

УДК 539.3

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РАДИАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТОУПРУГОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА*

© 2016 г. **Тарлаковский Д.В.^{1,2}, Щербаков В.А.²**

¹*НИИ механики Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

²*Московский авиационный институт (МАИ), Москва, Российская Федерация*

vasily.a.scherbakov@gmail.com

Поступила в редакцию 05.10.2016

Рассматриваются нестационарные радиальные колебания бесконечного сплошного цилиндрического тела. Материал тела принимается изотропным и электромагнитоупругим. Пьезоэффекты не учитываются. Процесс деформирования описывается системой уравнений движения относительно радиального перемещения точек среды в цилиндрической системе координат. Кроме того, учитывается влияние плотностей тока и поверхностных зарядов, а также электрических и магнитных полей, поведение которых описывается линеаризованным обобщенным законом Ома и уравнениями Максвелла. Для решения используются преобразование Лапласа по времени и разложение в степенные ряды по малому параметру, характеризующему связь электромагнитного и механического полей. Получены явные формулы для изображений коэффициентов разложений компонентов напряженно-деформированного состояния и электромагнитного поля. Для перехода в пространство оригиналов используется асимптотическое представление решения в окрестности начального момента времени.

Ключевые слова: электромагнитоупругость, цилиндрические координаты, нестационарные радиальные волны, преобразование Лапласа.

Введение

В настоящее время достаточно большой интерес представляют динамические связанные задачи о взаимодействии механических полей с полями другой природы, в том числе электромагнитной. Однако большинство публикаций посвящено исследованиям только некоторых составляющих этой проблемы: либо рассматриваются стационарные задачи, либо учитываются только электрические или магнитные поля. При этом, как правило, не принимается во внимание действие сил Лоренца. Приведем некоторые из подобных публикаций.

Монография [1] посвящена построению моделей и методикам определения термоупругого состояния деформируемых электропроводных тел, находящихся в стационарном электромагнитном поле. В статье [2] предложена методика исследо-

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №15-08-00788).

вания плоских задач для цилиндрических тел, на границе которых задано электромагнитное поле. В работах [3, 4] сформулированы вариационные принципы и вытекающие из них основные типы задач стационарной электроупругости. Аналитически решены некоторые задачи о вынужденных колебаниях пьезокерамических тел простой геометрии в одномерной постановке. Исследованию магнитотермодинамических напряжений и возмущений вектора магнитного поля в неоднородном термоупругом цилиндре посвящены работы [5, 6]. Построению фундаментальных решений в нестационарных задачах электроупругости посвящена статья [7]. Теоремы существования и единственности обобщенного решения для некоторых нестационарных задач связанной электроупругости доказаны в [8]. В некоторых работах изучены вопросы о нестационарном взаимодействии тонкостенных и толстостенных пьезопреобразователей цилиндрической и сферической формы с акустическими средами, см., например, [9, 10]. В статьях [11, 12] рассмотрено нестационарное движение толстостенных неоднородного пьезокерамического цилиндра конечной длины и цилиндра с различными направлениями поляризации. Постановка задачи о распространении нестационарных радиальных возмущений от цилиндрической полости в электромагнитоупругой среде с учетом силы Лоренца дана в [13].

Далее дана постановка и приведено решение одномерной нестационарной связанной задачи о взаимодействии механических и электромагнитных полей для кругового цилиндра с учетом силы Лоренца и обобщенного закона Ома.

1. Постановка задачи

Рассматриваются радиальные колебания кругового цилиндрического тела радиусом r_1 , состоящего из изотропной электромагнитоупругой среды, пьезоэлектрические эффекты в которой не учитываются. Используется цилиндрическая система координат $Or\vartheta z$ ($r \geq 0$, $-\pi < \vartheta \leq \pi$, $z \in R$), где ось Oz сонаправлена с осью цилиндра. Соответствующий нестационарный процесс описывается уравнением движения [14] (здесь и далее точками обозначены производные по времени)

$$\ddot{u} = \Delta u + F_e, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}, \quad (1)$$

линеаризованным обобщенным законом Ома и уравнениями Максвелла

$$j = E + \frac{\rho_{e0}}{\gamma} \dot{u}, \quad \dot{E} + \gamma j = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial(rE)}{\partial r} = \rho_e, \quad (2)$$

а также линеаризованной формулой для силы Лоренца

$$F_e = \alpha(\rho_{e0}E + \rho_e E_0). \quad (3)$$

Здесь $u = u(r, \tau)$, $j = j(r, \tau)$ и $E = E(r, \tau)$ – радиальные компоненты векторов перемещения, плотности тока и напряженности электрического поля; $\rho_e = \rho_e(r, \tau)$ – плотность зарядов; индексы 0 соответствуют значениям величин в начальном состоянии, относительно которого проводится линеаризация (все они зависят только от радиальной координаты r).

Отметим, что необходимым условием одномерности задачи является равенство нулю напряженности магнитного поля.

Здесь и далее используются следующие безразмерные величины (при одинаковом написании они обозначены верхней волной, которая в остальных формулах опущена):

$$\tilde{r} = \frac{r}{r_1}, \quad \tau = \frac{tc_1}{r_1}, \quad \tilde{j} = \frac{j}{\sigma E_*}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{r_1}, \quad \tilde{E} = \frac{E}{E_*}, \quad \tilde{F}_e = \frac{F_e r_1}{\lambda + 2\mu}, \quad \tilde{\rho}_e = \frac{4\pi\rho_e r_1}{\varepsilon E_*},$$

$$\gamma = \frac{4\pi\sigma r_1}{\varepsilon c_1}, \quad \alpha = \frac{\varepsilon E_*^2}{4\pi(\lambda + 2\mu)}, \quad c_1^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, \quad \tilde{\sigma}_r = \frac{\sigma_r}{\lambda + 2\mu}, \quad \kappa = \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu},$$

где t – время; σ_r – радиальное напряжение; c_1 – скорость распространения упругих волн растяжения-сжатия; σ – удельная проводимость среды; E_* – некоторое характерное значение напряженности электрического поля; λ и μ – упругие постоянные Ламе, ε – диэлектрическая проницаемость среды.

Полагается, что в начальный момент времени возмущения отсутствуют:

$$u|_{\tau=0} = \dot{u}|_{\tau=0} = E|_{\tau=0} = 0. \quad (4)$$

На поверхности цилиндра принимаются следующие граничные условия:

$$(\alpha u + \beta \sigma_r)|_{r=r_1} = U_0(\tau), \quad \sigma_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\kappa}{r}u. \quad (5)$$

Они позволяют рассматривать два частных случая: при $\alpha = 0$ цилиндр свободен от нагрузки, а при $\beta = 0$ он неподвижен. Все искомые функции полагаются ограниченными.

Количество неизвестных функций в системе уравнений (1)–(3) можно уменьшить и привести ее к следующему виду:

$$\ddot{u} = \Delta u + \alpha F(E), \quad F(E) = \rho_{e0}E + \frac{E_0}{r} \frac{\partial(rE)}{\partial r}, \quad (6)$$

$$\dot{E} + \gamma E = -\rho_{e0}\dot{u}. \quad (7)$$

2. Решение в пространстве преобразований Лапласа

К начально-краевой задаче (4)–(7) применяем преобразование Лапласа по времени τ (s – его параметр, а верхний индекс L указывает на изображение) [15]:

$$s^2 u^L = \Delta u^L + \alpha F(E^L), \quad (8)$$

$$(s + \gamma)E^L = -s\rho_{e0}u^L, \quad (9)$$

$$(\alpha u^L + \beta \sigma_r^L)|_{r=r_1} = U_0^L(s), \quad \sigma_r^L = \frac{\partial u^L}{\partial r} + \frac{\kappa}{r}u^L. \quad (10)$$

При этом условие ограниченности переносится и на изображения.

Как показано в работах [16, 17], аналитически найти оригиналы решений подобных одномерных задач в декартовой и сферической системах координат не удастся. Аналогичная ситуация имеет место и в рассматриваемой задаче. Поэтому представляем искомые функции в виде рядов по малому параметру α , характеризующему связь электрического и механического полей:

$$u(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} u_m \alpha^m, \quad E(r, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} E_m \alpha^m. \quad (11)$$

Подстановка этих разложений в (8)–(10) приводит к рекуррентной последовательности краевых задач относительно ограниченных изображений коэффициентов рядов (11):

$$\Delta u_0^L - s^2 u_0^L = 0, \quad (\alpha u_0^L + \beta \sigma_{r0}^L) \Big|_{r=1} = U_0^L(s), \quad (12)$$

$$\Delta u_m^L - s^2 u_m^L = -F(E_m^L), \quad (\alpha u_m^L + \beta \sigma_{rm}^L) \Big|_{r=1} = 0 \quad (m \geq 1), \quad (13)$$

$$E_m^L = -b(s) \rho_{e0} u_m^L, \quad b(s) = \frac{s}{\gamma + s} \quad (m \geq 0). \quad (14)$$

Общее решение однородных уравнений в (12) и (13) имеет вид [18]:

$$u_m^L = C_1 K_1(sr) + C_2 I_1(sr), \quad (15)$$

где $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ – модифицированные функции Бесселя порядка ν .

Отметим, что если в пространстве преобразований Лапласа строить общее решение однородного уравнения, соответствующего системе (6), (7), то оно будет иметь тот же вид, но порядок функций Бесселя будет зависеть от параметра преобразования s .

Далее будем использовать вронскиан модифицированных функций Бесселя

$$W[I_\nu(z), K_\nu(z)] = -z^{-1}, \quad (16)$$

а также их асимптотические свойства при $z \rightarrow 0$:

$$K_0(z) \sim -\ln z, \quad K_n(z) \sim \frac{2^{n-1}(n-1)!}{z^n} \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (17)$$

$$I_n(z) = \frac{n! z^n}{2^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

и при $z \rightarrow \infty$:

$$K_n(z) = e^{-z} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \sum_{k=0}^m \frac{a_{nk}}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right), \quad I_n(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \sum_{k=0}^m (-1)^k \frac{a_{nk}}{z^k} + O\left(\frac{1}{z^{m+1}}\right),$$

$$a_{nk} = \frac{(2n+2k-1)!!}{2^{3k} k!} \begin{cases} \frac{1}{(2n-2k-1)!!} & \text{при } k \leq n, \\ (-1)^{k-n} (2k-2n-1)!! & \text{при } k \geq n. \end{cases} \quad (18)$$

3. Интегральное представление решения

Решение краевой задачи (12) записываем так:

$$u_0^L(r, s) = G_0^L(r, s) U_0^L(s). \quad (19)$$

Здесь G_0^L – поверхностная функция Грина, то есть ограниченное решение следующей задачи:

$$\Delta G_0^L - s^2 G_0^L = 0, \quad (\alpha G_0^L + \beta G_{\sigma 0}^L) \Big|_{r=1} = 1, \quad G_{\sigma 0}^L = \frac{\partial G_0^L}{\partial r} + \frac{\kappa}{r} G_0^L. \quad (20)$$

Используя соотношения (16)–(18), из условия ограниченности решения и граничного условия в (20) приходим к следующему равенству:

$$G_0^L(r, s) = \frac{I_1(rs)}{D(s)}, \quad D(s) = \zeta I_1(s) + \beta s I_0(s), \quad \zeta = \alpha + (\kappa - 1)\beta. \quad (21)$$

Решение задачи (13) представляем в интегральном виде [19]:

$$u_m^L(r, s) = \int_0^1 G^L(r, s; \xi) F[E_{m-1}^L(\xi, s)] d\xi. \quad (22)$$

Здесь G^L – объемная функция Грина, то есть ограниченное решение следующей задачи:

$$\Delta G^L - s^2 G^L = -\delta(r - \xi), \quad (\alpha G^L + \beta G_\sigma^L) \Big|_{r=1} = 0, \quad G_\sigma^L = \frac{\partial G^L}{\partial r} + \frac{\kappa}{r} G^L, \quad (23)$$

где $\delta(r)$ – дельта-функция Дирака [15].

Общее решение однородного уравнения в (23) имеет вид (15). Соответствующее частное решение записываем так:

$$G_*^L(r, s; \xi) = D_1(\xi, s) K_1(sr) + D_2(\xi, s) I_1(sr). \quad (24)$$

Входящие в это равенство функции $D_1(\xi, s)$ и $D_2(\xi, s)$ находим методом вариации произвольных постоянных с учетом соотношений (16), (17). Подставляя их в (24), получаем такое равенство:

$$G_*^L(r, s; \xi) = \xi [I_1(s\xi) K_1(sr) - K_1(s\xi) I_1(sr)] H(r - \xi),$$

где $H(\tau)$ – функция Хевисайда [15].

Представляя общее решение в виде суммы

$$G^L = C_1 K_1(sr) + C_2 I_1(sr) + G_*^L(r, s; \xi)$$

и определяя постоянные интегрирования из условия ограниченности и краевого условия в (23), получаем искомую объемную функцию Грина:

$$G^L(r, s; \xi) = \xi [\tilde{G}^L(r, s; \xi) H(\xi - r) + \tilde{G}^L(\xi, s; r) H(r - \xi)], \quad (25)$$

где

$$\tilde{G}^L(r, s; \xi) = \left[K_1(s\xi) - \frac{B(s)}{D(s)} I_1(s\xi) \right] I_1(sr),$$

$$D(s) = \zeta I_1(s) + \beta s I_0(s), \quad B(s) = \zeta K_1(s) - \beta s K_0(s).$$

Непосредственное использование формулы (22) затруднительно, так как при этом возникает необходимость вычисления производных по ξ от функции $E_m^L(\xi, s)$, что в силу (14) эквивалентно дифференцированию функции $u_m^L(\xi, s)$. Чтобы избежать этого, с помощью интегрирования по частям с учетом (25) и последнего равенства в (2) преобразовываем формулу (22):

$$u_m^L(r, s) = \int_0^1 G_1^L(r, s; \xi) E_0(\xi) E_{m-1}^L(\xi, s) d\xi + E_0(1) E_{m-1}^L(1, s) G^L(r, s; 1), \quad (26)$$

где

$$G_1^L(r, s; \xi) = -\xi [\tilde{G}_1^L(r, s; \xi) H(\xi - r) + \tilde{G}_2^L(r, s; \xi) H(r - \xi)],$$

$$\tilde{G}_1^L(r, s; \xi) = \frac{\partial \tilde{G}^L(r, s; \xi)}{\partial \xi}, \quad \tilde{G}_2^L(r, s; \xi) = \frac{\partial \tilde{G}^L(\xi, s; r)}{\partial \xi}.$$

4. Решение в пространстве оригиналов

Применяя к равенствам (14), (19) и (26) обратное преобразование Лапласа [15], получаем рекуррентную последовательность соотношений относительно оригиналов искомых функций (значком * обозначена свертка по времени τ):

$$u_0(r, \tau) = G_0(r, \tau) * U_0(\tau), \quad E_m(r, \tau) = -\rho_{e0}(r)b(\tau) * u_m(r, \tau) \quad (m \geq 0),$$

$$u_m(r, \tau) = \int_0^1 E_0(\xi) G_1(r, \tau; \xi) * E_{m-1} d\xi + E_0(1) E_{m-1}(1, \tau) * G(r, \tau; 1) \quad (m \geq 1). \quad (27)$$

Для использования этих соотношений необходимо знать ядра $G_0(r, \tau)$, $G(r, \tau; 1)$ и $G_1(r, \tau; \xi)$. Найти их аналитически как оригиналы соответствующих изображений для любого времени не представляется возможным. Поэтому ограничимся начальными моментами. Для этого, применяя асимптотические формулы (18), находим приближенные (отбрасываем бесконечно малые более высокого порядка) разложения функций Грина и их составляющих в (21), (25) и (26) в окрестности бесконечно удаленной точки $s = \infty$:

$$G_0^L(r, s) = \frac{e^{-s(1-r)}}{\sqrt{r}} P_{0m}^L(r, s), \quad (28)$$

$$\tilde{G}^L(r, s; \xi) = \frac{1}{2\sqrt{r\xi}} [P_{1m}^L(r, s; \xi) e^{-s(r-\xi)} + Q_{2m}^L(r, s; \xi) e^{-s(2-\xi-r)}], \quad (29)$$

$$\tilde{G}_1^L(r, s; \xi) = \frac{1}{2\sqrt{r\xi}} [P_{3m}^L(r, s; \xi) e^{-s(r-\xi)} + Q_{3m}^L(r, s; \xi) e^{-s(2-\xi-r)}] - \frac{1}{\xi} \tilde{G}^L(r, s; \xi),$$

$$\tilde{G}_2^L(r, s; \xi) = \frac{1}{2\sqrt{r\xi}} [e^{-s(2-\xi-r)} Q_{3m}^L(r, s; \xi) - P_{3m}^L(r, s; \xi) e^{-s(\xi-r)}] - \frac{1}{\xi} \tilde{G}^L(\xi, s; r), \quad (30)$$

где

$$P_{im}^L(r, s; \xi) = \sum_{k=0}^m \frac{c_{ik}(r, \xi)}{s^{k+1}} \quad (i = 0, 1, 3), \quad Q_{jm}^L(r, s; \xi) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{g_{jk}(r, \xi)}{s^{k+2}} \quad (j = 2, 3);$$

$$c_{00}(r) = \frac{a_{10}}{h_0}, \quad h_0 = \beta, \quad g_0 = 1,$$

$$c_{0k}(r) = \frac{1}{h_0} \left[(-1)^k \frac{a_{1k}}{r^k} - \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-l} h_{k-l} c_{0l}(r) \right], \quad h_k = \beta a_{0k} - \zeta a_{1,k-1},$$

$$c_{1k}(r, \xi) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{a_{1l} a_{1,k-l}}{\xi^l r^{k-l}}, \quad c_{2k}(r, \xi) = (-1)^k \sum_{l=0}^k \frac{a_{1l} a_{1,k-l}}{\xi^l r^{k-l}},$$

$$c_{3k}(r, \xi) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{a_{1l} a_{0,k-l}}{\xi^l r^{k-l}}, \quad c_{4k}(r, \xi) = (-1)^k \sum_{l=0}^k \frac{a_{0l} a_{1,k-l}}{\xi^l r^{k-l}},$$

$$g_{2k}(r, \xi) = c_{20}(r, \xi) g_{1k} + \sum_{l=0}^k g_{1l} c_{2,k-l+1}(r, \xi),$$

$$g_{3k}(r, \xi) = c_{40}(r, \xi) g_k + \sum_{l=0}^k g_l c_{4,k-l+1}(r, \xi), \quad g_k = \frac{1}{\beta} \left(h_k - \sum_{l=0}^{k-1} (-1)^{k-l} h_{k-l} g_l \right) \quad (k \geq 1).$$

В соответствии со свойствами преобразования Лапласа оригиналы функций (28)–(30) записываются так ($\tau_+^\alpha = \tau^\alpha H(\tau)$):

$$G_0(r, \tau) = \frac{1}{\sqrt{r}} R_0(r, \tau), \quad \tilde{G}(r, \tau; \xi) = \frac{1}{2\sqrt{r\xi}} [R_1(r, \tau; \xi) + S_2(r, \tau; \xi)],$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}_1(\xi, \tau, r) &= \frac{1}{2\sqrt{r\xi}} [R_3(r, \tau, \xi) + S_3(r, \tau, \xi)] - \frac{1}{\xi} \tilde{G}(r, \tau, \xi), \\ \tilde{G}_2(\xi, \tau, r) &= \frac{1}{2\sqrt{r\xi}} [S_3(r, \tau, \xi) - R_3(r, \tau, \xi)] - \frac{1}{\xi} \tilde{G}(r, \tau, \xi),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}R_0(r, \tau) &= \sum_{k=0}^m \frac{c_{0k}(r)}{k!} (1 + \tau - r)_+^k, \quad R_i(r, \tau, \xi) = \sum_{k=0}^m \frac{c_{ik}(r, \xi)}{k!} (\tau + r - \xi)_+^k \quad (i = 1, 3), \\ S_j(r, \tau, \xi) &= \sum_{k=0}^{m-1} \frac{g_{jk}(r, \xi)}{(k+1)!} (2 + \tau - \xi - r)_+^{k+1} \quad (j = 2, 3).\end{aligned}$$

Свертки в (27) могут находиться численно с помощью квадратурных формул.

5. Пример

Полагаем, что материал цилиндра имеет следующие свойства: $\epsilon = 1,05 \cdot 10^4$ Ф/м, $\mu = 26,3$ ГПа, $\lambda = 51,1$ ГПа, $\rho = 2698,9$ кг/м³, $\sigma = 27 \cdot 10^6$ 1/(Ом·м), а дополнительные величины таковы: $r_1 = 1$ м, $E_* = 1$ В/м, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с, что соответствует безразмерным параметрам $\gamma = 5,21$, $\alpha = 8,057 \cdot 10^{-9}$. Начальные характеристики электрического поля и возмущения на поверхности цилиндра принимаем следующими: $\rho_{e0} = 1/\sqrt{r}$, $E_0 = 2\sqrt{r}/3$, $U_0(\tau) = \tau_+$.

Графики зависимостей перемещений от времени в точке $r = 0,5$ при учете различного числа членов рядов в (11) приведены на рис. 1. Пунктирная линия соответствует нулевому приближению, штрихпунктирная – двум членам, а сплошная линия – трем членам ряда. Добавление четвертого члена практически не меняет результата.

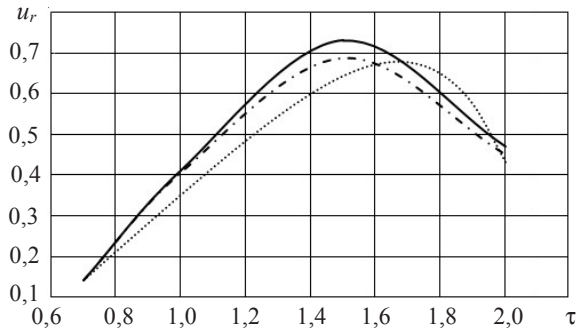


Рис. 1

Заключение

Предложен и реализован алгоритм решения одномерной связанной нестационарной задачи о радиальном деформировании кругового электромагнитоупругого цилиндра. Показано, что приемлемая точность решения достигается при учете трех членов ряда по малому параметру. Использованный подход может быть распространен на соответствующие осесимметричные задачи.

Список литературы

1. Подстригач Я.С., Бурак Я.И., Гачкевич А.Р., Чернявская Л.В. *Термоупругость электропроводных тел*. Киев: Наукова думка, 1977. 247 с.
2. Мусій Р.С. Розв'язування плоских динамічних крайових задач електромагнетотермопружності для циліндричних тіл. *Фіз.-хім. мех. матер.* 2000. Т. 36. №3. С. 35–41.
3. Шульга Н.А., Болкисев А.М. *Колебания пьезоэлектрических тел*. Киев: Наукова думка, 1990. 228 с.
4. Болкисев А.М., Ефимова Т.Л., Шульга Н.А. Колебания пьезокерамического полого цилиндра при механическом нагружении. *Прикладная механика*. 1985. Т. 21. №9. С. 109–112.
5. He Tianhu, Tian Xiaogeng, Shen Yapeng. A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder. *Eur. J. Mech. A*. 2005. Vol. 24. No 2. P. 349–359.
6. Wang X., Dong K. Magneto-thermodynamic stress and perturbation of magnetic field vector in a non-homogeneous thermoelastic cylinder. *Eur. J. Mech. A*. 2006. Vol. 25. No 1. P. 98–109.
7. Ватуляян А.О. Фундаментальные решения в нестационарных задачах электроупругости. *Прикладная математика и механика*. 1996. Т. 60. №2. С. 309–312.
8. Мельник В.Н. Теоремы существования и единственности обобщенного решения для одного класса нестационарных задач связанной электроупругости. *Изв. вузов. Математика*. 1991. №4. С. 24–32.
9. Бабаев А.Э., Маценко Г.Л. Взаимодействие нестационарной цилиндрической акустической волны с многомодовым цилиндрическим пьезопреобразователем. *Прикладная механика*. 1999. Т. 35. №10. С. 37–45.
10. Бабаев А.Э., Янчевский И.В. Излучение нестационарных акустических волн электроупругим цилиндром с проводной цепью. *Теоретическая и прикладная механика*. 2010. №1. С. 114–125.
11. Сеницкий Ю.Э. Динамическая задача электроупругости для неоднородного цилиндра. *Прикладная математика и механика*. 1993. Т. 57. №1. С. 116–122.
12. Шляхин Д.А. Нестационарная осесимметричная задача электроупругости для анизотропного пьезокерамического радиально поляризованного цилиндра. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2009. №1. С. 73–82.
13. Вестяк В.А., Лемешев В.А. Распространение нестационарных радиальных возмущений от цилиндрической полости в электромагнитоупругой среде. *Динамические и технологические проблемы механики конструкций и сплошных сред: Матер. XIV Междунар. симп. им. А.Г. Горшкова*. М. 2008. Т. 1. С. 59–60.
14. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Dynamic processes in thermoelectromagnetoelastic and thermoelastodiffusive media. In: *Encyclopedia of Thermal Stresses*. Vol. 2. Dordrecht–Heidelberg–New York–London: Springer, 2014. P. 1064–1071.
15. Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлаковский Д.В. *Волны в сплошных средах*. М.: Физматлит, 2004. 472 с.
16. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Одномерные нестационарные волны в электромагнитоупругом полупространстве и слое. *Докл. РАН*. 2009. Т. 426. №6. С. 747–749.
17. Вестяк В.А., Лемешев В.А., Тарлаковский Д.В. Распространение нестационарных радиальных возмущений от сферической полости в электромагнитоупругом пространстве. *Докл. РАН*. 2010. Т. 434. №2. С. 186–188.
18. *Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами*. Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. М.: Наука, 1979. 832 с.
19. Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление*. М.: Наука, 1969. 424 с.

References

1. Podstrigach Y.S., Burak Y.I., Gachkevich A.R., Chernyavskaya L.V. *Termouprugost elektroprovodnykh tel* [Thermoelasticity Conductive Bodies]. Kiev. Naukova dumka Publ. 1977. 247 p. (In Russian).
2. Musiy R.S. Rozv'yazuvannya ploskikh dinamichnikh krayovikh zadach elektromagneto-termoprzhnosti dlya tsilindrichnikh til [Solving flat electromagneto-thermoelastic dynamic

boundary problems for cylindrical body]. *Fiziko-khimicheskaya mekhanika materialov [Physico-chemical Mechanics of Materials]*. 2000. Vol. 36. No 3. P. 35–41 (In Ukrainian).

3. Shulga N.A., Bolkisev A.M. *Kolebaniya pyzoelektricheskikh tel [The Vibrations of the Piezoelectric Bodies]*. Kiev. Naukova dumka Publ. 1990. 228 p. (In Russian).

4. Bolkisev A.M., Efimova T.L., Shulga N.A. Kolebaniya pyzokeramicheskogo pologo tsilindra pri mekhanicheskom nagruzhenii [Fluctuations piezoceramic hollow cylinder under mechanical loading]. *Prikladnaya mekhanika [Journal of Applied Mechanics]*. 1985. Vol. 21. No 9. P. 109–112 (In Russian).

5. He Tianhu, Tian Xiaogeng, Shen Yapeng. A generalized electromagneto-thermoelastic problem for an infinitely long solid cylinder. *Eur. J. Mech. A*. 2005. Vol. 24. No 2. P. 349–359.

6. Wang X., Dong K. Magneto-thermodynamic stress and perturbation of magnetic field vector in a non-homogeneous thermoelastic cylinder. *Eur. J. Mech. A*. 2006. Vol. 25. No 1. P. 98–109.

7. Vatulyan A.O. Fundamental'nye resheniya v nestatsionarnykh zadachakh elektrouprugosti [Fundamental solutions of non-stationary electrodynamic problem]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*. 1996. Vol. 60. No 2. P. 309–312 (In Russian).

8. Melnik V.N. Teoremy sushchestvovaniya i edinstvennosti obobshchennogo resheniya dlya odnogo klassa nestatsionarnykh zadach svyazannoy elektrouprugosti [Theorems on the existence and uniqueness of generalized solutions for a class of non-stationary problems related electroelasticity]. *Izvestiya vuzov. Matematika [Proceedings of the Universities. Mathematics]*. 1991. No 4. P. 24–32 (In Russian).

9. Babaev A.E., Matsenko G.L. Vzaimodeystvie nestatsionarnoy tsilindricheskoy akusticheskoy volny s mnogomodovym tsilindricheskim p'yezopreobrazovatelem [Interaction of non-stationary cylindrical acoustic wave with cylindrical multi-mode piezoelectric transducer]. *Prikladnaya mekhanika [Journal of Applied Mechanics]*. 1999. Vol. 35. No 10. P. 37–45 (In Russian).

10. Babaev A.E., Yanchevskiy I.V. Izluchenie nestatsionarnykh akusticheskikh voln elektrouprugim tsilindrom s provodnoy tsepyu [Radiation of transient acoustic waves electroelasticity cylinder with a wire chain]. *Teoreticheskaya i prikladnaya mekhanika [Theoretical and Applied Mechanics]*. 2010. No 1. P. 114–125 (In Russian).

11. Senitskiy Y.E. Dinamicheskaya zadacha elektrouprugosti dlya neodnorodnogo tsilindra. [Dynamic electroelasticity problem for homogeneous cylinder]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*. 1993. Vol. 57. No 1. P. 116–122 (In Russian).

12. Shlyakhin D.A. Nestatsionarnaya osesimmetrichnaya zadacha elektrouprugosti dlya anizotropnogo p'yezokeramicheskogo radialno polyarizovannogo tsilindra [Nonstationary axisymmetric electroelasticity problem for an anisotropic piezoceramic radially polarized cylinder]. *Izvestiya RAN. Mekhanika tverdogo tela [Mechanics of Solids]*. 2009. No 1. P. 73–82 (In Russian).

13. Vestyak V.A., Lemeshev V.A. Rasprostranenie nestatsionarnykh radialnykh vozmushcheniy ot tsilindricheskoy polosti v elektromagnitouprugoy srede [Spread of unsteady radial perturbations of a cylindrical cavity in electromagnetoelastic environment]. *Dinamicheskie i tekhnologicheskie problemy mekhaniki konstruksiy i sploshnykh sred: Mater. XIV Mezhdunar. simp. im. A.G. Gorshkova*. Moscow. 2008. Vol. 1. P. 59–60 (In Russian).

14. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Dynamic processes in thermoelectromagnetoelastic and thermoelastodiffusive media. In: *Encyclopedia of Thermal Stresses*. Vol. 2. Dordrecht–Heidelberg–New York–London. Springer. 2014. P. 1064–1071.

15. Gorshkov A.G., Medvedsky A.L., Rabinsky L.N., Tarlakovskii D.V. *Volny v sploshnykh sredakh [Waves in Continuous Mediums]*. Moscow. Fizmatlit Publ. 2004. 472 p. (In Russian).

16. Vestyak V.A., Lemeshev V.A., Tarlakovskii D.V. One-dimensional time-dependent waves in an electromagnetoelastic half-space or in a layer. *Doklady RAN*. 2009. Vol. 54. Iss. 6. P. 262–264.

17. Vestyak V.A., Lemeshev V.A., Tarlakovskii D.V. The propagation of time-dependent radial perturbations from a spherical cavity in an electromagnetoelastic space. *Doklady RAN*. 2010. Vol. 55. Iss. 9. P. 468–470.

18. Abramovits M., Stigan I. (eds.). *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami [Special Functions Guide with Formulae, Diagrams and Mathematical Tables]*. Moscow. Nauka Publ. 1979. 832 p. (In Russian).

19. Elsgolts L.E. *Differentsial'nye uravneniya i variatsionnoe ischislenie [Differential Equations and Calculus of Variations]*. Moscow. Nauka Publ. 1969. 424 p. (In Russian).

**RADIAL TIME-DEPENDENT WAVES
IN AN ELECTROMAGNETOELASTIC CYLINDRICAL BODY**

Tarlakovskii D.V.^{1,2}, Scherbakov V.A.²

¹*Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation*

²*Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russian Federation*

In the present work is considered a radial time-dependent waves of an infinite cylindrical body. The body material is taken to be isotropic and electromagnetoelastic. Piezoelectric effects are not taken into account. The deformation process is described by a system of equation with respect to a radial deformation of the body points in cylindrical coordinate system. In additional, it takes into account the effect of current density, surface charges, electric and magnetic fields. All parameters and ratios are reduced to dimensionless form. To solve the problem, is used the Laplace transformation of time. Then, the resulting expressions expansion in series in terms of a small parameter. The small parameter characterizes the degree of coherence between elastic properties and electromagnetic field. Explicit formulas was obtained for the coefficients of the expansions of the components of the stress-strain state and the electromagnetic field in the space of Laplace transforms. To move into the space of the originals using the asymptotic representation of the solution in the vicinity of the start time.

Keywords: electromagnetoelasticity, cylindrical coordinate systems, time-dependent radial waves, Laplace transformation.