

УДК 539.3

НЕЛИНЕЙНЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ИЗГИБНЫЕ ВОЛНЫ В СТЕРЖНЕ ИЗ УПРОЧНЯЮЩЕГОСЯ МАТЕРИАЛА *

© 2016 г. Доронин А.М.¹, Ерофеев В.И.^{1,2}, Кажаяев В.В.^{1,2}

¹*Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород,
Российская Федерация*

²*Научно-исследовательский институт механики
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Российская Федерация*

alexeydoronin@list.ru

Поступила в редакцию 14.06.2016

Рассматриваются нелинейные изгибные волны в бесконечном прямолинейном стержне, материал которого подчиняется закону упрочнения Холломона – Людвига. Изгиб стержня рассматривался в рамках модели Бернулли – Эйлера. Уравнения динамики стержня получены с помощью принципа Гамильтона – Остроградского на основе выражений для потенциальной и кинетической энергий элементарного отрезка. Проведен поиск решений уравнения динамики в виде бегущих стационарных волн, что позволяет свести уравнение в частных производных к обыкновенному дифференциальному уравнению. Исследование фазовых портретов последнего производилось с помощью программы MAPLE. Установлена возможность возникновения в стержне нелинейных бегущих стационарных волн, распространяющихся с постоянной скоростью и не изменяющих свою форму. Определен характер зависимостей длины стационарной волны от ее амплитуды, показателя и модуля упрочнения.

Ключевые слова: изгибные волны, нелинейность, упрочнение, принцип Гамильтона – Остроградского, фазовые портреты.

Введение

Одной из особенностей протекания волновых процессов в нелинейных средах является возможность возникновения стационарных волн (как периодических, так и уединенных) при одновременном действии двух уравнивающих друг друга эффектов – нелинейности, вызывающей зарождение в волне новых гармоник, что приводит к увеличению крутизны фронта волны, и дисперсии, сглаживающей перепады профиля волны из-за различия фазовых скоростей ее гармонических составляющих. Исследованию нелинейных волновых процессов в упругих средах посвящен значительный объем литературы [1–8]. Привлечение реологических моделей, учитывающих влияние скорости деформирования, упрочнение и другие эффекты, для описания поведения материала при деформировании приводит к услож-

* Выполнено при поддержке РФФИ (грант №15-08-01836).

нению уравнений динамики среды и невозможности получения решения аналитическим путем [9–16]. Значительная часть рассматриваемых задач решается с помощью численных методов, например задачи распространения волн в стержневых элементах, которые входят в состав многих конструкций, работающих при воздействии высокоскоростных или кратковременных нагрузок (лопасти вертолетных винтов, набор крыла самолета, орудийные стволы, бортовые антенны космических аппаратов и др.).

В статье [17] рассматривается распространение продольных волн в стержне, находящемся в стадии деформационного разупрочнения. Найдены точные аналитические решения задачи Коши в виде нестационарных уединенных волн, эволюция которых описывает локализацию деформации, возникающую из гладкого начального возмущения и заканчивающуюся коллапсом. В [18] показано, что в стержне из упрочняющегося материала могут формироваться продольные нелинейные стационарные волны. Волны могут быть как периодическими, так и уединенными, что определяется показателем деформационного упрочнения.

Задачам о распространении нелинейных изгибных волн в стержнях посвящен меньший объем литературы, чем задачам о распространении продольных волн. Это связано с трудностями описания поведения изгибных волн и их дисперсионных свойств [12]. Тем не менее, использование упрощенных моделей динамики стержня позволяет сделать некоторые выводы относительно основных параметров волн.

1. Описание модели

Рассмотрим изгибные колебания прямолинейного стержня в рамках теории Бернулли – Эйлера. Материал стержня подчиняется закону упрочнения Холломона – Людвига [13] вида:

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} E\varepsilon, & \varepsilon \leq \varepsilon_s, \\ \sigma_s + K(\varepsilon - \varepsilon_s)^n, & \varepsilon \geq \varepsilon_s. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь E – модуль Юнга; σ – напряжение; $\varepsilon > 0$ – деформация; σ_s – предел текучести материала; ε_s – величина деформации, соответствующая напряжению текучести; K – модуль упрочнения; n – показатель упрочнения, $n \in [0; 1]$, для большинства конструкционных материалов $n \in [0,1; 0,5]$ [19]. Считаем, что при сжатии и растяжении материал ведет себя одинаково. Случай $n = 0$ соответствует идеально пластическому материалу, случай $n = 1$ – материалу с линейным упрочнением. График качественной зависимости напряжений от деформаций приведен на рис. 1.

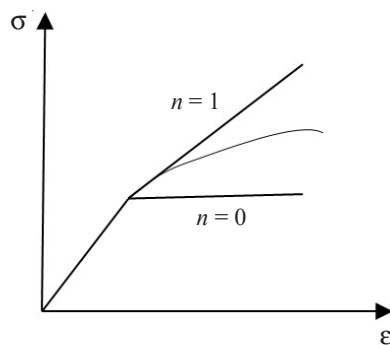


Рис. 1. График зависимости между напряжениями и деформациями

- В рамках теории Бернулли – Эйлера действуют следующие предположения:
- поперечные сечения, плоские и перпендикулярные оси стержня до деформирования, остаются таковыми при деформировании;
 - продольные сечения не оказывают давления друг на друга, то есть нормальные напряжения на площадках, параллельных оси стержня, пренебрежимо малы;
 - инерцией вращения элемента при изгибе пренебрегается.

Рассмотрим изгиб стержня прямоугольного поперечного сечения высотой $2h$ и шириной b . Для вычисления потенциальной энергии изгиба элементарного отрезка стержня длиной dx (рис. 2) необходимо найти работу изгибающего момента на элементарном угле поворота $d\theta$.

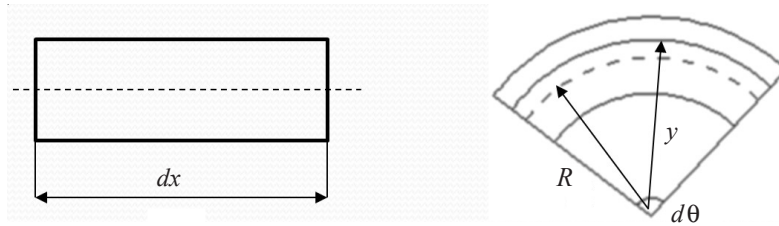


Рис. 2. Исходная и деформированная форма элементарного отрезка стержня

2. Вывод уравнения динамики стержня

При изгибе элемента dx длина волокна, находящегося на расстоянии y от нейтральной оси, равна

$$(R + y)d\theta = dx',$$

R – радиус кривизны элемента.

Деформация этого волокна

$$\frac{dx' - dx}{dx} = \frac{yd\theta}{dx} = \frac{y}{R} = \varepsilon.$$

Для случая малых прогибов $R = 1/|w''|$, где w – прогиб. Таким образом,

$$\varepsilon = y|w''|.$$

При изгибе часть сечения будет находиться в состоянии упругого деформирования, часть – в состоянии пластического деформирования. С учетом знакопеременности ε система (1) может быть переписана в виде

$$\sigma = \begin{cases} \frac{Ey}{R}, & |y| \leq y_s, \\ \left(\sigma_s + K \left(\frac{|y|}{R} - \frac{y_s}{R} \right)^n \right) \operatorname{sgn}(y), & |y| > y_s. \end{cases}$$

Потенциальная энергия определяется выражением

$$W_{\Pi} = \frac{1}{2} M d\theta,$$

$$M = \int_{-h}^h b \sigma y dy = 2 \int_0^{y_s} b E y^2 |w''| dy + 2 \int_{y_s}^h (\sigma_s + K(\varepsilon - \varepsilon_s)^n) b y dy. \quad (2)$$

Введем обозначения

$$J'_x = \int_{-y_s}^{y_s} y^2 b dy, \quad S'_x = \int_{y_s}^h y b dy = \int_{-h}^{-y_s} y b dy.$$

Распишем последнее слагаемое в выражении (2):

$$\int_{y_s}^h y b K(\varepsilon - \varepsilon_s)^n dy = K \int_{y_s}^h y b \left(\frac{y - y_s}{R} \right)^n dy = K |w''|^n \int_{y_s}^h y b (y - y_s)^n dy.$$

Произведем замену переменных:

$$\begin{aligned} y - y_s &= u, \\ dy &= du. \end{aligned}$$

Тогда последнее слагаемое в (2) примет вид:

$$K |w''|^n \int_0^{h-y_s} b(y_s + u) u^n du.$$

Интегрируя, будем иметь

$$K |w''|^n \left(y_s b \int_0^{h-y_s} u^n du + b \int_0^{h-y_s} u^{n+1} du \right) = K b |w''|^n \left[\frac{y_s (h - y_s)^{n+1}}{n+1} + \frac{(h - y_s)^{n+2}}{n+2} \right].$$

Таким образом, выражение для потенциальной энергии примет вид

$$\begin{aligned} W_{\Pi} &= \frac{1}{2} M d \theta = \frac{1}{2} M \frac{dx}{R} = \\ &= \frac{1}{2} \left[E |w''| J'_x + 2 \sigma_s S'_x + 2 K b |w''|^n \left(\frac{y_s (h - y_s)^{n+1}}{n+1} + \frac{(h - y_s)^{n+2}}{n+2} \right) \right] |w''| dx. \end{aligned}$$

Плотность кинетической энергии

$$W_k = \frac{1}{2} \rho F \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx,$$

лагранжиан системы

$$L = W_k - W_{\Pi}.$$

Уравнение изгибных колебаний стержня, полученное с помощью принципа Гамильтона – Остроградского [3], будет иметь вид

$$\begin{aligned} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + E J'_x \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \\ + K b n Q \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|^{n-1} (n+1) + (n^2 - 1) \left| \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right|^{n-2} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)^2 \right] = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь введено обозначение

$$Q = \frac{y_s (h - y_s)^{n+1}}{n+1} + \frac{(h - y_s)^{n+2}}{n+2}.$$

Линейные изгибные волны в стержне обладают дисперсией фазовой скорости [3]. Следовательно, на распространение изгибных волн, описываемых уравнением (3), будут влиять два фактора: дисперсия и нелинейность. Нелинейность приводит к зарождению в спектре волны новых гармоник, что способствует появлению в движущемся профиле волны резких перепадов. Дисперсия, наоборот, сглаживает перепады из-за различия в фазовых скоростях гармонических составляющих волны. Совместное действие этих факторов может привести к формированию стационарных волн, которые распространяются с постоянной скоростью без изменения формы.

Будем искать решение уравнения (3) в форме бегущих стационарных волн. Введем переменную $\xi = x - Vt$. Здесь V – скорость стационарной волны (заранее неизвестная). Уравнение в частных производных (3) сведется в этом случае к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$V^2 \rho F \frac{d^2 w}{d\xi^2} + EJ'_x \frac{d^4 w}{d\xi^4} + KbnQ \left[\frac{d^4 w}{d\xi^4} \left| \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right|^{n-1} (n+1) + (n^2 - 1) \left| \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right|^{n-2} \left(\frac{d^3 w}{d\xi^3} \right)^2 \right] = 0,$$

интегрирование которого дает

$$V^2 \rho F w' + EJ'_x w''' + KbnQ [(n+1) |w''|^{n-1} w'''] = C.$$

Введем переменную $U = w'$, тогда последнее уравнение будет иметь вид:

$$V^2 \rho F U + EJ'_x U'' + KbnQ (n+1) |U|^{n-1} U'' = C.$$

Положим константу интегрирования равной нулю. Окончательно уравнение можно привести к виду

$$U'' + \frac{U}{a + c|U|^{n-1}} = 0. \quad (4)$$

Здесь

$$a = \frac{EJ'_x}{V^2 \rho F}, \quad c = \frac{Kbn(n+1)Q}{V^2 \rho F}.$$

Для удобства исследования уравнение (4) можно записать в виде системы:

$$\begin{cases} U' = X, \\ X' = -\frac{U|X|^{1-n}}{a|X|^{1-n} + c}. \end{cases} \quad (5)$$

Получение аналитического решения уравнения (4) затруднительно. Исследование фазовых портретов (5) было проведено с помощью программы MAPLE.

3. Построение фазового портрета и исследование свойств стационарных волн

Фазовый портрет для системы (5) приведен на рис. 3. При построении было принято, что $a = c = 1$.

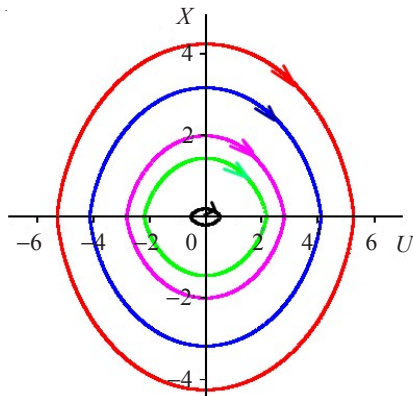


Рис. 3. Фазовый портрет при $n = 0,2$

Стационарным волнам отвечают замкнутые фазовые траектории. Зависимость U от ξ представлена на рис. 4.

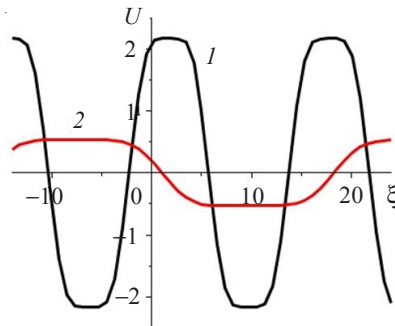


Рис. 4. Зависимость величины U от ξ при $a = 1, c = 1$

На рис. 4 обозначено: 1 – $U(0) = 2,1, X(0) = 0,2$; 2 – $U(1) = 0, X(1) = -0,2$.

Было проведено исследование зависимости длины волны от значений констант материала и начальных условий. Исследование проводилось для следующих значений параметров: $E = 70$ ГПа, $K = 180$ МПа, $n = 0,2$ (соответствует материалу Aluminum 1100 [13]), $h = 0,015$ м, $b = 0,03$ м, $y_s = 0,0075$ м, $\rho = 2750$ кг/м³, $V = 30$ м/с.

На рис. 5 приведена зависимость длины волны λ от начальной амплитуды $U(0)$ для различных скоростей. При этом значение $dU/d\xi|_{\xi=0}$ полагалось равным 1.

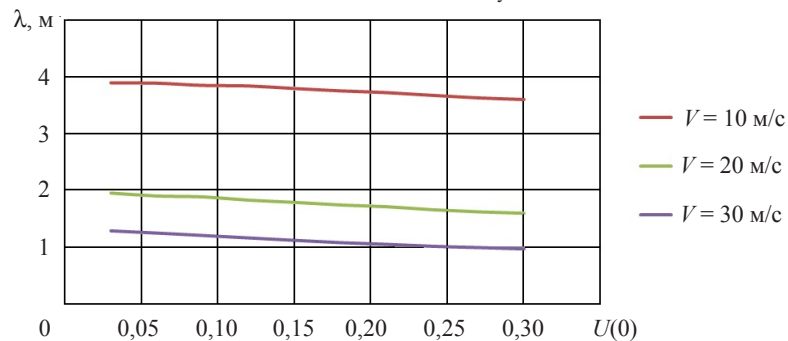


Рис. 5. Зависимость длины волны от начальной амплитуды

На рис. 6 представлена зависимость длины волны λ от модуля упрочнения K для различных значений n при $U(0) = 2$, $dU/d\xi|_{\xi=0} = 1$. Характер зависимости близок к линейному.

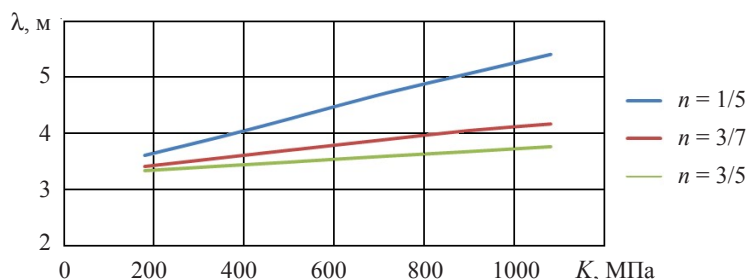


Рис. 6. Зависимость длины волны от модуля упрочнения

На рис. 7 приведена зависимость длины волны λ от показателя упрочнения n для различных K при $U(0) = 2$, $dU/d\xi|_{\xi=0} = 1$. Видно, что с ростом n длины волн приближаются к постоянному значению.

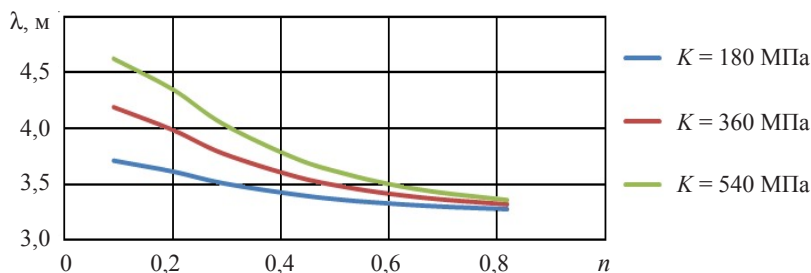


Рис. 7. Зависимость длины волны от показателя упрочнения n

Выводы

1. В стержне могут существовать бегущие нелинейные стационарные изгибные волны.
2. Зависимость длины стационарной волны от ее амплитуды, а также от модуля упрочнения имеет линейный характер.
3. С ростом показателя упрочнения длины волн приближаются к постоянному значению.

Список литературы

1. Ерофеев В.И. *Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой*. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
2. Samsonov A.M. *Strain solitons in solids and how to construct them*. Chapman and Hall/CRC, 2001.
3. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*. М.: Физматлит, 2002. 208 с.
4. Ерофеев В.И., Ключева Н.В. Солитоны и нелинейные периодические волны в стержнях, пластинах и оболочках (обзор). *Акустический журнал*. 2002. Т. 48, №6. С. 725–740.
5. Порубов А.В. *Локализация нелинейных волн деформации*. М.: Физматлит, 2009. 208 с.
6. Киселев В.В., Долгих Д.В. *Нелинейно-упругие узоры из вмятин на поверхностях нагруженных пластин и оболочек*. М.: Физматлит, 2012. 164 с.
7. Герасимов С.И., Ерофеев В.И. *Задачи волновой динамики элементов конструкций*. Саров: Изд-во РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2015. 254 с.

8. Ерофеев В., Потапов А., Солдатов И. *Волны в упругих системах*. Saarbrucken, Germany: Lambert Academic Publishing, 2015. 226 с.
9. Molinari A., Ravichandrana G. Fundamental structure of steady plastic shock waves in metals. *Journal of Applied Physics*. 2004. Vol. 95, No 4. P. 1718–1732.
10. Артемов М.А., Баскаков В.А., Полканов Е.В., Чернов А.Е. Формирование, затухание и взаимодействие ударного импульса конечной протяженности со свободной поверхностью упругопластического тела. *Вестник ВГУ. Физика, математика*. 2004. №2. С. 103–115.
11. Vaughn D.G., Canning J.M., Hutchinson J.W. Coupled plastic wave propagation and column buckling. *Journal of Applied Mechanics*. 2005. Vol. 72/1. P. 139–146.
12. Al-Da'ami H.H., Hosain A.M., Mostafa N.H. Elastic-plastic stress waves propagation in one-dimensional members using the method of characteristics. *The Iraqi Journal for Mech. and Mat. Eng*. 2006. Vol. 6, No 1. P. 132–147.
13. Wei D., Sarria A., Elgindi M.B.M. Critical buckling loads of the perfect Hollomon's power-law columns. *Mechanics Research Communications*. 2013. Vol. 47. P. 69–76.
14. Cho S.-S., Huh H., Park K.C. Analysis of elasto-plastic stress waves by a time-discontinuous variational integrator of Hamiltonian. *International Journal of Modern Physics B*. 2008. Vol. 22, No 31&32. P. 6259–6264.
15. Мастиновский Ю.В., Паршуков А.В. Упруго-пластические волны в стержне, свойства материала которого зависят от скорости деформирования. *Нові матеріали і технології в металургії та машинобудуванні*. 2008. №2. С. 126–129.
16. Бакушев С.В. Продольно-поперечные волны деформаций слабого разрыва. *Проблемы прочности и пластичности*. 2014. Вып. 76 (2). С. 114–121.
17. Мяков Н.Н. О динамической локализации деформации в разупрочняющемся стержне. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 1999. Т. 5, №3. С. 28–32.
18. Доронин А.М., Ерофеев В.И., Кажаяев В.В. Нелинейные стационарные упруго-пластические волны в стержне. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2016. №1. С. 8–10.
19. Callister Jr., William D. *Fundamentals of Materials Science and Engineering (2nd ed.)*. United States of America: John Wiley & Sons, 2005. 199 p.

References

1. Erofeev V.I. *Volnovye protsessy v tverdykh telakh s mikrostrukturoy*. M.: Izd-vo MGU, 1999. 328 s.
2. Samsonov A.M. *Strain solitons in solids and how to construct them*. Chapman and Hall/CRC, 2001.
3. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost'*. M.: Fizmatlit, 2002. 208 s.
4. Erofeev V.I., Klyueva N.V. Solitony i nelineynye periodicheskie volny v sterzhnyakh, plastinakh i obolochkakh (obzor). *Akusticheskiy zhurnal*. 2002. Т. 48, №6. S. 725–740.
5. Porubov A.V. *Lokalizatsiya nelineynykh voln deformatsii*. M.: Fizmatlit, 2009. 208 s.
6. Kiselev V.V., Dolgikh D.V. *Nelineyno-uprugie uzory iz vmyatin na poverkhnostnyakh nagruzhennykh plastin i obolochek*. M.: Fizmatlit, 2012. 164 s.
7. Gerasimov S.I., Erofeev V.I. *Zadachi volnovoy dinamiki elementov konstruksiy*. Sarov: Izd-vo RFYaTs-VNIIEF, 2015. 254 s.
8. Erofeev V., Potapov A., Soldatov I. *Volny v uprugikh sistemakh*. Saarbrucken, Germany: Lambert Academic Publishing, 2015. 226 s.
9. Molinari A., Ravichandrana G. Fundamental structure of steady plastic shock waves in metals. *Journal of Applied Physics*. 2004. Vol. 95, No 4. P. 1718–1732.
10. Artemov M.A., Baskakov V.A., Polkanov E.V., Chernov A.E. Formirovanie, zatukhanie i vzaimodeystvie udarnogo impul'sa konechnoy protyazhennosti so svobodnoy poverkhnost'yu uprugoplasticheskogo tela. *Vestnik VGU. Fizika, matematika*. 2004. №2. S. 103–115.
11. Vaughn D.G., Canning J.M., Hutchinson J.W. Coupled plastic wave propagation and column buckling. *Journal of Applied Mechanics*. 2005. Vol. 72/1. P. 139–146.

12. Al-Da'ami H.H., Hosain A.M., Mostafa N.H. Elastic-plastic stress waves propagation in one-dimensional members using the method of characteristics. *The Iraqi Journal for Mech. and Mat. Eng.* 2006. Vol. 6, No 1. P. 132–147.
13. Wei D., Sarria A., Elgindi M.B.M. Critical buckling loads of the perfect Hollomon's power-law columns. *Mechanics Research Communications*. 2013. Vol. 47. P. 69–76.
14. Cho S.-S., Huh H., Park K.C. Analysis of elasto-plastic stress waves by a time-discontinuous variational integrator of Hamiltonian. *International Journal of Modern Physics B*. 2008. Vol. 22, No 31&32. P. 6259–6264.
15. Mastinovskiy Yu.V., Parshukov A.V. Uprugo-plasticheskie volny v sterzhne, svoystva materiala kotorogo zavisyat ot skorosti deformirovaniya. *Novi materiali i tekhnologii v metalurgii ta mashinobuduvanni*. 2008. №2. C. 126–129.
16. Bakushev S.V. Prodol'no-poperechnye volny deformatsiy slabogo razryva. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2014. Vyp. 76 (2). S. 114–121.
17. Myagkov N.N. O dinamicheskoy lokalizatsii deformatsii v razuprochnyayushchemsya sterzhne. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruksiy*. 1999. T. 5, №3. S. 28–32.
18. Doronin A.M., Erofeev V.I., Kazhaev V.V. Nelineynye statsionarnye uprugo-plasticheskie volny v sterzhne. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*. 2016. №1. S. 8–10.
19. Callister Jr., William D. *Fundamentals of Materials Science and Engineering (2nd ed.)*. United States of America: John Wiley & Sons, 2005. 199 p.

NONLINEAR STATIONARY BENDING WAVES IN A ROD MADE OF WORK HARDENING MATERIAL

Doronin A.M.¹, Erofeev V.I.^{1,2}, Kazhaev V.V.^{1,2}

¹*Mechanical Engineering Research Institute of RAS, Nizhni Novgorod, Russian Federation*

²*Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation*

In this paper nonlinear bending waves in an infinite straight rod made of material whose hardening is described by Hollomon – Ludwik power-law are considered. The process of bending is described by Bernoulli – Euler theory. The equations of rod's dynamics were obtained using the Hamilton – Ostrogradsky principle based on expressions of potential and kinetic energy for the elementary portion of the rod. The search of solutions was performed in the form of travelling stationary waves, which allowed reducing the partial differential equation to ordinary one. Investigation of phase portraits of obtained equation was performed using the MAPLE software. Possibility of existence of nonlinear travelling stationary waves, which propagate with constant velocity and maintain its initial shape, were determined. Also the character of dependences between the length of stationary wave and its amplitude, hardening index and strength index is established.

Keywords: bending waves, nonlinearity, work hardening, Hamilton – Ostrogradsky principle, phase portraits.