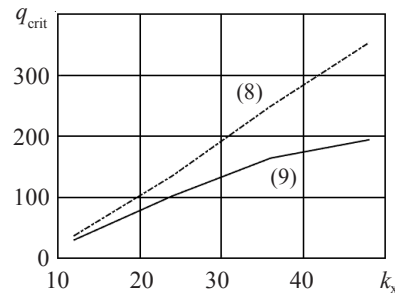


Рис. 4

Из рис. 3, 4 следует, что потеря устойчивости балки характеризуется резким увеличением прогиба при малом изменении внешней нагрузки. Анализ рисунков позволяет определить значения параметра внешней нагрузки, соответствующие докритическому, критическому и закритическому состояниям системы, которые представлены в таблице 1. Установлено, что для граничных условий (8) величина параметра q_0 , при которой происходит потеря устойчивости, выше, чем для граничных условий (9), что говорит об адекватности построенной модели.

Таблица 1

Граничное условие	(8)				(9)				
	k_x	12	24	36	48	12	24	36	48
Докритическое		33	127	241	344	26	98	156	190
Критическое		37	135	249	353	30	102	164	194
Закритическое		48	142	256	356	32	104	168	196

Проанализируем эпюры прогибов балки при исследуемых значениях кривизны k_x для рассматриваемых состояний при соответствующих значениях внешней нагрузки q_0 . На рис. 5 представлены эпюры для граничных условий (8): рис. 5а – при значении $k_x = 24$ (для $q_0 = 127$ показатель $Le = -0,23376$, для $q_0 = 142$ показатель $Le = 0,11835$); рис. 5б – при значении $k_x = 48$ (для $q_0 = 344$ показатель $Le = -0,05292$, для $q_0 = 356$ показатель $Le = 0,96564$).

Согласно общей постановке задачи устойчивости движения системы по А.М. Ляпунову, устойчивым считается состояние системы, если старший показатель Ляпунова Le , полученный на основе алгоритма Вольфа [28], отрицательный, и неустойчивым – при положительном значении показателя Le . Исследование устойчивости по Ляпунову для балок различной кривизны (k_x от 12 до 48) при докритической и критической нагрузках позволило установить соответствие критериям Кантора.

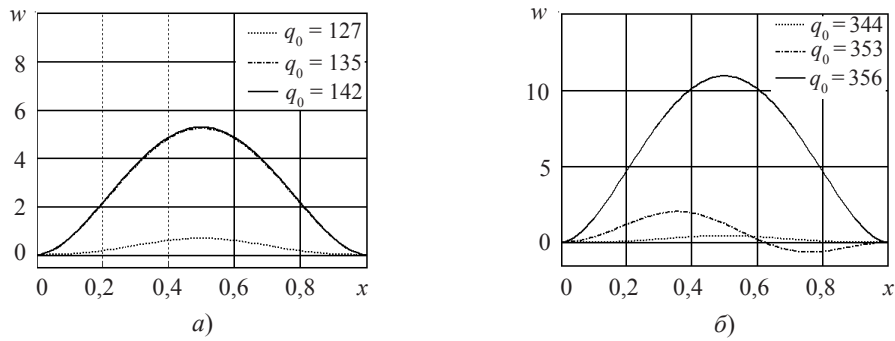


Рис. 5

Из эпюр прогибов балки следует, что при кривизне до значений $k_x = 24$ наблюдается симметричная форма изгиба при до- и закритическом состояниях. При увеличении параметра кривизны до значений $k_x = 48$ наблюдается изменение формы изгиба балки на асимметричную форму для критической нагрузки. Для граничных условий (9) асимметричная форма изгиба при критической нагрузке $q_{crit} = 102$ наблюдается уже при кривизне $k_x = 24$ (рис. 6).

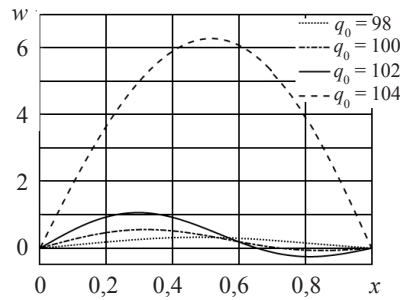


Рис. 6

Исследовалось влияние размерно-зависимого параметра γ на критическую нагрузку q_{crit} , при которой происходит потеря устойчивости балки. Для этого методом установления были получены диаграммы зависимости нагрузки от прогиба при $\gamma = 0; 0,3$ и $0,5$ и определена критическая нагрузка для балки с кривизной $k_x = 24$ (рис. 7). Диаграммы зависимости критической нагрузки от параметра кривизны для граничных условий (9) приведены на рис. 8.

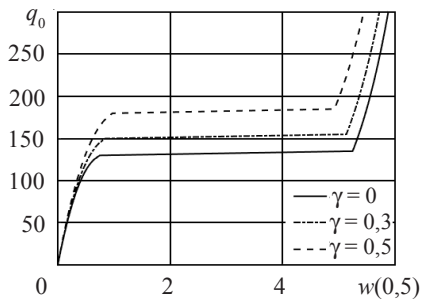


Рис. 7

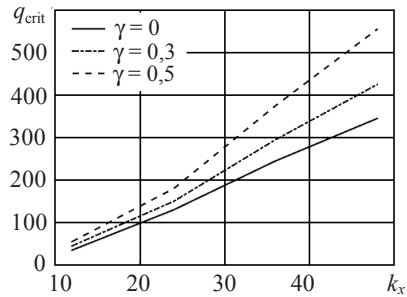


Рис. 8

Исследование показывает, что учет размерно-зависимого поведения приводит к увеличению критической нагрузки, что говорит о большей несущей способности

балки с учетом параметра γ . Отмечается, что для балки с кривизной $k_x = 12$ увеличение критической нагрузки при $\gamma = 0,3$ составило 19%, при $\gamma = 0,5$ – 42%; для балки с кривизной $k_x = 48$ увеличение критической нагрузки – 21% и 53% соответственно. Указанная зависимость сохраняется для всех типов исследуемых граничных условий.

Анализ форм изгиба балки показал, что для параметров $k_x = 24$, $\gamma = 0,3$ (рис. 9) и $\gamma = 0,5$ (рис. 10) наблюдается потеря устойчивости через несимметричную форму балки, при этом для $\gamma = 0,3$ отмечается одна полуволна, а для $\gamma = 0,5$ – две полуволны.

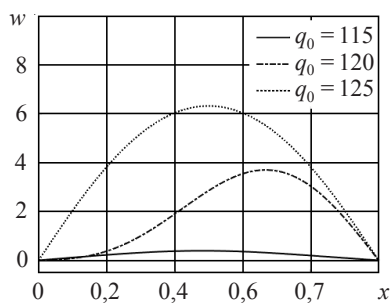


Рис. 9

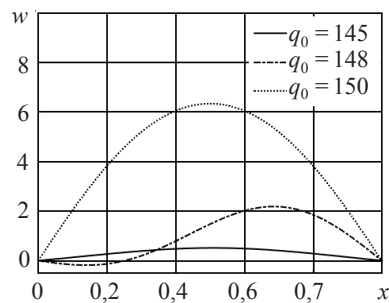


Рис. 10

Заключение

Построена математическая модель криволинейной нанобалки Бернулли – Эйлера с учетом геометрической нелинейности. С использованием модифицированной моментной теории упругости получены новые закономерности потери устойчивости криволинейной балки в зависимости от геометрических параметров, условий закрепления и внешней нагрузки.

Выявлены несимметричные формы балки при потере устойчивости, которые появляются с увеличением геометрического параметра k_x . Учет размерно-зависимого поведения приводит к увеличению критической нагрузки, что говорит о большей несущей способности балочных наноструктур.

Список литературы

1. Fu Y., Zhang J. Electromechanical dynamic buckling phenomenon in symmetric electric fields actuated microbeams considering material damping. *Acta Mech.* 2010. Vol. 212. P. 29–42.
2. Moghimi Zand M., Ahmadian M.T. Static pull-in analysis of electrostatically actuated microbeams using homotopy perturbation method. *Appl. Math. Model.* 2010. Vol. 34. Iss. 4. P. 1032–1041.
3. Jia X.L., Yang J., Kitipornchai S. Pull-in instability of geometrically nonlinear micro-switches under electrostatic and Casimir forces. *Acta Mech.* 2011. Vol. 218. P. 161–174.
4. Fleck N.A., Muller G.M., Ashby M.F., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity: theory and experiments. *Acta Metall. Mater.* 1994. Vol. 42. No 2. P. 475–487.
5. Nix W.D. Mechanical properties of thin films. *Metall. Trans. A.* 1989. Vol. 20A. P. 2217–2245.
6. Mazza E., Abel S., Dual J. Experimental determination of mechanical properties of Ni and Ni-Fe microbars. *Microsystem Technologies.* 1996. Vol. 2. No 4. P. 197–202.
7. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids.* 2003. Vol. 51. P. 1477–1508.
8. Ma Q., Clarke D.R. Size dependent hardness of silver single crystals. *Journal of Materials Research.* 1995. Vol. 10. No 4. P. 853–863.

9. Scheible D.V., Erbe A., Blick R.H. Evidence of a nanomechanical resonator being driven into chaotic response via the Ruelle – Takens route. *Appl. Phys. Lett.* 2002. Vol. 81. P. 1884–1886.
10. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1962. Vol. 11. P. 415–448.
11. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1962. Vol. 11. P. 385–414.
12. Eringen A.C. Nonlocal polar elastic continua. *Int. J. Eng. Sci.* 1972. Vol. 10. P. 1–16.
13. Aifantis E.C. Strain gradient interpretation of size effects. *Int. J. Fract.* 1999. Vol. 95. P. 299–314.
14. Gurtin M.E., Weismuller J., Larche F. The general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium. *Philos. Mag.* 1998. Vol. 78. P. 1093–1109.
15. Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 2002. Vol. 39. P. 2731–2743.
16. Fleck N.A., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity. In: *Advances in Applied Mechanics*. J.W. Hutchinson, T.Y. Wu (Eds.). Vol. 33. New York: Academic Press, 1997. P. 295–361.
17. Lazopoulos K.A., Lazopoulos A.K. Bending and buckling of thin strain gradient elastic beams. *Eur. J. Mech. A-Solid.* 2010. Vol. 29. P. 837–843.
18. Asghari M., Kahrobaian M.H., Ahmadian M.T. A nonlinear Timoshenko beam formulation based on the modified couple stress theory. *Int. J. Eng. Sci.* 2010. Vol. 48. Vol. 12. P. 1749–1761.
19. Asghari M., Ahmadian M.T., Kahrobaian M.H., Rahaeifard M. On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Mater. Des.* 2010. Vol. 31. P. 2324–2329.
20. Ma H.M., Gao X.L., Reddy J.N. A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory. *Acta Mech.* 2011. Vol. 220. P. 217–235.
21. Ma H.M., Gao X.L., Reddy J.N. A non-classical Reddy – Levinson beam model based on a modified couple stress theory. *Int. J. Multiscale Comput. Eng.* 2010. Vol. 8. P. 167–180.
22. Власов В.З. *Общая теория оболочек*. М.: Гостехиздат, 1949. 784 с.
23. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Zagniboroda N.A., Dobriyan V., Krysko V.A., Kutepov I.E. Chaotic dynamics of flexible Euler – Bernoulli beams. *Chaos*. 2013. Vol. 23. No 4.
24. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. *Методы решения некорректных задач*. М.: Наука, 1979. 286 с.
25. Феодосьев В.И. Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем. *ПММ*. 1963. Т. 27. Вып. 2. С. 265–274.
26. Krysko V.A., Awrejcewicz J., Komarov S.A. Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. Vol. 194. P. 3108–3126.
27. Кантор Б.Я. *Нелинейные задачи теории неоднородных пологих оболочек*. Киев: Наукова думка, 1971. 136 с.
28. Wolf A., Swift H.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica*. 1985. Vol. D16. P. 285–317.

References

1. Fu Y., Zhang J. Electromechanical dynamic buckling phenomenon in symmetric electric fields actuated microbeams considering material damping. *Acta Mech.* 2010. Vol. 212. P. 29–42.
2. Moghimi Zand M., Ahmadian M.T. Static pull-in analysis of electrostatically actuated microbeams using homotopy perturbation method. *Appl. Math. Model.* 2010. Vol. 34. Iss. 4. P. 1032–1041.
3. Jia X.L., Yang J., Kitipornchai S. Pull-in instability of geometrically nonlinear micro-switches under electrostatic and Casimir forces. *Acta Mech.* 2011. Vol. 218. P. 161–174.
4. Fleck N.A., Muller G.M., Ashby M.F., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity: theory and experiments. *Acta Metall. Mater.* 1994. Vol. 42. No 2. P. 475–487.
5. Nix W.D. Mechanical properties of thin films. *Metall. Trans. A*. 1989. Vol. 20A. P. 2217–2245.
6. Mazza E., Abel S., Dual J. Experimental determination of mechanical properties of Ni and Ni-Fe microbars. *Microsystem Technologies*. 1996. Vol. 2. No 4. P. 197–202.
7. Lam D.C.C., Yang F., Chong A.C.M., Wang J., Tong P. Experiments and theory in strain gradient elasticity. *J. Mech. Phys. Solids*. 2003. Vol. 51. P. 1477–1508.

8. Ma Q., Clarke D.R. Size dependent hardness of silver single crystals. *Journal of Materials Research*. 1995. Vol. 10. No 4. P. 853–863.
9. Scheible D.V., Erbe A., Blick R.H. Evidence of a nanomechanical resonator being driven into chaotic response via the Ruelle – Takens route. *Appl. Phys. Lett.* 2002. Vol. 81. P. 1884–1886.
10. Mindlin R.D., Tiersten H.F. Effects of couple-stresses in linear elasticity. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1962. Vol. 11. P. 415–448.
11. Toupin R.A. Elastic materials with couple-stresses. *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1962. Vol. 11. P. 385–414.
12. Eringen A.C. Nonlocal polar elastic continua. *Int. J. Eng. Sci.* 1972. Vol. 10. P. 1–16.
13. Aifantis E.C. Strain gradient interpretation of size effects. *Int. J. Fract.* 1999. Vol. 95. P. 299–314.
14. Gurtin M.E., Weissmuller J., Larche F. The general theory of curved deformable interfaces in solids at equilibrium. *Philos. Mag.* 1998. Vol. 78. P. 1093–1109.
15. Yang F., Chong A.C.M., Lam D.C.C., Tong P. Couple stress based strain gradient theory for elasticity. *Int. J. Solids Struct.* 2002. Vol. 39. P. 2731–2743.
16. Fleck N.A., Hutchinson J.W. Strain gradient plasticity. In: *Advances in Applied Mechanics*. J.W. Hutchinson, T.Y. Wu (Eds.). Vol. 33. New York: Academic Press, 1997. P. 295–361.
17. Lazopoulos K.A., Lazopoulos A.K. Bending and buckling of thin strain gradient elastic beams. *Eur. J. Mech. A-Solid*. 2010. Vol. 29. P. 837–843.
18. Asghari M., Kahrobaian M.H., Ahmadian M.T. A nonlinear Timoshenko beam formulation based on the modified couple stress theory. *Int. J. Eng. Sci.* 2010. Vol. 48. No 12. P. 1749–1761.
19. Asghari M., Ahmadian M.T., Kahrobaian M.H., Rahaeifard M. On the size-dependent behavior of functionally graded micro-beams. *Mater. Des.* 2010. Vol. 31. P. 2324–2329.
20. Ma H.M., Gao X.L., Reddy J.N. A non-classical Mindlin plate model based on a modified couple stress theory. *Acta Mech.* 2011. Vol. 220. P. 217–235.
21. Ma H.M., Gao X.L., Reddy J.N. A non-classical Reddy – Levinson beam model based on a modified couple stress theory. *Int. J. Multiscale Comput. Eng.* 2010. Vol. 8. P. 167–180.
22. Vlasov V.Z. *Obshchaya teoriya obolochek [The General Theory of Shells]*. Moscow. Gostekhizdat Publ. 1949. 784 p. (In Russian).
23. Krysko A.V., Awrejcewicz J., Zagniboroda N.A., Dobriyan V., Krysko V.A., Kutepov I.E. Chaotic dynamics of flexible Euler – Bernoulli beams. *Chaos*. 2013. Vol. 23. No 4.
24. Tikhonov A.N., Arsenin V.Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach [Methods for solving ill-posed problems]*. Moscow. Nauka Publ. 1979. 286 p. (In Russian).
25. Feodosyev V.I. Ob odnom sposobe resheniya nelineynykh zadach ustoychivosti deformiruemykh sistem [On a method for solving nonlinear problems of stability of deformable systems]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 1963. Vol. 27. Iss. 2. P. 265–274 (In Russian).
26. Krysko V.A., Awrejcewicz J., Komarov S.A. Nonlinear deformations of spherical panels subjected to transversal load action. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2005. Vol. 194. P. 3108–3126.
27. Kantor B.Ya. *Nelineynye zadachi teorii neodnorodnykh plogikh obolochek [Nonlinear problems of inhomogeneous shallow shells theory]*. Kiev. Naukova dumka Publ. 1971. 136 p. (In Russian).
28. Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica*. 1985. Vol. D16. P. 285–317.

STABILITY OF CURVILINEAR EULER – BERNOULLI NANO-BEAM

Krysko V.A., Kutepov I.E., Dobriyan V.V.

Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation

The article deals with stability of flexible curved Euler – Bernoulli nano-beam under the influence of external pulse of infinite duration. The influence of the size factor to the loss of stability of the curved beams was studied in preset paper. Geometric non-linearity introduced by the model Karman. The equations of motion of the Euler – Bernoulli beam flexible in partial movements are reduced to the Cauchy problem by finite difference method of 2nd order accuracy which is solved by the Runge – Kutta 4th order. The validity of the results is based on the principle of Runge. Stability of curved beams is determined using established method. It is specially noted asymmetrical shape of the beam upon loss of stability. The study revealed new patterns of loss of stability of the curved beams, depending on the geometrical parameters of the beam, fixing conditions and the external load.

Keywords: flexible Bernoulli – Euler beam, nano-beam, stability, curved beam.