

УДК 539.3

ДИНАМИКА ГИБКИХ БАЛОК ПРИ ДЕЙСТВИИ УДАРНЫХ НАГРУЗОК С УЧЕТОМ БЕЛОГО ШУМА*

© 2016 г. Синичкина А.О.¹, Крылова Е.Ю.², Мицкевич С.А.¹,
Крысько В.А.¹

¹*Саратовский государственный технический университет
имени Гагарина Ю.А., Саратов, Российская Федерация*

²*Саратовский национальный исследовательский государственный
университет имени Н.Г. Чернышевского, Саратов,
Российская Федерация*

tak@sun.ru

Поступила в редакцию 28.08.2016

Рассматривается хаотическая динамика гибких изотропных балок Эйлера – Бернулли при действии бесконечной во времени ударной нагрузки с учетом белого шума. Построена математическая модель, разработан алгоритм расчета и создан программный комплекс. Рассмотрена консервативная система. Уравнение в частных производных сводится к задаче Коши. Исследованы три типа краевых условий. Установлено, что при действии на балку только белого шума разной интенсивности колебания хаотические. Если амплитуда ударной нагрузки численно равна или меньше интенсивности белого шума, то колебания хаотические, а если амплитуда ударной бесконечной во времени нагрузки больше или равна интенсивности белого шума, то поперечная нагрузка является доминирующей и возможны классические случаи перехода колебаний в состояние хаоса по сценарию Рюэля – Таккенса.

Ключевые слова: гибкие балки Эйлера – Бернулли, белый шум, ударная нагрузка, сценарий Рюэля – Таккенса.

Введение

Долгое время в описание механизмов самоорганизации не были включены флуктуации. Задачи рассматривались как детерминистические, то есть внешние флуктуации не принимались во внимание, а внутренние флуктуации, хотя они неизбежны, считались слабыми. Находясь под влиянием внутренних флуктуаций, система совершает случайные колебания, имеют место некоторые распределения значений параметров состояний, то есть система является вероятностной. В отличие от внутренних флуктуаций, которые для макроскопических систем пренебрежимо малы, флуктуации, обусловленные случайностью среды, весьма существенны. Первые результаты, описывающие непренебрежимо малый эффект внешнего шума, были даны в [1], где рассмотрено влияние мультипликативного шума на ламповый генератор.

* Выполнено при финансовой поддержке грантом Президента Российской Федерации МК-5609.2016.8, РФФИ (гранты №16-31-00092, №16-08-01108А, №16-01-00721А).

Исследования в сфере моделирования нелинейных динамических систем приобретают все бóльшую значимость во многих отраслях науки. В механике, экономике, физике, электротехнике, биологии, истории и других направлениях науки применяется моделирование процессов в нелинейной постановке. Отдельным вопросом изучения динамики механических систем является переход систем в состояние хаоса при изменении управляющих параметров. Значительный вклад в изучение этого вопроса внесли Л.Д. Ландау [2], Н. Норф [3], М. Feigenbaum [4], Ю.И. Неймарк [5], Р. Манневиле [6], Ж. Аватсевиц [7, 8]. Большое значение для развития хаотической динамики различных механических систем имели работы В.А. Крысько, Я. Аврејцевича, А.В. Крысько, М.В. Жигалова, И.В. Папковой, Т.В. Яковлевой, Е.Ю. Крыловой [9–21], влияние белого шума на динамические системы рассмотрены в работах В.Г. Баженова [22, 23].

В настоящей статье исследуется влияние бесконечной во времени ударной нагрузки с учетом гауссовского белого шума на хаотическую динамику гибких изотропных балок Эйлера – Бернулли, которое ранее не рассматривалось.

1. Математическая модель

Моделирование колебаний тонкой гибкой балки основывается на гипотезах Бернулли – Эйлера (рис. 1). Это дает возможность рассматривать поведение только срединной линии, сводя задачу динамики балки к одномерной задаче.

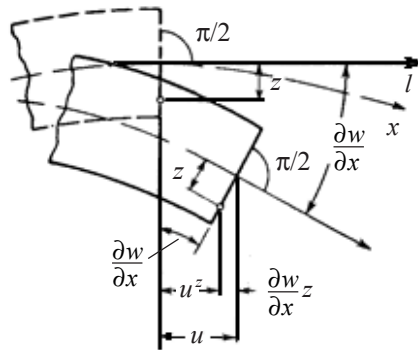


Рис. 1

Материал балки упругий и изотропный, геометрическая нелинейность введена по соотношению Кармана [24]. Согласно принципу Остроградского – Гамильтона должно выполняться условие:

$$\int_{t_0}^{t_1} (\delta K - \delta \Pi + \delta W) dt = 0. \quad (1)$$

Здесь

$$K = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{g} h \int_0^l \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right] dx, \quad (2)$$

где γ – удельный вес материала, g – ускорение свободного падения, h – толщина балки, $w(x, t)$ – прогиб элемента, $u(x, t)$ – перемещение элемента в продольном направлении.

Потенциальная энергия Π представляет собой сумму энергии деформации изгиба $\Pi_{и}$ и энергии деформации срединной линии $\Pi_{с}$, которые определяются из соотношений:

$$\Pi_{и} = \frac{1}{2} \int_0^l M_x \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx, \quad (3)$$

$$\Pi_{с} = \frac{1}{2} \int_0^l N_x \varepsilon_x dx, \quad (4)$$

где M_x – изгибающий момент, N_x – нормальное усилие срединной линии, ε_x – полная деформация;

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz = Eh \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right), \quad M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x,и} z dz = -\frac{Eh^3}{12} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad (5)$$

$\sigma_x, \sigma_{x,и}$ – нормальное и изгибное напряжения соответственно, определяемые из закона Гука, E – модуль Юнга.

Подставляя выражения для вариаций кинетической K и потенциальной Π энергии в уравнение Остроградского – Гамильтона (1) и учитывая вариации δu и δw , рассматриваемые как функции времени t , получим систему уравнений движения балки:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ N_x \frac{\partial w}{\partial x} \right\} + q + q_{nois} - \frac{\gamma}{g} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \end{cases} \quad (6)$$

где $q = q_0 G(t)$ – внешняя нормальная нагрузка; q_0 – интенсивность нагрузки, $G(t)$ – функция Хевисайда, действующая на интервале времени $t > 0$, $q_{nois} = q_{n0}(2,0 \times \text{rand}() / \text{RAND_MAX} + 1,0) - 1,0$ – аддитивный нормальный белый шум, где q_{n0} – интенсивность шума, $\text{rand}()$ – стандартная функция языка C++, принимающая значения случайных целых чисел от 0 до RAND_MAX , равного 65535. Выражение $(2,0 \times \text{rand}() / \text{RAND_MAX} + 1,0) - 1,0$ принимает произвольные дробные значения в диапазоне $(-1, 1)$.

Внешнее шумовое поле в виде белого шума воздействует только с внешней стороны балки. Белый шум – обобщенный стационарный случайный процесс $X(t)$ с постоянной спектральной плотностью. Термин «белый» был присвоен по аналогии с белым светом, который в видимой части спектра имеет весь набор частот. Корреляционная функция процесса белого шума имеет вид $B(t) = \sigma^2 \delta(t)$, где σ^2 – некоторая положительная постоянная, а $\delta(t)$ – дельта-функция. Иногда ошибочно предполагается, что гауссовский шум (то есть шум с гауссовым распределением по амплитуде) обязательно является белым шумом. Однако эти понятия неэквивалентны. Гауссовский шум предполагает распределение самих значений сигнала в виде нормального распределения, тогда как термин «белый» имеет отношение к корреляции сигнала в два различных момента времени (эта корреляция не зависит от распределения амплитуды шума). Белый шум может иметь любое распределение: Гаусса, Пуассона, Коши и т.д. Гауссовский белый шум в качестве модели хорошо подходит для математического описания многих природных процессов.

Система уравнений движения в безразмерных переменных имеет вид:

$$\begin{cases} u'' + L_3(w, w) - \ddot{u} = 0, \\ \frac{1}{\lambda^2} \left\{ L_2(w, w) + L_1(u, w) - \frac{1}{12} w^{IV} \right\} + \ddot{w} - \varepsilon \dot{w} + q = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Безразмерные переменные и параметры введены по формулам:

$$\bar{w} = \frac{w}{2h}, \quad \bar{u} = \frac{ua}{(2h)^2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \lambda = \frac{a}{2h}, \quad \bar{q} = \frac{(qa)^4}{(2h)^4 E}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{a}{c},$$

$$c = \sqrt{\frac{Eg}{9}}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon a}{c}.$$

В системе (7) черточки над ними опущены для простоты. Производные по времени обозначены точкой, производные по координате x – штрихами; L_1, L_2, L_3 – нелинейные операторы:

$$L_1(u, w) = u''w' + u'w'', \quad L_2(w) = \frac{3w''(w')^2}{2}, \quad L_3(w) = w''w'.$$

Для системы уравнений (7) имеют место одно из граничных условий:

$$w(0, t) = w(l, t) = u(0, t) = u(l, t) = w'_x(0, t) = w'_x(l, t) = 0, \quad (8)$$

$$w(0, t) = w(l, t) = u(0, t) = u(l, t) = w''_{xx}(0, t) = w''_{xx}(l, t) = 0, \quad (9)$$

$$w(0, t) = w(l, t) = u(0, t) = u(l, t) = w'_x(0, t) = w''_{xx}(l, t) = 0 \quad (10)$$

и начальные условия:

$$w(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0. \quad (11)$$

2. Решение системы уравнений движения балки. Достоверность результатов моделирования

Для сведения задачи в частных производных к задаче Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений по пространственной координате был использован метод конечных разностей (МКР) второго порядка точности, как наиболее эффективный [25]. Для этого на область балки накладывалась равномерная сетка с количеством узлов n . Система уравнений преобразуется к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} L_{1,h}(w_i(t), u_i(t)) + q_i(t) = \varepsilon \dot{w}_i(t) + \ddot{w}_i(t), \\ L_{2,h}(w_i(t), u_i(t)) = \varepsilon \dot{u}_i(t) + \ddot{u}_i(t), \end{cases} \quad (12)$$

где $i = \overline{0, n}$; $L_{1,h}, L_{2,h}$ – разностные операторы.

Методом замены переменных система (12) сводится к задаче Коши относительно эволюционной переменной. Решение задачи производится методом Рунге – Кутты 4-го порядка.

Количество разбиений в методе конечных разностей $n = 80$, коэффициент Пуассона равен 0,3, колебания балки исследовались на временном интервале $t \in [0; 2048]$, рассматривались амплитуды шума $q_{n0} = 100$ и $q_{n0} = 10000$, амплитуда ударной нагрузки изменялась с шагом 50 в пределах интервала $q_0 \in [0; 500]$. Строились фазовые портреты, сигналы, сечения Пуанкаре, спектры Фурье, вейвлет-спектры.

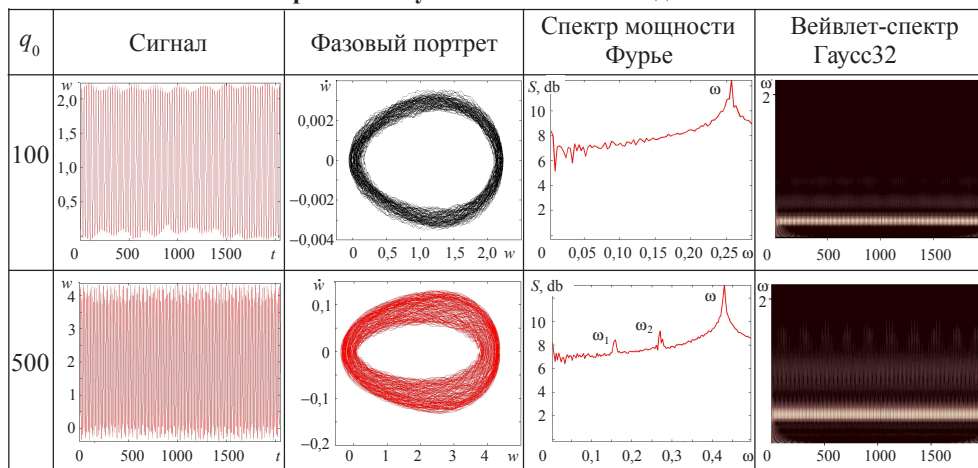
В качестве материнского вейвлета был выбран вейвлет на основе 32-й производной Гаусса (Gauss32), он дает лучшее разрешение как по времени, так и по частоте в сравнении с вейвлетом Морле.

3. Качественные исследования систем

В численном эксперименте с граничными условиями жесткой заделки на обоих концах при отсутствии нагрузки под влиянием белого шума интенсивностью $q_{n0} = 100$ колебания были хаотическими. Увеличение интенсивности нагрузки до $q_0 = 100$ приводило к появлению на спектре одной доминирующей частоты $\omega = 0,25$, которая является собственной частотой колебаний и значение которой увеличивается с ростом амплитуды ударной нагрузки. При ударной нагрузке с $q_0 = 500$ на спектре представлены три частоты: $\omega_1, \omega_2, \omega$, для которых выполняется соотношение $\omega - \omega_1 = \omega_2$. Данные вычислений приводятся в таблице 1. В ней приведены сигналы, построенные для центральной точки срединной линии балки, для двух значений интенсивности ударной нагрузки в случае интенсивности шумового поля $q_{n0} = 100$.

Таблица 1

Граничные условия – жесткая заделка



В таблице 2 приведены результаты при граничных условиях вида шарнирно неподвижного опирания на обоих концах балки при отсутствии нагрузки и под действием только белого шума интенсивностью $q_{n0} = 100$, колебания были хаотическими. При изменении интенсивности нагрузки до $q_0 = 100$ на спектре появляется одна доминирующая частота $\omega = 0,25$, аналогичная частоте, полученной в опыте с граничными условиями жесткой заделки на концах, значение которой увеличивается с ростом амплитуды ударной нагрузки. При ударной нагрузке с $q_0 = 500$ на спектре представлены 5 частот: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega$.

В случае несимметричных граничных условий (жесткая заделка и шарнирное неподвижное опирание) нагрузка с амплитудой 100 привела к появлению на спектре частоты $\omega = 0,25$. Дальнейший рост управляющего параметра не приводил к выделению пар линейно зависимых частот. В эксперименте ударная нагрузка не вызвала очищение спектра от шумовой составляющей. Все сигналы были сильно зашумлены, эти результаты отображены в таблице 3.

Таблица 2

Граничные условия – шарнирно неподвижное опирание

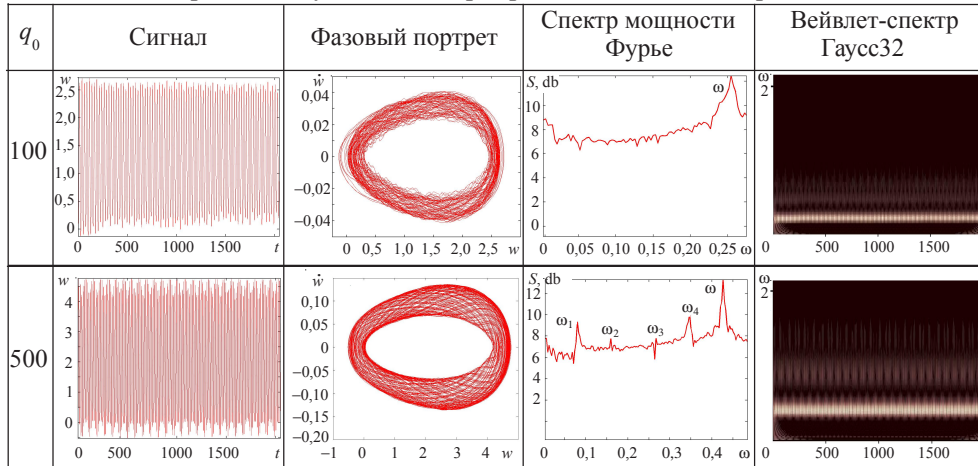
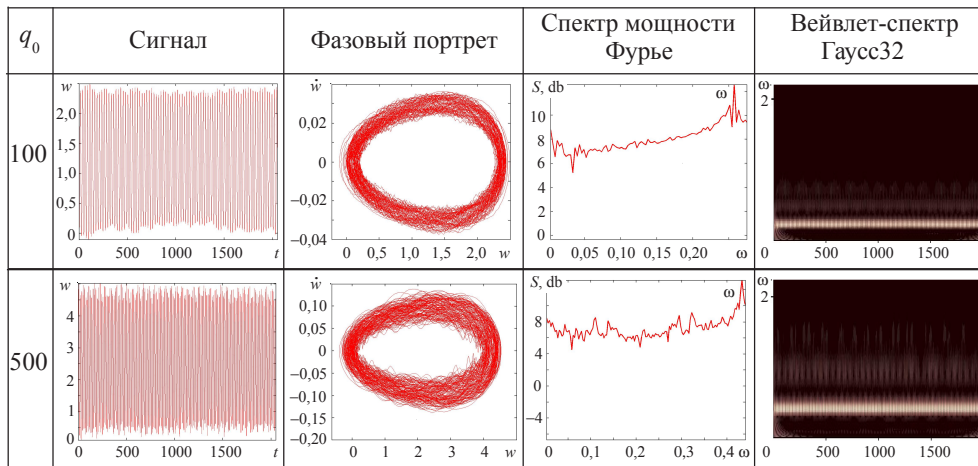


Таблица 3

Несимметричные граничные условия:
жесткая заделка и шарнирно неподвижное опирание

При действии на балку только белого шума с различной интенсивностью наблюдаем хаотические колебания балок. На спектре мощности Фурье для всех вариантов присутствует много частот.

Выводы

Во всех трех случаях, если амплитуда ударной нагрузки не превышала интенсивности белого шума, были получены хаотические колебания. При условии совпадения этих параметров на спектре выделялась доминирующая частота – частота собственных колебаний $\omega = 0,25$. В случае симметричных краевых условий ударная нагрузка с амплитудой, сильно превышающей интенсивность белого шума, приводила к практически полному очищению спектра от шумовой составляющей. На спектрах присутствовали линейно зависимые частоты (черты сценария Рюэля – Такенса). При условии несимметричных краевых условий ударная нагрузка не уменьшала амплитуды частот, появлявшихся на спектре под влиянием белого шума.

Список литературы

1. Кузнецов П.И., Стратонович Р.Л., Тихонов В.И. Воздействие электрических флуктуаций на ламповый генератор. *ЖЭТФ*. 1955. Т. 28, №5. С. 159–162.
2. Ландау Л.Д. К проблеме турбулентности. *ДАН СССР*. 1944. Т. 44. С. 339–342.
3. Hopf E.A. Mathematical example displaying the features of turbulence. *Comm. Pure Appl. Math.* 1948. Vol. 1. P. 303–322.
4. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Statist. Phys.* 1977. Vol. 19, No 1. P. 25–52.
5. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. *Динамика неавтономных систем*. М.: Наука, 1967. 520 с.
6. Brunnet L., Manneville P., Chate H. Long-range order with local chaos in lattices of diffusively coupled ODES. *Physica D*. 1994. Vol. 78, Is. 3 4. P. 141
7. Awrejcewicz J. *Bifurcation and chaos in simple dynamical systems*. World Scientific Singapore, 1989. 126 p.
8. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Papkova I.V., Krysko V.A. Routes to chaos in continuous mechanical systems. Part 1. Mathematical models and solution methods. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2012. Vol. 45. P. 687–708.
9. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Papkova I.V., Krysko V.A. Routes to chaos in continuous mechanical systems. Part 2. Modeling transitions from regular to chaotic dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2012. Vol. 45. P. 709–720.
10. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Papkova I.V., Krysko V.A. Routes to chaos in continuous mechanical systems. Part 3. The Lyapunov exponents, hyper, hyper-hyper and spatial-temporal chaos. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2012. Vol. 45. P. 721–736.
11. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Vakakis A. *Nonlinear dynamics of continuous elastic systems*. N.Y.: Springer-Verlag, 2004. 341 p.
12. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V. *Thermo-dynamics of plates and shells*. N.Y.: Springer-Verlag, 2007. 777 p.
13. Krysko V.A., Awrejcewicz J. *Chaos in structural mechanics*. N.Y.: Springer-Verlag, 2008. 400 p.
14. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Bochkarev V.V., Babenkova T.V. et al. Chaotic vibrations of two-layered beams and plates with geometric, physical and design nonlinearities. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011. Vol. 21, No 10. P. 2837–2851.
15. Крысько В.А., Жигалов М.В., Салтыкова О.А., Десятова А.С. Диссипативная динамика геометрически нелинейных балок Бернулли – Эйлера. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2008. №6. С. 128–136.
16. Крысько В.А., Папкина И.В., Солдатов В.В. Анализ нелинейных хаотических колебаний пологих оболочек вращения с помощью вейвлет-преобразования. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2010. №1. С. 107–117.
17. Крысько В.А., Жигалов М.В., Салтыкова О.А., Крысько А.В. Об учете влияния поперечных сдвигов на сложные нелинейные колебания упругих балок. *ПМТФ*. 2011. Т. 52, №5. С. 186–193.
18. Крысько В.А., Коч М.И., Жигалов М.В., Крысько А.В. Фазовая хаотическая синхронизация колебаний многослойных балочных структур. *ПМТФ*. 2012. Т. 53, №3. С. 166–175.
19. Крысько В.А., Жигалов М.В., Яковлева Т.В., Крылова Е.Ю., Папкина И.В. Метод установления в нелинейных задачах балок и пластин с учетом локальности нагружения. *Вестник Саратовского государственного технического университета*. 2012. Т. 2, №1(65). С. 7–17.
20. Крылова Е.Ю., Яковлева Т.В., Папкина И.В., Крысько В.А. Хаотическая динамика гибких прямоугольных в плане пластин при действии продольных нагрузок. *Проблемы прочности и пластичности*. 2015. Т. 77, №3. С. 235–243.
21. Мицкевич С.А., Захарова А.А., Крысько А.В. Установившиеся колебания балочных МЭМС-резонаторов в вязкой среде при действии локальной ударной нагрузки. *Компьютерные науки и информационные технологии: Матер. Междунар. науч. конф.* 2016. С. 277–280.
22. Яковлева Т.В., Баженов В.Г., Крысько В.А., Крылова Е.Ю. Контактное взаимодействие пластины с системой балок при наличии зазоров с учетом белого шума. *Вестник Пермского национального исследовательского университета. Механика*. 2015. №4. С. 259–272.

23. Крылова Е.Ю., Яковлева Т.В., Баженов В.Г. Хаотическая динамика гибких прямоугольных в плане панелей в поле белого шума. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика*. 2016. №1. С. 82–92.
24. Karman T.L. *The collected works*. London: Butterworths, 1956. Vol. 4. P. 107–126.
25. Крысько В.А. *Нелинейная статика и динамика неоднородных оболочек*. Саратов: Изд-во СГУ, 1976. 216 с.

References

1. Kuznetsov P.I., Stratonovich R.L., Tikhonov V.I. Vozdeystvie elektricheskikh fluktuatsiy na lampovyy generator. *ZhETF*. 1955. T. 28, №5. S.159–162.
2. Landau L.D. K probleme turbulentsnosti. *DAN SSSR*. 1944. T. 44. S. 339–342.
3. Hopf E.A. Mathematical example displaying the features of turbulence. *Comm. Pure Appl. Math.* 1948. Vol. 1. P. 303–322.
4. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Statist. Phys.* 1977. Vol. 19, No 1. P. 25–52.
5. Неймарк Ю.И., Фуфаев Н.А. *Динамика неавтономных систем*. М.: Наука, 1967. 520 с.
6. Brunnet L., Manneville P., Chate H. Long-range order with local chaos in lattices of diffusively coupled ODES. *Physica D*. 1994. Vol. 78, Is. 3 4. P. 141
7. Awrejcewicz J. *Bifurcation and chaos in simple dynamical systems*. World Scientific Singapore, 1989. 126 p.
8. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Papkova I.V., Krysko V.A. Routes to chaos in continuous mechanical systems. Part 1. Mathematical models and solution methods. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2012. Vol. 45. P. 687–708.
9. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Papkova I.V., Krysko V.A. Routes to chaos in continuous mechanical systems. Part 2. Modeling transitions from regular to chaotic dynamics. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2012. Vol. 45. P. 709–720.
10. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Papkova I.V., Krysko V.A. Routes to chaos in continuous mechanical systems. Part 3. The Lyapunov exponents, hyper, hyper-hyper and spatial-temporal chaos. *Chaos, Solitons & Fractals*. 2012. Vol. 45. P. 721–736.
11. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Vakakis A. *Nonlinear dynamics of continuous elastic systems*. N.Y.: Springer-Verlag, 2004. 341 p.
12. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krysko A.V. *Thermo-dynamics of plates and shells*. N.Y.: Springer-Verlag, 2007. 777 p.
13. Krysko V.A., Awrejcewicz J. *Chaos in structural mechanics*. N.Y.: Springer-Verlag, 2008. 400 p.
14. Awrejcewicz J., Krysko A.V., Bochkarev V.V., Babenkova T.V. et al. Chaotic vibrations of two-layered beams and plates with geometric, physical and design nonlinearities. *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2011. Vol. 21, No 10. P. 2837–2851.
15. Krysko V.A., Zhigalov M.V., Saltykova O.A., Desyatova A.S. Dissipativnaya dinamika geometricheski nelineynykh balok Bernulli – Eйлера. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 2008. №6. S. 128–136.
16. Krysko V.A., Papkova I.V., Soldatov V.V. Analiz nelineynykh khaoticheskikh kolebaniy pologikh obolochek vrashcheniya s pomoshch'yu veyvlet-preobrazovaniya. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 2010. №1. S. 107–117.
17. Krysko V.A., Zhigalov M.V., Saltykova O.A., Krysko A.V. Ob uchete vliyaniya poperechnykh sdvigoв na slozhnye nelineynye kolebaniya uprugikh balok. *PMTF*. 2011. T. 52, №5. S. 186–193.
18. Krysko V.A., Koch M.I., Zhigalov M.V., Krysko A.V. Fazovaya khaoticheskaya sinkhronizatsiya kolebaniy mnogoslonykh balochnykh struktur. *PMTF*. 2012. T. 53, №3. S. 166–175.
19. Krysko V.A., Zhigalov M.V., Yakovleva T.V., Krylova E.Yu., Papkova I.V. Metod ustanovleniya v nelineynykh zadachakh balok i plastin s uchedom lokal'nosti nagruzheniya. *Vestnik Saratovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2012. T. 2, №1(65). S. 7–17.
20. Krylova E.Yu., Yakovleva T.V., Papkova I.V., Krysko V.A. Khaoticheskaya dinamika gibkikh pryamougol'nykh v plane plastin pri deystvii prodol'nykh nagruzok. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2015. T. 77, №3. S. 235–243.

21. Mitskevich S.A., Zakharova A.A., Krysko A.V. Ustanovivshiesya kolebaniya balochnykh MEMS-rezonatorov v vyazkoy srede pri deystvii lokal'noy udarnoy nagruzki. *Komp'yuternye nauki i informatsionnye tekhnologii: Mater. Mezhdunar. nauch. konf.* 2016. S. 277–280.

22. Yakovleva T.V., Bazhenov V.G., Krysko V.A., Krylova E.Yu. Kontaktnoe vzaimodeystvie plastiny s sistemoy balok pri nalichii zazorov s uchetom belogo shuma. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo universiteta. Mekhanika.* 2015. №4. S. 259–272.

23. Krylova E.Yu., Yakovleva T.V., Bazhenov V.G. Khaoticheskaya dinamika gibkikh pryamougol'nykh v plane paneley v pole belogo shuma. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika.* 2016. №1. S. 82–92.

24. Karman T.L. *The collected works.* London: Butterworths, 1956. Vol. 4. P. 107–126.

25. Krysko V.A. Nelineynaya statika i dinamika neodnorodnykh obolochek. Saratov: Izd-vo SGU, 1976. 216 s.

DYNAMICS OF ELASTIC BEAMS UNDER IMPACT LOADING, ACCOUNTING FOR WHITE NOISE

Sinichkina A.O.¹, Krylova E.Yu.², Mitzkevich S.A.¹, Krysko V.A.¹

¹*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation*

²*Saratov State University, Saratov, Russian Federation*

Chaotic dynamics of elastic isotropic Euler – Bernoulli beams under the effect of infinite in time impact loading is considered, accounting for white noise. Based on the results of the investigation, a mathematical model is constructed, a computational algorithm and a software complex are developed. A conservative system is analyzed. The partial differential equation is reduced to Cauchy problem. Three types of boundary conditions are considered. It is found that when only white noise of various intensity acts on a beam, the oscillations are chaotic. If the impact loading amplitude is equal to or less than the white noise intensity, the oscillations are chaotic; if the amplitude of the infinite in time impact loading is larger than or equal to the white noise intensity, then the transversal loading is dominant, and classical transfer of oscillations into a chaotic state following Ruelle – Tuckens scenario is possible.

Keywords: elastic Euler–Bernoulli beams, white noise, impact loading, Ruelle–Tuckens scenario.