

УДК 539.3

**ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ПЕРЕХОДНЫХ ВОЛНОВЫХ  
ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛАХ  
С УЧЕТОМ НЕПРЕРЫВНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ МАТЕРИАЛА\***

© 2016 г. **Коровайцева Е.А., Пшеничнов С.Г.**

*НИИ механики Московского государственного университета  
им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

serp56@yandex.ru

*Поступила в редакцию 11.04.2016*

Рассматриваются задачи о распространении волн в неоднородных линейно-вязкоупругих телах. Предлагается заменить исходное неоднородное тело, параметры материала которого непрерывно зависят от координат, соответствующим кусочно-однородным телом с большим количеством однородных составляющих. В качестве примера рассмотрены переходные волновые процессы при плоской деформации в линейно-вязкоупругом цилиндре, свойства материала которого непрерывно изменяются вдоль радиуса. Внутренняя поверхность первоначально покоящегося полого цилиндра в некоторый момент подвергается воздействию изменяющейся во времени нагрузки, равномерно распределенной вдоль оси цилиндра. В соответствии с вышеуказанной методикой исходная задача заменяется аналогичной задачей для цилиндра тех же размеров, но состоящего из большого количества однородных коаксиальных слоев, на границах контакта между которыми приняты условия непрерывности вектора перемещений и вектора напряжений. Исследование волновых процессов в многослойном цилиндре проводится с помощью численно-аналитического решения. Представлены результаты расчетов при экспоненциальной зависимости мгновенного модуля сдвига от радиуса.

*Ключевые слова:* динамика линейно-вязкоупругих тел, неоднородное вязкоупругое тело, вязкоупругие волны.

Исследование нестационарных динамических задач для тел, физико-механические параметры материала которых являются непрерывными функциями координат, проводилось в ряде работ (например, [1–5]) в рамках линейной упругости при частных видах неоднородностей. Динамике термоупругого тела с неоднородностью степенного вида посвящена публикация [6]. Для тел с гладкими границами и общего вида непрерывной неоднородностью материала вполне естественно применить методику, состоящую в замене исходного непрерывно неоднородного упругого тела соответствующим кусочно-однородным телом с большим количеством составляющих, так, чтобы имела место аппроксимация функций, характеризующих

---

\* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проекты 16-38-60074 мол\_а\_дк, 15-08-00787-а, 16-08-00260-а).

непрерывно изменяющиеся свойства материала заданного тела. На возможность применения такого подхода в нестационарных динамических задачах теории упругости указывалось в работах [7–9], причем были проведены соответствующие исследования одномерных [9, 10] и двумерных [11] волновых процессов с использованием известных решений динамических задач теории упругости для кусочно-однородных цилиндрических тел. В настоящей статье предлагается применить указанную методику для исследования переходных волновых процессов в линейно-вязкоупругих телах, параметры материала которых непрерывно зависят от координат, используя известные решения динамических задач теории линейной вязкоупругости для кусочно-однородных тел.

### Общая постановка задачи

Рассмотрим нестационарную динамическую задачу линейной вязкоупругости для неоднородного тела, занимающего область  $\Omega$  с гладкой границей  $\Sigma$ . Ее математическая постановка включает в себя уравнения динамики

$$\operatorname{div} \tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \rho(\mathbf{x}) \frac{\partial^2 \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t^2}, \quad (1)$$

определяющие соотношения

$$\tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t) = 2\hat{\mu} \operatorname{def} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \hat{\lambda} \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \tilde{\mathbf{I}}, \quad \mathbf{x}(x_1, x_2, x_3) \in \Omega, \quad (2)$$

граничные условия

$$\tilde{\alpha}(\mathbf{x}) \tilde{\sigma}(\mathbf{x}, t) \mathbf{n} + \tilde{\beta}(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{p}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x} \in \Sigma, \quad t > 0, \quad (3)$$

и начальные условия

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{b}^{(1)}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{b}^{(2)}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (4)$$

Здесь  $\tilde{\sigma}$  – тензор напряжений;  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{f}$ ,  $\mathbf{b}^{(1)}$ ,  $\mathbf{b}^{(2)}$  – векторы перемещений, граничных воздействий, объемных сил, начальных перемещений и скоростей;  $\operatorname{def}$  – оператор, с помощью которого тензор малых деформаций  $\tilde{\varepsilon}$  выражается через  $\mathbf{u}$  (соотношения Коши в бескоординатной форме:  $\tilde{\varepsilon} = \operatorname{def} \mathbf{u}$ ),  $\mathbf{n}$  – единичная внешняя нормаль;  $\tilde{\alpha}$ ,  $\tilde{\beta}$  – тензоры второго ранга, определяющие тип граничных условий;  $\tilde{\mathbf{I}}$  – единичный тензор;  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\mu}$  – операторы вида

$$\hat{\lambda} = K_0(\mathbf{x})(1 - \hat{T}_v) - \frac{2}{3} G_0(\mathbf{x})(1 - \hat{T}_s), \quad \hat{\mu} = G_0(\mathbf{x})(1 - \hat{T}_s),$$

$$\hat{T}_m \xi(t) = \int_0^t T_m(\mathbf{x}, t - \tau) \xi(\tau) d\tau, \quad m = v, s,$$

$\rho(\mathbf{x})$ ,  $G_0(\mathbf{x})$ ,  $K_0(\mathbf{x})$ ,  $T_v(\mathbf{x}, t)$ ,  $T_s(\mathbf{x}, t)$  – соответственно плотность, мгновенные значения модулей сдвига и объемного сжатия, а также ядра объемной и сдвиговой релаксации. Все эти величины являются гладкими функциями аргумента  $\mathbf{x}$ . Область пространства возмущений считаем ограниченной.

Поставим вопрос о возможности замены рассматриваемого непрерывно неоднородного тела на соответствующее кусочно-однородное тело с большим количеством однородных составляющих, на границах контакта между которыми выпол-

нены условия непрерывности вектора перемещений и вектора напряжений. При этом подразумевается, что константы, характеризующие плотности, а также мгновенные значения модулей сдвига и объемного сжатия однородных составляющих аппроксимируют  $\rho(\mathbf{x})$ ,  $G_0(\mathbf{x})$ ,  $K_0(\mathbf{x})$ , а функции времени, соответствующие ядрам релаксации этих составляющих, аппроксимируют  $T_v(\mathbf{x}, t)$ ,  $T_s(\mathbf{x}, t)$ . Такой подход позволяет использовать известные решения нестационарных динамических задач теории линейной вязкоупругости для кусочно-однородных тел, однако правомерность предлагаемой замены начально-краевой задачи (1)–(4) даже при гладкости границы  $\Sigma$  и непрерывности внешних нагрузок неочевидна. С одной стороны, при достаточно большом числе однородных составляющих свойства соседних будут мало отличаться между собой, с другой стороны, поверхности контакта составляющих будут являться источниками дополнительных возмущений. Ввиду сложности проведения строгого математического обоснования предлагаемого подхода ограничимся в дальнейшем его проверкой только путем соответствующих расчетов для конкретных примеров. В случае линейной упругости подобного рода вычисления дали положительный результат [9–11], поэтому следует ожидать, что наличие у материала свойства вязкости ситуацию не ухудшит.

Заметим, что если первоначальные свойства материала тела описываются кусочно-гладкими функциями координат, то при их аппроксимации это можно учесть, расположив соответствующим образом границы раздела однородных составляющих. Отметим также, что в настоящем исследовании все вычисления проводились только для случаев, когда наследственные ядра не зависели от координат.

### Радиально неоднородный цилиндр

Рассмотрим нестационарную динамическую задачу для бесконечно длинного линейно-вязкоупругого полого кругового цилиндра  $R_0 < R < R_{\max}$ ,  $-\pi < \theta \leq \pi$  ( $R$ ,  $\theta$  – полярные координаты в плоскости поперечного сечения), когда мгновенные модуль сдвига  $G_0$  и коэффициент Пуассона  $\nu_0$ , а также плотность  $\rho$  непрерывно зависят от  $R$ , но неизменны в окружном направлении и вдоль образующей, а ядра объемной и сдвиговой релаксации являются только функциями времени, то есть  $T_v(t)$ ,  $T_s(t)$ . Цилиндр изначально покоится и не деформирован, а в момент  $t = 0$  на его внутреннюю поверхность  $R = R_0$  начинает действовать равномерно распределенная радиальная нагрузка  $Q(t)$ , при этом граница  $R = R_{\max}$  свободна (рис. 1а). Таким образом, выполнены условия плоской деформации и осевой симметрии.

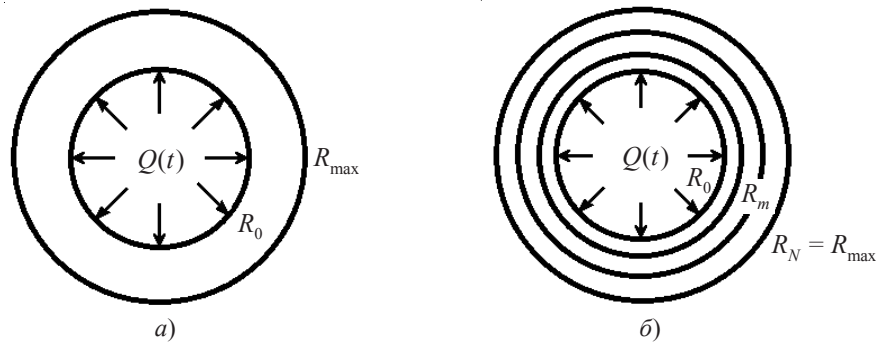


Рис. 1

Введем безразмерные величины:

$$r = \frac{R}{R_{\max}}, \quad r_0 = \frac{R_0}{R_{\max}}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \sigma_r(r, \tau) = \frac{P_R(R, t)}{2G_0(r)}, \quad \sigma_\theta(r, \tau) = \frac{P_\theta(R, t)}{2G_0(r)},$$

$$u(r, \tau) = \frac{U(R, t)}{R_{\max}}, \quad q_0 f(\tau) = \frac{Q(t)}{2G_0(r_0)}, \quad \gamma_s(\tau) = t_0 T_s(t), \quad \gamma_v(\tau) = t_0 T_v(t),$$

где  $U(R, t)$  – перемещение,  $P_R(R, t)$ ,  $P_\theta(R, t)$  – радиальное и кольцевое напряжения,  $q_0$  – безразмерная константа,  $t_0 = R_{\max}/c(1)$ ,  $c(r) = \sqrt{2w(r)G_0(r)/\rho(r)}$  – скорость продольных упругих волн,  $w(r) = [1 - v_0(r)]/[1 - 2v_0(r)]$ .

Математическую постановку задачи в безразмерной форме для отыскания величин  $\sigma_r(r, \tau)$ ,  $\sigma_\theta(r, \tau)$ ,  $u(r, \tau)$  приводить не будем, но отметим, что в качестве исходных данных она содержит безразмерные функции  $v_0(r)$ ,  $\rho(r)/\rho(r_0)$ ,  $G_0(r)/G_0(r_0)$ ,  $\gamma_s(\tau)$ ,  $\gamma_v(\tau)$ ,  $q_0 f(\tau)$  и константу  $r_0$ . Заменяем эту задачу аналогичной для цилиндра с теми же радиусами  $R_0$  и  $R_{\max}$ , но состоящего из большого количества ( $N \gg 1$ ) однородных коаксиальных слоев (рис. 1б), на границах контакта между которыми  $R = R_m$  ( $m = 1, 2, \dots, N-1$ ) векторы перемещений и напряжений непрерывны. Обозначим через  $G_0^{(n)}$ ,  $v_0^{(n)}$ ,  $\rho_n$ ,  $c_n$  мгновенные значения модуля сдвига и коэффициента Пуассона, а также плотность и скорость продольных упругих волн в  $n$ -м слое ( $m = 1, 2, \dots, N$ ),  $R_N = R_{\max}$ . Для такой задачи в качестве характерного времени выберем  $t_* = R_N/c_N$  и введем следующие безразмерные величины:

$$\tau = \frac{t}{t_*}, \quad \gamma_s(\tau) = t_* T_s(t), \quad \gamma_v(\tau) = t_* T_v(t), \quad r = \frac{R}{R_N}, \quad r_0 = \frac{R_0}{R_N}, \quad r_N = 1,$$

$$r_m = \frac{R_m}{R_N} \quad (m = 1, 2, \dots, N-1), \quad q_0 f(\tau) = \frac{Q(t)}{2G_0^{(1)}}, \quad a_n = \frac{c_N}{c_n}, \quad w_n = \frac{1 - v_0^{(n)}}{1 - 2v_0^{(n)}},$$

$$u^{(n)}(r, \tau) = \frac{U^{(n)}(R, t)}{R_N}, \quad \sigma_r^{(n)}(r, \tau) = \frac{P_R^{(n)}(R, t)}{2G_0^{(n)}}, \quad \sigma_\theta^{(n)}(r, \tau) = \frac{P_\theta^{(n)}(R, t)}{2G_0^{(n)}} \quad (n=1, 2, \dots, N),$$

где  $U^{(n)}$  – перемещение,  $P_R^{(n)}$ ,  $P_\theta^{(n)}$  – соответствующие напряжения в  $n$ -м слое.

Функции  $G_0(r)$ ,  $v_0(r)$ ,  $\rho(r)$ , соответствующие материалу исходного цилиндра, аппроксимируем с помощью соотношений:

$$G_n = G(r_n), \quad \rho_n = \rho(r_n), \quad v_n = v(r_n), \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

считая, что ядра  $T_v(t)$ ,  $T_s(t)$  определяют вязкоупругие свойства материала всех слоев.

Из соотношения  $c_n = c(r_n)$  следует равенство характерных времен:  $t_* = t_0$ . Толщины слоев можно выбирать с учетом вида функций  $G_0(r)$ ,  $v_0(r)$ ,  $\rho(r)$ , но в настоящей статье при всех вычислениях эти толщины брались одинаковыми.

Постановку задачи для слоистого цилиндра составляют уравнения динамики

$$(1 - \hat{d}_1^{(n)}) \frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial u^{(n)}(r, \tau)}{\partial r} + \frac{u^{(n)}(r, \tau)}{r} \right] - a_n^2 \frac{\partial^2 u^{(n)}(r, \tau)}{\partial \tau^2} = 0 \quad (n = 1, 2, \dots, N), \quad (5)$$

граничные условия

$$\sigma_r^{(1)}(r_0, \tau) = -q_0 f(\tau), \quad \sigma_r^{(N)}(1, \tau) = 0, \quad \tau > 0, \quad (6)$$

условия на контакте слоев ( $m = 1, 2, \dots, N - 1$ )

$$u^{(m)}(r_m, \tau) = u^{(m+1)}(r_m, \tau), \quad G_0^{(m)} \sigma_r^{(m)}(r_m, \tau) = G_0^{(m+1)} \sigma_r^{(m+1)}(r_m, \tau) \quad (7)$$

и начальные условия

$$u^{(n)}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial u^{(n)}}{\partial \tau}(r, 0) = 0. \quad (8)$$

При этом

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(n)}(r, \tau) &= w_n(1 - \hat{d}_1^{(n)}) \frac{\partial u^{(n)}(r, \tau)}{\partial r} + (w_n - 1)(1 - \hat{d}_2^{(n)}) \frac{u^{(n)}(r, \tau)}{r}, \\ \sigma_\theta^{(n)}(r, \tau) &= w_n(1 - \hat{d}_1^{(n)}) \frac{u^{(n)}(r, \tau)}{r} + (w_n - 1)(1 - \hat{d}_2^{(n)}) \frac{\partial u^{(n)}(r, \tau)}{\partial r}, \end{aligned} \quad (9)$$

где операторы  $\hat{d}_1^{(n)}$ ,  $\hat{d}_2^{(n)}$  и соответствующие им функции  $d_1^{(n)}$ ,  $d_2^{(n)}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \hat{d}_j^{(n)} \xi(\tau) &= \int_0^\tau d_j^{(n)}(\tau - \chi) \xi(\chi) d\chi, \quad j = 1, 2, \\ d_1^{(n)}(\tau) &= \frac{1}{3(1 - v_0^{(n)})} [(1 + v_0^{(n)}) \gamma_v(\tau) + 2(1 - 2v_0^{(n)}) \gamma_s(\tau)], \\ d_2^{(n)}(\tau) &= \frac{1}{3v_0^{(n)}} [(1 + v_0^{(n)}) \gamma_v(\tau) - (1 - 2v_0^{(n)}) \gamma_s(\tau)], \quad n = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Будем предполагать, что  $\gamma_s$ ,  $\gamma_v$  удовлетворяют условию ограниченной ползучести.

Представленные далее результаты получены с помощью численной реализации аналитического решения задачи (5)–(9), построенного с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени с последующим обращением трансформант. При регулярных наследственных ядрах  $\gamma_s$ ,  $\gamma_v$  в виде конечной суммы экспонент это решение (в оригиналах) представляется рядами [12]; при ядрах более общего вида его можно записать в интегральной форме [13].

### Результаты расчетов

Правомерность изложенной методики проверялась на задаче о цилиндре с разными видами непрерывной зависимости свойств материала от радиуса и различными непрерывными функциями внешней нагрузки  $f(\tau)$  при условии  $\lim_{\tau \rightarrow 0} f(\tau) = 0$ . Здесь показаны лишь некоторые характерные результаты для случая, когда функция нагрузки имеет вид «сглаженной ступеньки»:

$$f(\tau) = \begin{cases} 1 - e^{-100\tau} & \text{при } \tau \geq 0, \\ 0 & \text{при } \tau < 0, \end{cases} \quad (10)$$

а от радиуса зависит только мгновенный модуль сдвига, при этом

$$r_0 = 0,5; \quad v_0 \equiv 0,3; \quad \frac{\rho(r)}{\rho(r_0)} \equiv 1; \quad \frac{G_0(r)}{G_0(r_0)} = e^{3(r_0 - r)}; \quad \gamma_s(\tau) = e^{-1,5\tau}; \quad \gamma_v(\tau) \equiv 0. \quad (11)$$

Заметим, что при  $t \rightarrow \infty$  внешняя нагрузка  $Q(t)$  стремится к величине  $2G_0(r_0)q_0$ .

Графики на рис. 2 иллюстрируют изменение во времени концентрации кольцевого напряжения

$$k_{\theta}(r, \tau) = \frac{G_0(r)\sigma_{\theta}}{G_0(r_0)q_0} = \frac{P_{\theta}}{2G_0(r_0)q_0}$$

в точке  $r = 0,7$  при различном количестве аппроксимирующих слоев ( $N = 10, 20, 40$ ) в задаче (5)–(9). Для каждого  $N$  соответствующие толщины слоев брались одинаковыми. С дальнейшим ростом  $N$  графики практически не меняются; то же наблюдается и для концентрации радиального напряжения

$$k_r(r, \tau) = \frac{G_0(r)\sigma_r}{G_0(r_0)q_0} = \frac{P_R}{2G_0(r_0)q_0},$$

и для перемещения  $u(r, \tau)$ . Отрицательные напряжения являются сжимающими.

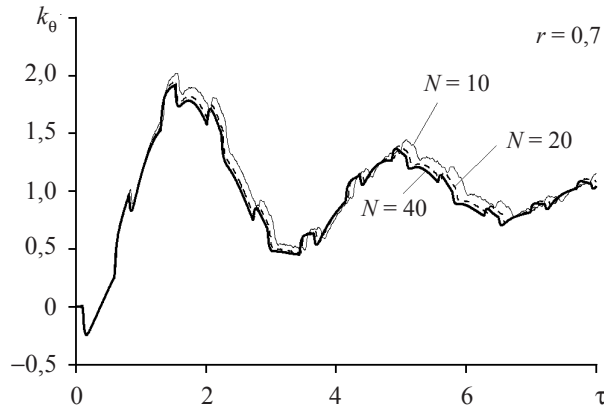


Рис. 2

Подобного рода сходимость результатов имела место и при других исходных данных. Таким образом, предлагаемый подход позволяет исследовать динамику цилиндра с непрерывной неоднородностью свойств материала.

Представим некоторые результаты, соответствующие волновым процессам в цилиндре с исходными данными (11) и в однородном цилиндре тех же размеров со следующими исходными данными:

$$r_0 = 0,5; \quad v_0 \equiv 0,3; \quad \frac{\rho(r)}{\rho(r_0)} \equiv 1; \quad \frac{G_0(r)}{G_0(r_0)} \equiv 1; \quad \gamma_s(\tau) = e^{-1,5\tau}; \quad \gamma_v(\tau) \equiv 0. \quad (12)$$

Для случая когда функция нагрузки имеет вид (10), зависимость концентраций радиальных и кольцевых напряжений  $k_r$  и  $k_{\theta}$  от  $\tau$  при фиксированных значениях представлена на рис. 3–5. Жирные линии 1 относятся к неоднородному цилиндру, тонкие линии 2 – к однородному.

Как видно из рисунков, по сравнению с однородным материалом (12) рассмотренная неоднородность (11) повышает максимальную концентрацию кольцевых напряжений на границе полости  $r = 0,5$  и снижает ее на свободной внешней границе  $r = 1$ .

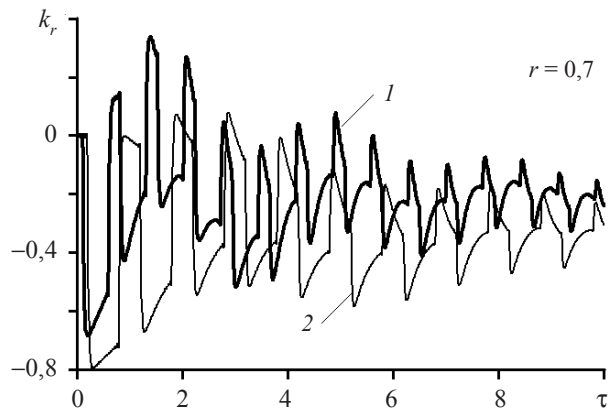


Рис. 3

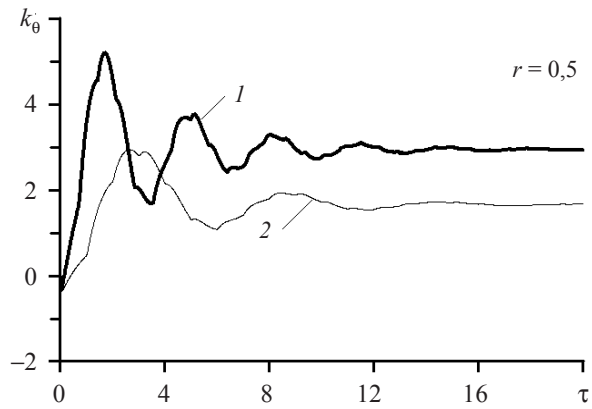


Рис. 4

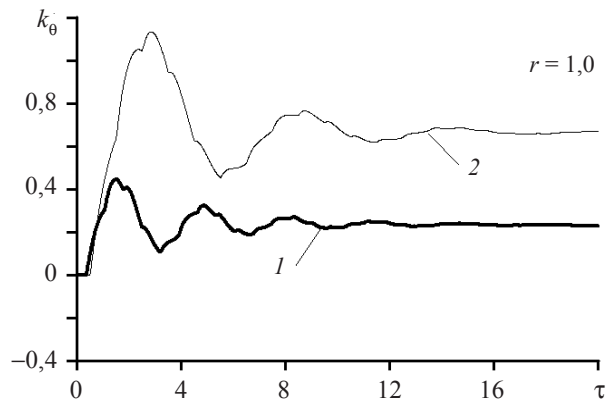


Рис. 5

### Заклучение

Представленные результаты иллюстрируют возможность использовать в задачах о распространении нестационарных волн в непрерывно неоднородных линейно-вязкоупругих телах решения динамических задач теории линейной вязкоупругости для кусочно-однородных тел с большим количеством однородных составляющих.

#### Список литературы

1. Sasadhar D. Dynamic vibrations and stresses in a circular annulus of non-isotropic elastic material. *Pure and Appl. Geophys.* 1972. Vol. 93, No 1. P. 68–72.
2. Сеницкий Ю.Э. Расчет неоднородных анизотропных цилиндра и сферы при действии произвольной радиально-симметричной динамической нагрузки. *Прикладная механика.* 1978. Т. 14, №5. С. 9–15.
3. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Черевко М.А. *Дифракция упругих волн.* Киев: Наукова думка, 1978. 303 с.
4. Беркович В.Н. Некоторые математические вопросы смешанных задач динамики неоднородной клиновидной среды. *Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки.* 2005. №4. С. 15–18.
5. Медведский А.Л. Задача о дифракции нестационарных упругих волн на неоднородной трансверсально изотропной сфере. *Механика композиционных материалов и конструкций.* 2008. Т. 14, №3. С. 473–489.
6. Ding H.J., Wang H.M., Chen W.Q. Analytical thermo-elastodynamic solutions for a non-homogeneous transversely isotropic hollow sphere. *Archive of Applied Mechanics.* 2002. Vol. 72. P. 545–553.
7. Филиппов И.Г., Бахрамов Б.М. *Волны в упругих однородных и неоднородных средах.* Ташкент: Фан, 1978. 215 с.
8. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Неустановившиеся радиальные колебания упругого кусочно-однородного пространства со сферической симметрией. *Изв. АН СССР. МТТ.* 1981. №1. С. 96–101.
9. Булычев Г.Г., Пшеничных С.Г. Осесимметричная задача динамики длинного упругого неоднородного цилиндра. *Строительная механика и расчет сооружений.* 1989. №4. С. 35–37.
10. Пшеничных С.Г. Об исследовании волновых процессов в непрерывно неоднородных упругих телах. *Вестник Тульского гос. ун-та. Серия Математика. Механика. Информатика.* Тула: ТулГУ. 2010. Т. 16. Вып. 2. С. 116–126.
11. Пшеничных С.Г. Влияние непрерывной неоднородности материала на волновые процессы в упругих цилиндрических телах. В кн.: *Упругость и неупругость.* М.: Изд-во МГУ, 2011. С. 442–445.
12. Пшеничных С.Г. Аналитическое решение одномерных задач динамики кусочно-однородных вязкоупругих тел. *Изв. АН СССР. МТТ.* 1991. №1. С. 95–103.
13. Пшеничных С.Г. Динамические задачи линейной вязкоупругости для кусочно-однородных тел. *Изв. РАН. МТТ.* 2016. №1. С. 79–89.

#### References

1. Sasadhar D. Dynamic vibrations and stresses in a circular annulus of non-isotropic elastic material. *Pure and Appl. Geophys.* 1972. Vol. 93, No 1. P. 68–72.
2. Senitskiy Yu.E. Raschet neodnorodnykh anizotropnykh tsilindra i sfery pri deystvii proizvol'noy radial'no-simmetrichnoy dinamicheskoy nagruzki. *Prikladnaya mekhanika.* 1978. Т. 14, №5. S. 9–15.
3. Guz' A.N., Kubenko V.D., Cherevko M.A. *Difraktsiya uprugikh voln.* Kiev: Naukova dumka, 1978. 303 s.
4. Berkovich V.N. Nekotorye matematicheskie voprosy smeshannykh zadach dinamiki neodnorodnoy klinovidnoy sredy. *Izv. vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki.* 2005. №4. S. 15–18.
5. Medvedskiy A.L. Zadacha o difraktsii nestatsionarnykh uprugikh voln na neodnorodnoy transversal'no izotropnoy sfere. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov i konstruktiv.* 2008. Т. 14, №3. S. 473–489.
6. Ding H.J., Wang H.M., Chen W.Q. Analytical thermo-elastodynamic solutions for a non-homogeneous transversely isotropic hollow sphere. *Archive of Applied Mechanics.* 2002. Vol. 72. P. 545–553.



7. Filippov I.G., Bakhramov B.M. *Volny v uprugikh odnorodnykh i neodnorodnykh sredakh*. Tashkent: Fan, 1978. 215 s.
8. Gorshkov A.G., Tarlakovskiy D.V. Neustanovivshiesya radial'nye kolebaniya uprugogo kusochno-odnorodnogo prostranstva so sfericheskoy simmetriey. *Izv. AN SSSR. MTT*. 1981. №1. S. 96–101.
9. Bulychev G.G., Pshenichnov S.G. Osesimmetrichnaya zadacha dinamiki dlinnogo uprugogo neodnorodnogo tsilindra. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 1989. №4. S. 35–37.
10. Pshenichnov S.G. Ob issledovanii volnovykh protsessov v nepreryvno neodnorodnykh uprugikh telakh. *Vestnik Tul'skogo gos. un-ta. Seriya Matematika. Mekhanika. Informatika*. Tula: TulGU. 2010. T. 16. Vyp. 2. S. 116–126.
11. Pshenichnov S.G. Vliyanie nepreryvnoy neodnorodnosti materiala na volnovye protsessy v uprugikh tsilindricheskikh telakh. V kn.: *Uprugost' i neuprugost'*. M.: Izd-vo MGU, 2011. S. 442–445.
12. Pshenichnov S.G. Analiticheskoe reshenie odnomernykh zadach dinamiki kusochno-odnorodnykh vyazkouprugikh tel. *Izv. AN SSSR. MTT*. 1991. №1. S. 95–103.
13. Pshenichnov S.G. Dinamicheskie zadachi lineynoy vyazkouprugosti dlya kusochno-odnorodnykh tel. *Izv. RAN. MTT*. 2016. №1. S. 79–89.

**THE STUDY OF TRANSIENT WAVE PROPAGATION  
IN LINEARLY VISCO-ELASTIC BODIES SUBJECT  
TO THE CONTINUOUS HETEROGENEITY OF THE MATERIAL**

**Korovaytseva E.A., Pshenichnov S.G.**

*Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University,  
Moscow, Russian Federation*

The problems of wave propagation in inhomogeneous linearly visco-elastic bodies are considered. It is proposed to replace the original inhomogeneous body, which material parameters continuously depend on the coordinates, by a piecewise homogeneous one with a large number of homogeneous components. The transient wave processes for plane deformation in a linearly visco-elastic cylinder, which material properties vary continuously along the radius are considered as an example. Internal surface of initially motionless hollow cylinder at some moment is subject to load varying in time and uniformly distributed along the cylinder axis. According to the methodology stated above the initial problem is replaced by the similar problem for the cylinder of the same size, but consisting of a large amount of homogeneous coaxial layers. On the boundaries of these layers we set conditions of displacements and stresses vectors continuity. Investigation of wave processes in multilayer cylinder is carried out by means of numerical analytic solution. Results of calculations considering exponential dependence of instantaneous shear modulus on radius are represented.

*Keywords:* dynamics of linearly visco-elastic bodies, inhomogeneous visco-elastic body, visco-elastic waves.