

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА НАПРЯЖЕНИЙ В УПРУГОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СТЕРЖНЕ*

© 2016 г.

Баландин Вл.Вл., Котов В.Л.

*Научно-исследовательский институт механики
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Российская Федерация*

rustydog2007@yandex.ru

Поступила в редакцию 17.10.2016

Рассматривается задача о действии усилий, приложенных к торцу цилиндрического стержня кругового сечения. Продемонстрирован эффект действия геометрической дисперсии при распространении вдоль стержня импульса напряжений с длиной волны, сравнимой с радиусом цилиндра. Проводится сравнение аналитического решения Похгаммера – Кри для первой (основной) формы распространения продольной волны расширения с численным решением в осесимметричной постановке. Продемонстрированы результаты применения известной методики восстановления импульса на торце стержня по его значениям на удалении от места приложения нагрузки. Отмечено, что искажения формы восстановленного импульса аналогичны искажениям, вызываемым действием эффекта Гиббса. Показано отличие результатов численного и аналитического решений, возможно, связанное с наличием в решении более высоких форм колебаний, которое возрастает с уменьшением длительности исходного импульса.

Ключевые слова: цилиндрический стержень, импульс напряжений, геометрическая дисперсия, численное решение, преобразование Фурье, эффект Гиббса.

Задача о распространении бегущих волн в бесконечном круговом стержне достаточно изучена, аналитическое решение этой задачи динамической теории упругости было получено Похгаммером и Кри [1–4]. К настоящему времени разработаны многочисленные приложения теории, положенные в основу модификаций и уточнений экспериментальной методики Кольского – Гопкинсона [5–11]. Суть их сводится к уменьшению влияния геометрической дисперсии при распространении импульсов в мерных стержнях на основе численного решения уравнения частот для определенной формы колебаний. Экспериментальные исследования свидетельствуют о практическом отсутствии вторых и более высоких форм колебаний при ударном приложении нагрузки к торцу стержня [2]. Наличие нескольких форм распрост-

* Выполнено при частичном финансировании Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-6944.2016.8) и РФФИ (грант №16-08-00825_а).

ранения волн возможно для коротких (по сравнению с радиусом стержня) импульсов. Их исследование наряду с экспериментальными методами в последнее время проводится также и численно [12, 13].

Рассматривается задача о нагружении кругового цилиндра с радиусом a и длиной L импульсом сжатия $p(t)$, приложенным к его торцу, боковая поверхность и другой торец цилиндра свободны от нормальных и касательных напряжений,

$$p(t) = \begin{cases} p_0 \sin^2\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right), & 0 \leq t \leq \frac{T_0}{2}, \\ 0, & t > \frac{T_0}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Материал цилиндра характеризуется упругими постоянными: модулем Юнга E , коэффициентом Пуассона ν и плотностью ρ .

Дисперсионное уравнение, связывающее фазовую скорость $c = \omega/s$ и длину волны $l = 2\pi/s$, следует из известных соотношений [1–3]:

$$A \left\{ 2G \left[\frac{\partial^2 J_0(hr)}{\partial r^2} \right]_{r=a} - \frac{\omega^2 \rho \lambda}{\lambda + 2G} J_0(ha) \right\} + 2GsC \left[\frac{\partial J_1(\kappa r)}{\partial r} \right]_{r=a} = 0, \quad (2)$$

$$2As \left[\frac{\partial J_0(hr)}{\partial r} \right]_{r=a} + C \left(2s^2 - \frac{\omega^2 \rho}{G} \right) J_1(\kappa a) = 0.$$

Здесь A, C – постоянные, s – волновое число, $\lambda = \nu E / ((1 + \nu)(1 - 2\nu))$ – параметр Ламе, $G = E / (2(1 + \nu))$ – модуль сдвига; $h = \sqrt{\omega^2 / c_e^2 - s^2}$, $\kappa = \sqrt{\omega^2 / c_s^2 - s^2}$, $c_e = \sqrt{(\lambda + 2G) / \rho}$, $c_s = \sqrt{G / \rho}$ – скорости продольной и сдвиговой волн; J_0, J_1 – функции Бесселя [3].

Исключая из (2) отношение A/C , получим известное уравнение частот, позволяющее определить фазовую скорость для синусоидальных волн любой частоты в бесконечно длинном цилиндре. Решение этого уравнения получено численно при следующих значениях параметров: $a = 0,01$ м, $L = 2$ м, $E = 190$ ГПа, $\nu = 0,29$, $\rho = 7900$ кг/м³. Результаты представлены на рис. 1 в виде зависимости отношения c/c_0 от частоты $f = \omega / (2\pi)$, $c_0 = \sqrt{E / \rho}$.

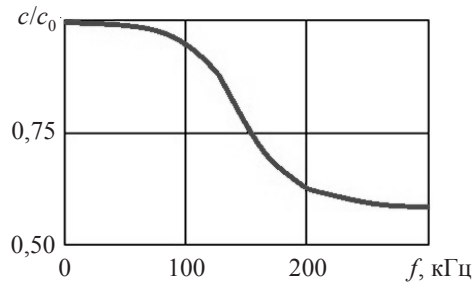


Рис. 1

Для нахождения среднего осевого напряжения на расстоянии z_0 от торца стержня представим импульс (1) в дискретном виде набором точек $p_n = p(t_n)$, $t_n = n\Delta t$, $n = 0, N - 1$, где Δt – шаг дискретизации, и воспользуемся дискретным преобразованием Фурье

$$p_n = \sum_{k=0}^K C_k \cos \frac{2\pi k(n + \varphi_k)}{N} = \sum_{k=0}^K A_k \cos \frac{2\pi kn}{N} + \sum_{k=0}^K B_k \sin \frac{2\pi kn}{N}. \quad (3)$$

Здесь $K + 1$ – количество членов ряда Фурье.

Коэффициенты в (3) вычисляются следующим образом:

$$A_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} p_i \cos \frac{2\pi ki}{N}, \quad k = 1, \dots, K-1, \quad A_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} p_i, \quad A_K = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} p_i \cos \frac{2\pi Ki}{N},$$

$$B_k = \frac{2}{N} \sum_{i=0}^{N-1} p_i \sin \frac{2\pi ki}{N}, \quad k = 0, \dots, K, \quad (4)$$

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}, \quad \varphi_k = -\operatorname{arctg} \left(\frac{B_k}{A_k} \right).$$

Влияние дисперсии учитывается сдвигом по частоте на величину $\Delta\varphi$ в каждой гармонике [7]:

$$\tilde{p}_n = \sum_{k=0}^{N/2} C_k \cos \frac{2\pi k(n + \varphi_k + \Delta\varphi_k)}{N}, \quad (5)$$

$$\Delta\varphi_k = \omega_k z_0 \left(\frac{1}{c_0} - \frac{1}{c(\omega_k)} \right), \quad \omega_k = \frac{2\pi k(N-1)}{N\Delta t}.$$

Значения $c(\omega)$ определяются численной интерполяцией определенных ранее решений частотного уравнения (2) (см. также рис. 1). Заметим, что при малых отличиях фазовой скорости $c(\omega)$ от c_0 малым будет и сдвиг по частоте. Величина z_0 в (5) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В первом случае значения \tilde{p}_n будут представлять искаженные геометрической дисперсией значения исходного импульса p_n на расстоянии z_0 от нагруженного торца. Во втором случае при $z_0 < 0$, если в качестве исходных значений импульса выбрать \tilde{p}_n , получим приближение к p_n .

Задача о распространении импульса вида (1) с параметрами $p_0 = 1$ МПа, $T_0 = 20$ мкс в упругом стержне, характеристики которого указаны выше, решена численно и аналитически. В аналитическом решении Похгаммера – Кри (5) принимались следующие значения параметров: $N = 1024$, $K = N/2 + 1$, $\Delta t = 1$ мкс, $z_0 = 1$ м. Значение $N = 1024$ выбрано таким образом, чтобы решение по формулам (2), (5) при N и $N/2$ отличалось менее чем на 0,1%. Численные расчеты проводились в цилиндрической системе координат rOz (Oz – ось симметрии стержня) на основе конечно-разностной схемы «крест» второго порядка точности и разностной сетки с квадратными ячейками с размером стороны a/m , $m = 20$. Анализ сходимости численных решений показал, что решения при m и $2m$ отличались менее чем на 0,1%. Так как импульс (1) обладает необходимой гладкостью, решение проводилось с числом Куранта, равным 1, с применением процедуры консервативного сглаживания [14]. Среднее осевое напряжение по сечению стержня рассчитывалось по формуле

$$p = \frac{1}{S_0} \sum_{i=1}^m \sigma_{zz}^i \Delta S_i, \quad S_0 = \pi a^2, \quad \Delta S_i = \pi(r_{i+1}^2 - r_i^2).$$

На рис. 2 представлены зависимости p/p_0 от времени: исходный импульс (кривая 1); решение по формуле (4) (кривая 2); численное решение по схеме «крест» (кривая 3) при $z_0 = 1$; исходный импульс, восстановленный по формуле (5) при

$z_0 = -1$ (кривая 4). Для удобства сравнения кривые 1–4 наложены друг на друга со сдвигом по времени.

Максимальное значение импульсов, полученных при $z_0 = 1$ м, уменьшилось на 40% по сравнению с исходным. Отметим, что точное решение Похгаммера – Кри для первой формы (кривая 2) и численное решение, отображаемое кривой 3 на рис. 2, начинают отличаться при $t > 40$ мкс. Это свидетельствует о наличии в решении более высоких форм колебаний, которые учитываются в численном решении, что приводит к ошибкам в восстановлении импульса (до 10% в данном случае).

Заметим также, что количество гармоник ряда Фурье $K = N/2 + 1$ позволяет точно восстановить исходный дискретный импульс, при меньших значениях K в решении возникают ошибки. На рис. 3 кривыми 1–3 представлены разложения в ряд вида (3) при K , равном соответственно 257, 129, 66. Видно увеличивающееся отличие, связанное с действием эффекта Гиббса – недостаточное количество членов ряда для аппроксимации быстро меняющейся функции. Отметим сходство кривой 4 на рис. 2 и кривой 2 на рис. 3.

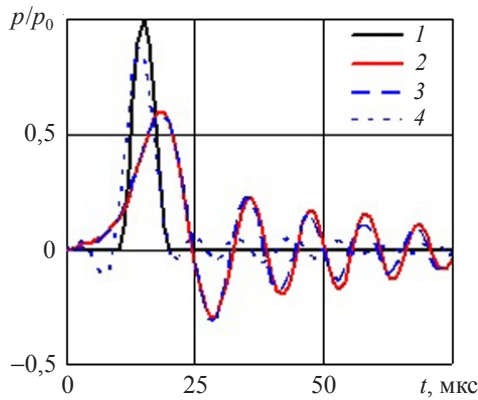


Рис. 2

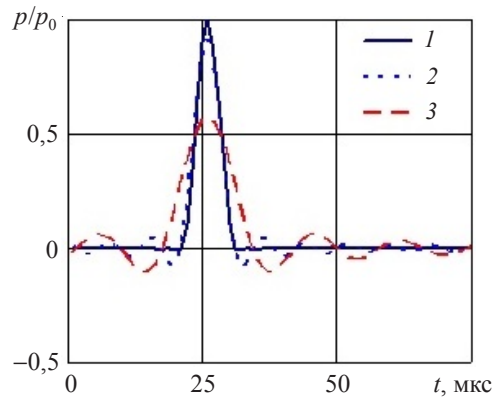


Рис. 3

Рассмотрим амплитудно-частотные характеристики полученных импульсов. На рис. 4 представлены зависимости безразмерных коэффициентов C_k/p_0 от частоты $f_k = \omega_k/(2\pi)$, кривые 1 и 2 соответствуют значениям для исходного импульса на торце стержня и численному решению, полученному при $z_0 = 1$ м. На рис. 5 представлены те же зависимости в логарифмическом масштабе по оси ординат.

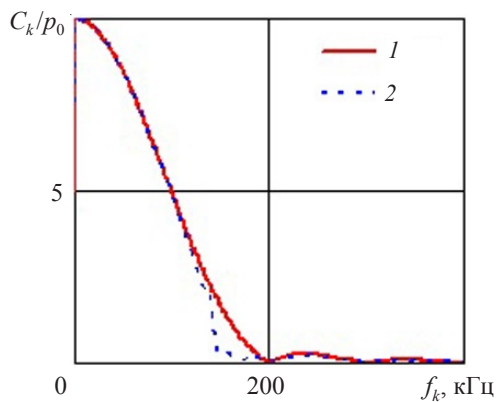


Рис. 4

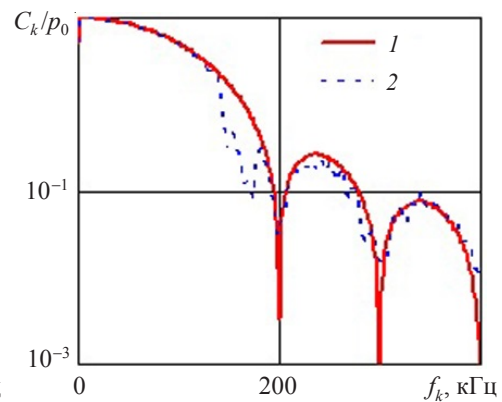


Рис. 5

Основной вклад в решение дают гармоники с частотой $f_k < 200$ кГц, однако при $f = f^* \approx 145$ кГц наблюдается явное отличие. Эта частота является критической для рассмотренной системы [13] и определяется коэффициентом Пуассона и радиусом стержня.

Для сравнения решена также задача при $T_0 = 40$ мкс, результаты показаны на рис. 6 (обозначения осей и кривых такие же же, как на рис. 2). Видно, что численное решение, полученное при $z_0 = 1$ м, достаточно близко к аналитическому. Максимальное значение импульса уменьшилось на 15%, при этом форма восстановленного импульса близка к исходной. Отличие в коэффициентах ряда Фурье, представленных на рис. 7 в логарифмическом масштабе по оси ординат, наблюдается при том же значении частоты $f = f^*$, но существенного вклада в решение это уже не вносит.

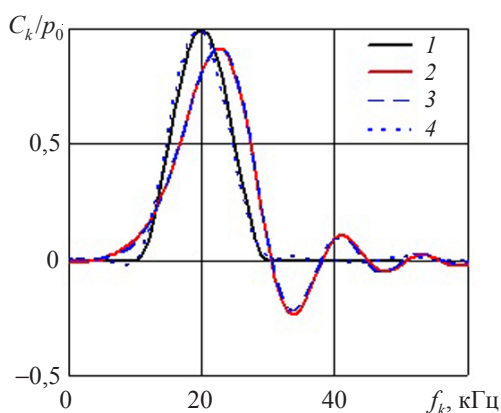


Рис. 6

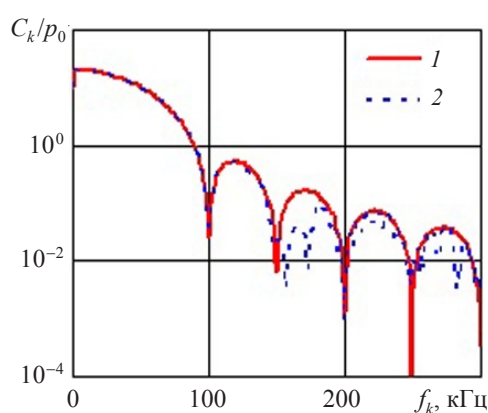


Рис. 7

В экспериментах импульсы подобной формы и длительности формируются, например, при исследовании динамических характеристик грунтовых сред или хрупких материалов с использованием техники мерных стержней в обращенных экспериментах [15, 16] или методики Кольского [17–19]. Можно предположить, что при наличии в регистрируемом импульсе гармоник с частотой, близкой к полученной критической частоте $f^* \approx 145$ кГц (для значений радиуса стержня $a = 0,01$ м и коэффициента Пуассона $\nu = 0,29$), ошибка в восстановлении импульса на торце стержня по его значениям на удалении от торца будет неустранимой.

Список литературы

1. Кольский Г. *Волны напряжения в твердых телах*. М.: ИЛ, 1955. 194 с.
2. Дейвис Р.М. *Волны напряжений в твердых телах*. М.: ИЛ, 1961. 104 с.
3. Григолюк Э.И., Селезов И.Т. *Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек*. М.: ВИНТИ, 1973. 272 с.
4. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
5. Hsieh D.Y., Kolsky N. An experimental study of pulse propagation in elastic cylinders. *Proceedings of the physical society*. 1961. Vol. 71. No 4. P. 608–612. DOI: 10.1088/0370-1328/71/4/308.
6. Follansbee P.S., Frantz C. Wave propagation in the split Hopkinson pressure bar. *J. Eng. Mater. Technol.* 1983. Vol. 105. No 1. P. 61–66. DOI: 10.1115/1.3225620.
7. Gorham D. A numerical method for the correction of dispersion in pressure bar signals. *J. Phys. E, Sci. Instrum.* 1983. Vol.16. P. 477–479. DOI: 1088/0022-3735/16/6/008.

8. Корнев В.М. Уточнение зависимостей метода составного стержня Кольского – Гопкинсона. *Изв. СО РАН. ПМТФ*. 1992. №3. С. 127–131.
9. Юношев А.С., Сильвестров В.В. Разработка методики полимерного разрезного стержня Гопкинсона. *Изв. СО РАН. ПМТФ*. 2001. Т. 42. №3. С. 212–220.
10. Bacon C., Lataillade J-L. Development of the Kolsky – Hopkinson technics and applications for non-conventional testing. In: *New Experimental Methods in Material Dynamics and Impact*. Nowacki W.K., Klepaczko J.R. (Eds). 2001. Warsaw, Poland. P. 1–58.
11. Gary G. Some aspects of dynamic testing with wave-guides. In: *New Experimental Methods in Material Dynamics and Impact*. Nowacki W.K., Klepaczko J.R. (Eds). 2001. Warsaw, Poland. P. 179–222.
12. Tyas A., Pope D.J. Full correction of first-mode Pochhammer – Chree dispersion effects in experimental pressure bar signals. *Meas. Sci. Technol.* 2005. Vol. 16. No 3. P. 642–652. DOI: 10.1088/0957-0233/16/3/004.
13. Tyas A., Ozdemir Z. On backward dispersion correction of Hopkinson pressure bar signals. *Phil. Trans. R. Soc. A*. 2014. Vol. 37. No 2. P. 1–11. DOI: 10.1098/rsta.2013.0291.
14. Баженов В.Г., Кочетков А.В., Цветкова Е.В. Исследование некоторых способов согласования различных разностных схем при решении динамических контактных задач. *Проблемы прочности и пластичности*: Межвуз. сб. 2002. Вып. 64. С. 162–171.
15. Брагов А.М., Котов В.Л., Кочетков А.В., Крылов С.В. Обращенный эксперимент и численный анализ осесимметричных процессов соударения твердых тел и песчаного грунта. *Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов*: Межвуз. сб. 1999. Вып. 60. С. 12–18.
16. Баладин В.В., Котов В.Л., Крылов С.В., Цветкова Е.В. Исследование взаимодействия полусферического ударника с грунтовой средой. *Проблемы прочности и пластичности*: Межвуз. сб. 2001. Вып. 63. С. 141–147.
17. Баженов В.Г., Брагов А.М., Зефилов С.В., Котов В.Л., Кочетков А.В., Крылов С.В., Ломунов А.К. Анализ применимости модифицированного метода Кольского для динамических испытаний грунтовых сред в деформируемой обойме. *Изв. СО РАН. ПМТФ*. 2000. Т. 41. №3. С. 155–162.
18. Брагов А.М., Котов В.Л., Ломунов А.К., Сергеевичев И.В. Анализ особенностей изменения динамических характеристик мягких грунтов методом Кольского. *Изв. СО РАН. ПМТФ*. 2004. Т. 45. №4. С. 147–153.
19. Брагов А.М., Константинов А.Ю., Медведкина М.В. Дисперсия волн в разрезных стержнях Гопкинсона при динамических испытаниях хрупких материалов. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2011. №6 (1). С. 158–162.

References

1. Kolsky H. *Stress Waves in Solids*. Oxford. 1953. 194 p.
2. Devis R.M. Stress Waves in Solids. In: *A Collection of Surveys of the Present Position of Research in Some Branches of Mechanics Written in Commemoration of the 70th Birthday of G.I. Taylor*. Ed. G.K. Batchelor and R.M. Davies. Cambridge. 1956.
3. Grigolyuk E.I., Seleznev I.T. *Neklassicheskie teorii kolebaniy sterzhney, plastin i obolochek* [Non-classical Theory of Vibrations of Rods, Plates and Shells]. Moscow. VINITI Publ. 1973. 272 p. (In Russian).
4. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semeryakova N.P. *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost'* [Waves in the Rods. Dispersion. Dissipation. Nonlinearity]. Moscow. Fizmatlit Publ. 2002. 208 p. (In Russian).
5. Hsieh D.Y., Kolsky H. An experimental study of pulse propagation in elastic cylinders. *Proceedings of the Physical Society*. 1961. Vol. 71. No 4. P. 608–612 DOI: 10.1088/0370-1328/71/4/308.
6. Follansbee P.S., Frantz C. Wave propagation in the split Hopkinson pressure bar. *J. Eng. Mater. Technol.* 1983. Vol. 105. No 1. P. 61–66. DOI: 10.1115/1.3225620.
7. Gorham D. A numerical method for the correction of dispersion in pressure bar signals. *J. Phys. E, Sci. Instrum.* 1983. Vol. 16. P. 477–479. DOI: 10.1088/0022-3735/16/6/008.

8. Kornev V.M. Utochnenie zavisimostey metoda sostavnogo sterzhnya Kol'skogo–Gopkinsona [Clarification of the relationship of the composite rod Kolsky – Hopkinson method]. *Izv. SO RAN PMTF [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*. 1992. No 3. P. 127–131 (In Russian).
9. Yunoshev A.S., Silverstov V.V. Razrabotka metodiki polimernogo razreznogo sterzhnya Gopkinsona [Development of the polymetric split Hopkinson bar technique]. *Izv. SO RAN PMTF [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*. 2001. Vol. 42. No 3. P. 212–220 (In Russian).
10. Bacon C., Lataillade J-L. Development of the Kolsky – Hopkinson technics and applications for non-conventional testing. In: *New Experimental Methods in Material Dynamics and Impact*. Nowacki W.K. and Klepaczko J.R. (Eds). 2001. Warsaw, Poland. P. 1–58.
11. Gary G. Some aspects of dynamic testing with wave-guides. In: *New Experimental Methods in Material Dynamics and Impact*. Nowacki W.K. and Klepaczko J.R. (Eds). 2001. Warsaw, Poland. P. 179–222.
12. Tyas A., Pope D.J. Full correction of first-mode Pochhammer – Chree dispersion effects in experimental pressure bar signals. *Meas. Sci. Technol.* 2005. Vol. 16. No 3. P. 642–652 DOI: 10.1088/0957-0233/16/3/004).
13. Tyas A., Ozdemir Z. On backward dispersion correction of Hopkinson pressure bar signals. *Phil. Trans. R. Soc. A.* 2014. Vol. 37. No 2. P. 1–11 DOI: 10.1098/rsta.2013.0291.
14. Bazhenov V.G., Kochetkov A.V., Tsvetkova E.V. Issledovanie nekotorykh sposobov soglasovaniya razlichnykh raznostnykh skhem pri reshenii dinamicheskikh kontaktnykh zadach [Studying certain ways of matching different difference schemes in analyzing dynamic contact problems]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2002. Iss. 64. P. 162–171 (In Russian).
15. Bragov A.M., Kotov V.L., Kochetkov A.V., Krylov S.V. Obrashchennyy eksperiment i chislennyy analiz osesimmetrichnykh protsessov soudareniya tverdykh tel i peschanogo grunta [Accessed experiment and numerical analysis of axisymmetric processes of collision solids and sandy soil]. *Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti [Applied Problems of Strength and Plasticity]*. 1999. Iss. 60. P. 12–18 (In Russian).
16. Balandin V.V., Kotov V.L., Krylov S.V. Issledovanie vzaimodeystviya polusfericheskogo udarnika s gruntovoy sredoy [Investigation of hemispherical impactor-ground medium interaction]. *Problemy prochnosti i plastichnosti [Problems of Strength and Plasticity]*. 2001. Iss. 63. P. 141–147 (In Russian).
17. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Zefirov S.V., Kotov V.L., Kochetkov A.V., Krylov S.V., Lomunov A.K. Analiz primenimosti modifitsirovannogo metoda Kol'skogo dlya dinamicheskikh ispytaniy gruntovykh sred v deformiruемой oboyme [Analysis of applicability Kolsky modified method for dynamic testing of soils in a deformable cage]. *Izv. SO RAN. PMTF [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*. 2000. Vol. 41. No 3. P. 155–162 (In Russian).
18. Bragov A.M., Kotov V.L., Lomunov A.K., Sergeichev I.V. Analiz primenimosti modifitsirovannogo metoda Kolskogo dlya dinamicheskikh ispytaniy gruntovykh sred v deformiruемой oboyme [Measurement of the dynamic characteristics of soft soils using the Kolsky method]. *Izv. SO RAN. PMTF [Journal of Applied Mechanics and Technical Physics]*. 2004. Vol. 45. No 4. P. 147–153 (In Russian).
19. Bragov A.M., Konstantinov A. Yu., Medvedkina M.V. Dispersiya voln v razreznnykh sterzhnyakh Gopkinsona pri dinamicheskikh ispytaniyakh khрупkikh materialov [Dispersion of waves in a split Hopkinson rods in dynamic tests of brittle materials]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo [Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod]*. 2011. No 6 (1). P. 158–162 (In Russian).

**STUDYING THE PROPAGATION OF A STRESS PULSE
IN AN ELASTIC CYLINDRICAL BAR**

Balandin V.I., Kotov V.L.

*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

The problem of the effect of a load applied to an end of a cylindrical bar of a circular cross-section is considered. The effect of geometrical dispersion is demonstrated for a stress pulse with the wavelength comparable to the cylinder radius, propagating along the bar. Analytical Pohhammer-Kri solution for the first (main) propagation form of a longitudinal expansion wave is compared with a numerical solution in an axisymmetrical formulation. The results of using a well-known method of reconstructing a pulse at the end of a bar based on its values at a distance from the load application point are demonstrated. It is noted that distortions of the reconstructed pulse form are similar to distortions due to Gibbs effect. The difference between the results of numerical and analytical solutions is also noted, which may be connected with the presence in the solution of higher oscillation forms, and which increases with decreasing the length of the initial pulse.

Keywords: cylindrical bar, stress pulse, geometrical dispersion, numerical solution, Fourier transform, Gibbs effect.