

УДК 626.421.4

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ ПОТОКА НА РАБОЧИЕ ВОРОТА СУДОХОДНЫХ ШЛЮЗОВ

И.В. Липатов

Нижний Новгород

Рассмотрен вопрос о численном моделировании процесса гидродинамического воздействия потока на рабочие ворота судоходных шлюзов на базе решения уравнений Навье–Стокса с учетом динамики свободной поверхности. Для предлагаемой модели сформулированы граничные и начальные условия. Описан подход к выбору области интегрирования. Полуобратным методом подобрана математическая модель для описания турбулентности в потоке, обтекающем рабочие ворота. Для разработанной модели представлены результаты верификационных расчетов.

1. Введение

Подъемно-опускные ворота являются одним из важнейших элементов судоходного сооружения, поскольку от их работы в большей части зависит работа шлюза в целом. Они относятся к часто действующим элементам оборудования, которые регулируют поток воды и непосредственно выполняют операции по пропуску флота. В случае выхода их из строя прекращается работа сооружения по судопропуску, что ведет к большим экономическим потерям. Для избежания подобных ситуаций необходимо точное знание гидродинамических нагрузок, воздействующих на ворота, как на стадии проектирования ворот, так и при оценке остаточного прочностного ресурса в процессе эксплуатации.

Определение гидродинамического воздействия нагрузок на подъемно-опускные ворота шлюза представляет собой сложную многофакторную задачу. На сегодняшний день для ее решения сформировались два различных подхода. Первый – теоретический, базирующийся на исследовании процесса истечения потока из-под ворот на основе решения уравнений механики жидкости. Второй – экспериментальный, базирующийся на данных, полученных на основе наблюдений, с последующим созданием эмпирических зависимостей значения гидродинамической силы как функции от наиболее влиятельных факторов. Существенным недостатком первого подхода является то, что он, как правило, не позволяет исследовать структуру потока с целью раскрытия физики процесса, к тому же возможности получения теоретических решений крайне ограничены. Что касается второго пути, то он является очень дорогостоящим, при лабораторных исследованиях мы неминуемо сталкиваемся с присутствием масштабного фактора.

Развитие парка персональных компьютеров и их вычислительных возможностей дало импульс к развитию нового подхода в решении данной задачи – численного моделирования гидродинамических процессов, имеющих место при обтекании

рабочих ворот. Первая попытка решения задачи применительно к конструкции плоских опускных ворот была предпринята автором совместно с А.П. Горячевым в [1]. Особенность задачи состояла в том, что процесс обтекания конструкции имел безотрывной характер. В результате вопрос о поведении свободной поверхности и описании отрывных зон не стоял. Это существенно облегчило поиск решения, так как позволило ограничиться рассмотрением движения потока в расчетной области без учета поведения свободной поверхности.

Эксплуатация современных подъемно-опускных ворот показывает, что обтекание конструкции сопровождается более сложными гидродинамическими процессами [2]. В частности, поток, проходящий через сечение под рабочими воротами, отрывается как от порога камеры шлюза, так и от напорной грани ворот. Данный факт становится определяющим для характера гидродинамической нагрузки, действующей на ворота. Таким образом, становится очевидной необходимость усовершенствования математической модели и ее дополнение уравнением поведения свободной поверхности в расчетной области. Это является особенно важным при расчете подъемно-опускных ворот с консольным типом струенаправляющего козырька, как это имеет место на Городецком шлюзе.

2. Математическая постановка задачи

Учитывая габаритные размеры рабочих ворот, решение задачи выполним в двумерной постановке. Основой для создания математической модели является система уравнений Навье–Стокса:

$$\begin{aligned} \frac{dV_x}{dt} - \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} \right) &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{dV_y}{dt} - \nu \cdot \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} \right) &= g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}, \end{aligned} \quad (1)$$

где V_x, V_y – компоненты абсолютной скорости движения жидкости; p – давление; x, y – координаты точки, t – время, ν – величина эффективной вязкости, ρ – плотность, g – ускорение свободного падения.

Принимая во внимание то, что при решении необходимо отслеживать границы раздела сред вода–воздух, систему уравнений (1) дополним еще одним выражением для маркера типа сред в каждой точке расчетной области. С помощью этого маркера в дальнейшем будем отслеживать характер распределения сред. Первоначально методика объемного слежения – метод VOF – была предложена Херлоу в [3]. Затем Херт и Николз [4] для величины VOF-скаляра сформулировали следующее уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial t} C + \mathbf{U} \operatorname{grad} C = 0, \quad (2)$$

где C – объемная концентрация VOF-скаляра, \mathbf{U} – вектор скорости. Уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \mathbf{U} = 0 \quad (3)$$

и может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{D}{Dt} (\log_e \rho) + \nabla \mathbf{U} = 0, \quad (4)$$

где ρ – плотность, а D/Dt – полная производная по плотности. Допускаем, что плотность жидкости и воздуха постоянна, тогда уравнение (4) принимает вид:

$$\nabla \mathbf{U} = 0. \quad (5)$$

Подставляя его в уравнение (2), получаем выражение:

$$\frac{\partial}{\partial t} C + \nabla C \mathbf{U} = 0, \quad (6)$$

где величина C может иметь только два значения: 1 – для жидкости и 0 – для воздуха.

Помимо описания поведения VOF-скаляра, для замыкания системы уравнений (1) необходимо определить математическую модель для описания турбулентных эффектов в потоке жидкости. В явном виде за их присутствие в системе уравнений (1) отвечает эффективная вязкость ν . Согласно современным представлениям о природе турбулентных процессов, эффективная вязкость ν является алгебраической суммой кинематической ν_k и турбулентной вязкости ν_t . Последнюю величину еще называют коэффициентом турбулентного обмена. Кинематическая является константой жидкости. Определение турбулентной вязкости неоднозначно, для ее определения воспользуемся k - ϵ подходом, согласно которому:

$$\nu_t = c_p \frac{k^2}{\epsilon}, \quad (7)$$

где k – кинетическая энергия турбулентности; c_p – константа жидкости; ϵ – коэффициент диссипации турбулентной энергии [5].

Для практической реализации численной математической модели необходимо описать расчетную область интегрирования, в которой движение потока определяется соответствующими граничными и начальными условиями. Необходимость определения начальных условий возникает в результате того, что для каждого квазистационарного местоположения рабочих ворот при соответствующем открытии ворот предполагается моделирование растекания жидкости до момента достижения потоком стационарного состояния. Возможность моделирования поведения потока в период поднятия ворот с помощью разбивки процесса на группу квазистационарных состояний следует из того, что скорость поднятия ворот несоизмерима со скоростью потока.

Схема расчетной области применительно к конструкции консольного струенаправляющего козырька, характерного для Городецкого шлюза, представлена на рис. 1. Нижняя часть расчетной области захватывает камеру гашения и выбрана таким образом, чтобы поток, покидающий напорную грань конструкции, не испытывал никаких препятствий при падении вниз. Такое упрощение введено специально, так как наиболее важным является свободное истечение потока. В этом случае нет противодействия на конструкцию с безнапорной грани и сила, действующая на ворота, максимальная.

$$\frac{dk}{dn} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dn} = 0, \quad \text{VOF} = 1; \quad (13)$$

г) для $L < x < L + B$ и $y = 0$

$$p = 0, \quad \frac{dk}{dn} = 0, \quad \frac{d\varepsilon}{dn} = 0, \quad \frac{d\text{VOF}}{dn} = 0, \quad (14)$$

где $\gamma_{\text{воды}} = 10 \text{ кН/м}^3$ – удельный вес воды.

Для исследования динамики изменения гидродинамической нагрузки при маневрировании ворот весь процесс разбивается на несколько интервалов, причем каждый имеет свою индивидуальную расчетную сетку. Каждый интервал соответствует определенной высоте поднятия ворот над порогом. Расчет по математической модели продолжается до тех пор, пока поток не достигнет стационарного состояния, полностью повторяя лабораторный эксперимент. В качестве начального состояния системы выберем момент, когда вода находится только над порогом шлюза, а сечение MD наглухо перекрыто. В момент времени $t = 0$ перекрытие в сечении MD резко убирается и поток начинает поступать в камеру шлюза, обтекая ворота. После достижения потоком стационарного состояния эпюра гидродинамического давления на поверхность ворот примет свой расчетный вид. Исходя из этого, начальные условия для задачи запишутся следующим образом:

– для $0 < x < L_p$ и $H_K + H_p < y < H_K + H_p + H_\Gamma$

$$p = \gamma_{\text{воды}} (H_K + H_p + H_\Gamma - n), \quad V_x = V_y = 0, \quad k = \varepsilon = 0, \quad \text{VOF} = 1; \quad (15)$$

– для всех остальных точек пространства

$$p = \gamma_{\text{воздуха}} (H_K + H_p + H_\Gamma + H_B - n), \quad V_x = V_y = 0, \quad k = \varepsilon = 0, \quad \text{VOF} = 0, \quad (16)$$

где $\gamma_{\text{воздуха}} = 11,2 \text{ Н/м}^3$ – удельный вес воздуха.

Имея область интегрирования и сформулированные граничные и начальные условия, нельзя перейти к решению задачи, пока не решена проблема замыкания системы уравнений, то есть не решен вопрос об учете турбулентности в потоке. Как показала практика, все попытки рассмотрения потока как ламинарного ведут к некорректным результатам и дальнейшее применение такого подхода бессмысленно.

3. Метод и алгоритм численного решения

Для численного решения используем дискретизацию с помощью метода контрольного объема [6]. Суть метода состоит в следующем. Расчетная область разбивается на некоторое число непересекающихся контрольных объемов таким образом, что каждая узловая точка содержится в одном контрольном объеме. Дифференциальные уравнения (1) интегрируют по каждому контрольному объему. Для вычисления интегралов используют кусочные функции, которые описывают изменение исследуемой величины между узловыми точками. В результате находят дискретный аналог дифференциального уравнения, в который входят значения исследуемой величины в нескольких узловых точках. Одним из важных преимуществ метода контрольного объема является то, что в нем заложено точное интегральное сохранение таких величин, как масса, количество движения и энергия для любого объема, группы объемов и всей расчетной области. Это свойство справедливо при любом количестве узловых точек, поэтому даже решение на грубой сетке будет

удовлетворять точным интегральным балансам.

Запишем уравнение сохранения некоторой потоковой величины ϕ в обобщенной форме:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u} \phi) = 0. \quad (17)$$

Проинтегрируем уравнение (17) и полученное выражение подвергнем дискретизации:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho \phi dV + \int_S \rho \mathbf{u} \phi dS = 0, \quad (18)$$

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V_p} \rho \phi dV}_{T_1} + \underbrace{\sum_j \int_{S_j} \rho \mathbf{u} \phi dS}_{T_2} = 0, \quad (19)$$

где S – вектор нормали; j – номер грани шестигранной пространственной ячейки. Слагаемые формулы (19) представим в следующем виде:

$$T_1 \approx \frac{(\rho \phi V)_p^{n+1} - (\rho \phi V)_p^n}{\delta t}, \quad (20)$$

$$T_2 \approx \sum_j (\rho \mathbf{u} \phi \cdot \mathbf{S})_j \equiv \sum_j C_j, \quad C_j \equiv F_j \phi_j, \quad (21)$$

где $F_j \equiv (\rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{S})_j$. Здесь верхние индексы относятся к соответствующим временным слоям.

Для дискретизации используется схема Кренка–Николсона, имеющая второй порядок точности:

$$C_j \equiv \frac{1}{2} (F_j^{n+1/2} \phi_j^{n+1} + F_j^{n+1/2} \phi_j^n), \quad (22)$$

где

$$F_j^{n+1/2} \equiv \frac{1}{2} (F_j^{n+1} + F_j^n).$$

Окончательная форма дискретизированного уравнения конечного объема достигается путем подстановки различных аппроксимационных величин в уравнениях (19) и вывода уравнения дискретизированной неразрывности в форме:

$$\frac{(p\nu)^n + (p\nu)^0}{\partial t} + \sum F_i = 0. \quad (23)$$

В таком случае текущие значения F_j на $n+1$ шаге определяют по полной явной схеме, а на $n+1/2$ – по схеме Кренка–Николсона. В конечном итоге его можно представить в более компактной форме:

$$A_p \Phi_p^n = \sum A_m \Phi_m^n + S_m + B_p \Phi_p^n, \quad (24)$$

где A_m – эффект конвекции и/или рассеяния; $B_p = (p\nu)^0/\delta t$; величина A_p описывается выражением:

$$A_p = \sum A_m + S_p + B_p. \quad (25)$$

Такое уравнение, как (24), существует также для каждой расчетной ячейки (соответствующим образом модифицировано для задания граничных условий). Наборов таких уравнений существует столько же, сколько и переменных, если принять во внимание уравнение неразрывности.

4. Замыкание системы гидродинамических уравнений

Для учета турбулентных касательных напряжений в потоке при решении уравнений Навье–Стокса используют их взаимосвязь с коэффициентом турбулентного обмена через скорость потока. В свою очередь, согласно выражению (7), коэффициент турбулентного обмена связан с величинами k и ϵ . Таким образом, подобрав уравнения для описания поведения величин k и ϵ в расчетной области, мы окончательно замкнем разрабатываемую математическую модель и получим возможность перейти к расчетам.

Учитывая широкое распространение k – ϵ подхода, многие авторы предлагают различные уравнения для определения k и ϵ [7–12]. Эти уравнения, как правило, ориентированы на определенный класс течений для учета специфики турбулентности в них. Как показал анализ первоисточников, на сегодняшний день опыт в описании потоков на шлюзах отсутствует, поэтому для подбора адекватной модели турбулентности после серии лабораторных экспериментов использовался полуобратный подход.

Для минимизации объема работы на начальном этапе выполним качественную оценку целесообразности использования той или иной математической модели турбулентности.

В качестве вариантов k – ϵ модели, помимо классической формулировки, использовалась ее RNG модификация, модель Чена и LES модель больших вихрей. Как следует из рис. 2, наиболее адекватно качественную картину процесса можно получить при использовании стандартной k – ϵ модели турбулентности. Отчасти эти результаты были прогнозируемы, так как остальные гипотезы недостаточно верно описывают присутствие сил тяжести в потоке, в то время как для данного процесса гравитационная сила является определяющим фактором и только ее корректный учет математической моделью гарантирует получение точных результатов.

Полученные в лаборатории экспериментальные данные поделим на два блока. Первый блок лабораторных данных используем непосредственно для подбора адекватной математической модели турбулентности. Второй блок данных используем для верификации окончательного варианта разработанной математической модели. При этом особое внимание обратим на стандартную k – ϵ модель турбулентности, которая может использовать как линейную, так и нелинейную функциональную взаимосвязь между турбулентными касательными напряжениями, а также иметь различную формулировку для низких и высоких чисел Рейнольдса.

Несмотря на все различия и особенности k – ϵ моделей турбулентностей, все они в общем случае могут быть записаны следующим образом.

Уравнение для переноса турбулентной энергии k :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} \rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \tilde{u}_j k - \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\mu_{eff}}{\sigma_k} \right) =$$

$$= \mu_t (P + P_B) - \rho \varepsilon - \frac{2}{3} \left(\mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \rho k \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \mu_t P_{NL}, \quad (26)$$

где μ_{eff} , μ_t – эффективная и турбулентная вязкости соответственно; P , P_B , P_{NL} – промежуточные величины, которые определяются по формулам:

$$P \equiv 2s_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (27)$$

$$P_B = -\frac{g_i}{\sigma_{h,t}} \frac{1}{\rho} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}. \quad (28)$$

Величина $P_{NL} = 0$, так как принимаем линейную зависимость между скоростями потока и турбулентными напряжениями в потоке.

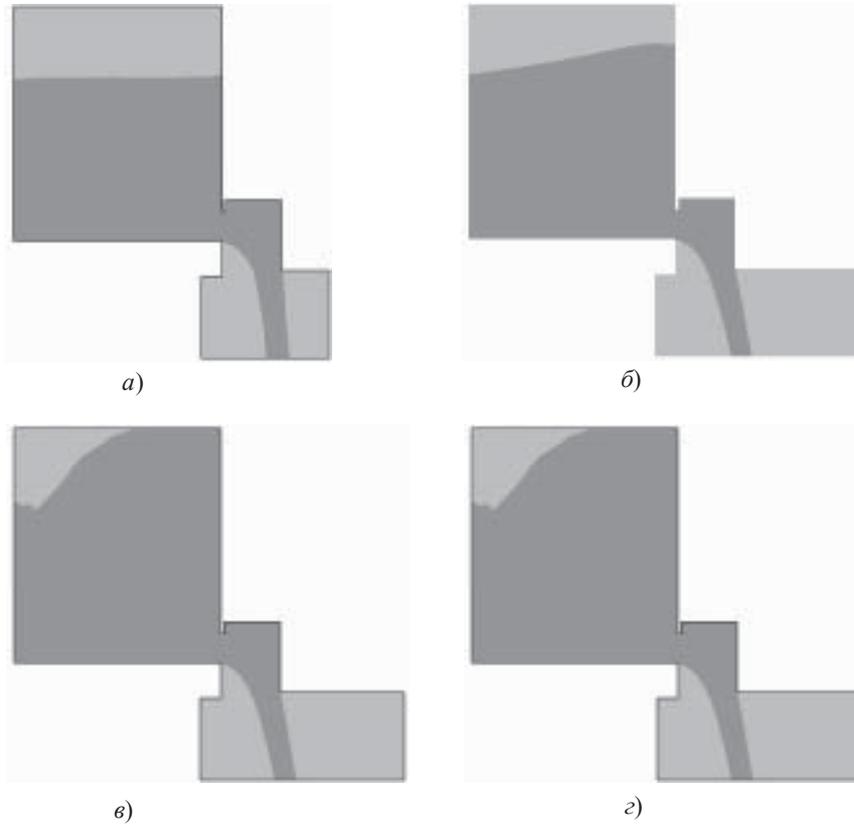


Рис. 2. Движение потока в расчетной области при использовании различных моделей турбулентности
 а) стандартная k - ε модель; б) модель Чена; в) RNG модифицированная модель;
 з) LES модель больших вихрей

Уравнение для скорости диссипации кинетической энергии ε :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{g} \rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\rho \tilde{u}_j \varepsilon - \frac{\mu_{eff}}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) =$$

$$= C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \left[\mu_t P - \frac{2}{3} \left(\mu_t \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \rho k \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right] + C_{\varepsilon 3} \frac{\varepsilon}{k} \mu_t P_B -$$

$$- C_{\varepsilon 2} \rho \frac{\varepsilon^2}{k} + C_{\varepsilon 4} \rho \varepsilon \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \mu_t P_{NL},$$
(29)

где $\sigma_\varepsilon, C_{\varepsilon 1}, C_{\varepsilon 2}, C_{\varepsilon 3}$ и $C_{\varepsilon 4}$ – эмпирические коэффициенты, взятые из [8].

Результаты оценочных расчетов по интегральным компонентам горизонтальной и вертикальной сил представлены в табл. 1. Символами HR и LR в табл. 1 обозначены гипотезы турбулентности для высоких и низких чисел Рейнольдса. Степенные показатели 1, 2, 3 указывают на линейную, квадратичную и кубическую взаимосвязь касательных напряжений и скорости потока.

Таблица 1

Модель турбулентности	Горизонтальная сила			Вертикальная сила		
	теорет., H	измерен., H	расхож., %	теорет., H	измерен., H	расхож., %
$k - \varepsilon HR^1$	2884	2900	5,2	-0,28	-0,58	107
$k - \varepsilon HR^2$	2901	2900	0,5	-0,05	-0,58	173
$k - \varepsilon HR^3$	2898	2900	0,7	-0,42	-0,58	38
$k - \varepsilon LR^1$	2886	2900	4,8	-0,35	-0,58	66
$k - \varepsilon LR^2$	2901	2900	0,3	-0,57	-0,58	2
$k - \varepsilon LR^3$	2896	2900	1,4	-0,56	-0,58	3,6

Данные табл. 1 говорят о том, что минимальная относительная погрешность в 0,3 и 2% соответственно для горизонтальной и вертикальной составляющих получается при использовании гипотезы турбулентности с низкими числами Рейнольдса с параболической взаимосвязью напряжений и скоростей потока.

5. Верификация предлагаемой модели

С целью окончательной проверки адекватности предлагаемой математической модели и целесообразности ее замыкания гипотезой турбулентности с параболической взаимосвязью между касательными напряжениями и скоростью потока была выполнена вторая серия экспериментов. Для того чтобы при минимуме экспериментальной работы охватить всю область рабочих параметров экспериментальных величин, был использован активный эксперимент.

В качестве плана активного эксперимента использовался трехуровневый, рототабельный, полнофакторный план. Произведя замеры гидродинамического давлений в контрольных точках, а затем проинтегрировав эпюру, получили значения горизонтальной и вертикальной составляющих сил гидродинамического давления.

В табл. 2 представлены данные верификационных расчетов теоретических и лабораторных величин погонной нагрузки.

Процент ошибки не дает исчерпывающего представления о точности получаемых результатов. Поэтому в качестве критерия адекватности измеряемых и рассчитываемых величин принимаем величину среднеквадратической погрешности s . Эта величина определяется по формуле:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(F_L - F_T) / F_L]^2},$$
(30)

где F_L – величина силы, измеренная в лаборатории; F_T – величина силы, полученная теоретическим путем; n – число опытов ($n = 9$).

Таблица 2

Условия замера		Горизонтальная сила, Н/м			Вертикальная сила, Н/м		
H_r , см	a , см	измерен.	теорет.	разн., %	измерен.	теорет.	разн., %
14	1	14,08	13,82	2,1	3,71	3,5	5,7
	3	10,43	11,10	6,5	2,75	2,95	7,3
	5	9,22	9,84	6,7	2,56	2,72	6,3
19	1	20,55	22,03	7,2	4,74	4,95	4,4
	3	16,06	15,8	1,6	3,33	3,2	4,0
	5	14,14	13,5	4,5	3,46	3,28	5,2
24	1	22,53	23,2	3,0	4,87	4,6	5,5
	3	20,48	21,05	2,8	4,48	4,37	2,5
	5	19,20	18,5	3,6	4,35	4,39	0,1

После анализа результатов измерения суммарных компонент сил в вертикальном и горизонтальном направлениях среднеквадратические погрешности составили 7,8 и 7,9% соответственно. Такой низкий процент ошибки является следствием того, что теоретический расчет достаточно адекватно улавливает характер эпюры гидродинамического давления и позволяет корректно описывать распределение давлений по поверхности (см. рис. 3).

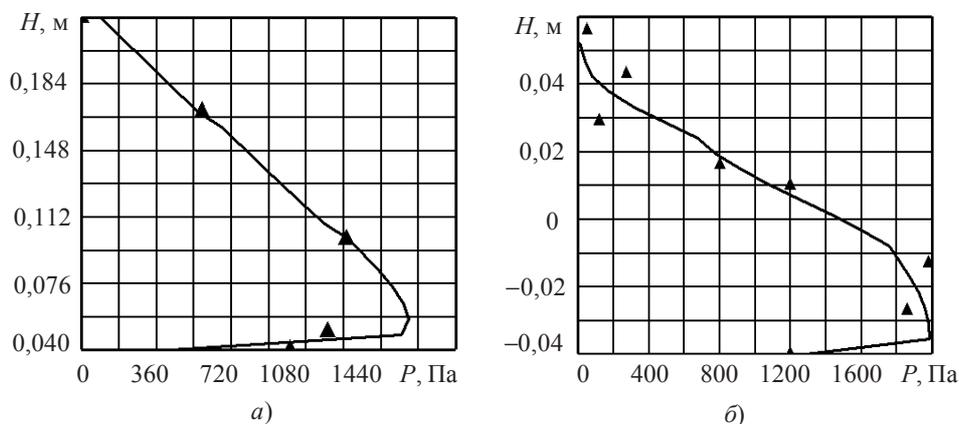


Рис. 3. Эпюры гидродинамического давления на напорной поверхности ворот при $H_r = 19$ см, $a = 3$ см (сплошная линия – теоретические данные, треугольник – экспериментальные данные)

Выводы

1. Показано, что относительно дешевым способом расчета эпюр гидродинамического давления на ворота шлюза является численное моделирование данного процесса, причем построение модели, не учитывающей динамику поведения свободной поверхности (вода/воздух), дает решения для крайне ограниченного числа случаев.

2. При исследовании гидродинамических процессов, возникающих при обте-

кании подъемно-опускных ворот, обязательно использование VOF-метода контрольного объема.

3. Замыкание математической модели, описывающей турбулентные процессы в потоке, предпочтительнее выполнять с помощью стандартной k - ϵ модели с параболической зависимостью турбулентных напряжений и скорости.

4. При исследовании характера эпюр гидродинамического давления, действующего на рабочие ворота при различных фазах маневрирования, допустимо использование метода квазистационарных состояний и переход к двумерной постановке. Это позволяет решать задачу на стационарной расчетной сетке и уходить от решения задачи с подвижной областью интегрирования, а также минимизировать время расчета.

5. Применение разработанной математической модели позволяет без дополнительных дорогостоящих лабораторных экспериментов определить очертание эпюр гидродинамического давления со среднеквадратической погрешностью порядка 8% для любой конструкции ворот;

6. Применение математической модели позволяет в полном объеме проанализировать кинематическую структуру потока, обтекающего конструкцию, и проанализировать характер влияния каждого геометрического параметра на величину гидродинамического усилия.

Литература

1. Горячев, А.П. К вопросу о гидродинамическом воздействии потока воды на рабочие ворота шлюзов / А.П. Горячев, И.В. Липатов // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / М.: ТНИ КМК. – 1997. – Вып. 55. – С. 67–71.

2. Липатов, И.В. Гидродинамические нагрузки на подъемно-опускные ворота шлюзов / И.В. Липатов // Наука и техника на речном транспорте: Информац. сб., ЦБНТИ. – М. - 1994. – №12. – С. 23–28.

3. Harlow, F.H. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flows of fluid with free surface / F.H. Harlow, J.E. Welch // Phys. Fluids. – 1965. – 8. – P. 2182–2187.

4. Hirt, C.W. Volume of Fluid (VOF) method for dynamical free boundaries / C.W. Hirt, B.D. Nichols // Comput. Phys. – 1981. – 39. – P. 201–225.

5. Launder, B.E. The numerical computation of turbulent flow / B.E. Launder, D.B. Spalding // Comp. Meth. in Appl. Mech. & Eng. – 1974. – 3. – P. 269.

6. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар / Пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 152 с.

7. Rodi, W. Influence of buoyancy and rotation on equations for turbulent length scale / W. Rodi // Proc. 2nd Symp. on Turbulent Shear Flows. – 1979. – 300 p.

8. Tahry, S.H. k - ϵ equation for compressible reciprocating engine flows / S.H. Tahry // AIAA J. Energy. – 1983. – No. 4. – P. 345–353.

9. Yakhot, V. Renormalization group analysis of turbulence. Basic theory / V. Yakhot, S.A. Orszag // J. Scientific Computing. – 1986. – 1. – P. 1–51.

10. Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique / V. Yakhot [et.al.] // Phys. Fluids. – 1992. No. 7. – P. 1510–1520.

11. Norris, L.H. Turbulent channel flow with a moving wavy boundary / L.H. Norris, W.C. Reynolds // Report No. FM-10. – Stanford University, Department of Mechanical Engineering, USA. – 1975.

12. Rodi, W. Experience with two-layer models combining the k - ϵ model with a one-equation model near the wall / W. Rodi // AIAA 91-0216. – 1991.

[22.04.2005]