

УДК 539.3

## ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА МАКСИМАЛЬНОЙ ГЛУБИНЫ ПРОНИКАНИЯ ОПТИМАЛЬНЫХ ТЕЛ В ПЕСЧАНЫЙ ГРУНТ\*

© 2016 г.

Линник Е.Ю.

<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт механики  
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,  
Нижний Новгород, Российская Федерация

ElenkaLinnik@gmail.com

Поступила в редакцию 11.03.2016

Рассматривается проникание оптимальных осесимметричных тел вращения с заданными длиной и радиусом поперечного сечения по нормали к свободной поверхности в песчаный грунт при разрывном законе силы сопротивления внедрению. Разрыв силы при критической скорости, близкой к скорости звука, связан с различным поведением при дозвуковом и сверхзвуковом режимах. Величина критической скорости определена ранее в экспериментах по прониканию ударников конической и полусферической форм оголовков. Для описания силы трения использовался смешанный закон, выражающий ограниченность касательных напряжений при закритических скоростях.

Разработана численная методика и получены оптимальные формы тел с кусочно-линейным представлением образующей. Поиск осуществляется в классе заглушенных тел с плоским передним торцом модифицированным методом локальных вариаций. В задаче оптимизации в качестве целевой функции рассматривается глубина проникания, для определения которой применены двучленная квадратичная модель локального взаимодействия, включающая в себя инерционное и прочностное слагаемые, и смешанный закон с постоянным и кулоновским трением. Получены зависимости радиуса притупления оптимальных тел и их максимальных глубин проникания от выбора закона трения и параметров модели, которые качественно соответствуют известным экспериментальным данным. Установлено, что при высоких скоростях проникания закон трения Кулона приводит к существенно бóльшим различиям форм и максимальных глубин проникания по сравнению со смешанной моделью трения.

*Ключевые слова:* грунтовая среда, тело вращения, оптимизация, максимальная глубина проникания, модель локального взаимодействия.

### Введение

Исследование процессов взаимодействия жестких тел с потоком сопротивляющейся среды представляет собой сложную задачу, эффективное решение которой

---

\* Выполнено при частичном финансировании РФФИ (гранты № 16-38-60035-мол\_а\_дк, 16-08-00825-а, 16-38-00102-мол-а).

требует совместного применения экспериментальных и теоретических методов. В экспериментальных исследованиях процессов соударения твердых тел с преградами чаще всего регистрируют глубину внедрения в зависимости от времени, конечную глубину внедрения, изменение скорости в процессе проникания и ускорение ударника. Хорошо известны работы (например, [1]), в которых исследовалось проникание цилиндрических ударников с коническими оголовками в сухой песок при скоростях удара 700–800 м/с, определялись параметры уравнения движения и зависимости глубины проникания от скорости движения. В [2] проводились измерения конечных глубин внедрения в зависимости от скорости удара при проникании стальных шариков в сухой песок. В прямых экспериментах [3] регистрировалась зависимость глубины проникания от времени при проникании ударников со сферическим оголовком в сухой песок, определялись параметры уравнения движения, установлен кавитационный характер обтекания ударников сухим песком. Все авторы указанных статей выделяли участок резкого изменения измеряемых величин при некоторой критической скорости ( $V_k \sim 100$  м/с), наличие которого связывали со сменой режима процесса проникания, что характеризует песчаный грунт как сложную нелинейную среду.

Среди теоретических методов исследования движения тел в грунтовых средах широкое распространение получили приближенные модели локального взаимодействия (МЛВ). В [4, 5] рассмотрена задача оптимизации пространственных тел и представлено ее решение на основе модели локального взаимодействия. Развитие моделей проводилось для различных законов трения: постоянного, Кулона и смешанного законов. Модель постоянного трения часто используется при описании высокоскоростного движения в средах малой и средней прочности (типа грунтов), когда предполагается, что касательные напряжения достигли своего максимального значения и равны пределу текучести, постоянно вдоль всей поверхности тела. Этот факт был экспериментально установлен Ю.К. Бивиним [6] при проникании конических ударников с различными углами раствора и с закритическими скоростями в глины. В рамках этой модели касательные напряжения считаются пропорциональными давлению. Смешанная модель трения [7] является наиболее обоснованной с физической точки зрения [5, 8] обобщением моделей на случай движения тела в плотных средах.

Следует отметить, что параметры МЛВ, как правило, определяются при сильных упрощениях поведения грунта в рамках приближенных теорий. Отмеченные выше особенности поведения песчаных грунтов при ударе и проникании могут достаточно точно описываться в рамках модели С.С. Григоряна [9], что подтверждается данными численных расчетов при соответствующем выборе параметров [10–12]. На основе анализа известных экспериментальных данных [13, 14] и результатов численных расчетов проникания ударников различной формы в песчаный грунт показано существенное влияние сдвиговой прочности, нелинейной и необратимой объемной сжимаемости, влияние свободной поверхности, поверхностного трения и других особенностей [12, 14]. Предложены различные модификации МЛВ с учетом наиболее важных нелинейных свойств сухого песка – сжимаемости и сопротивления сдвигу. Модели оснащены параметрами, полученными экспериментально [9, 15], с применением численной методики в осесимметричной постановке [3], а также на основе аналитического решения [16] задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде.

В настоящей статье численно получены формы затупленных осесимметричных тел максимальной глубины проникания в пластические грунтовые среды при совместном применении разрывного закона сопротивления и смешанного закона трения. Проведено сравнение полученных форм и конечных глубин проникания при использовании различных законов сопротивления и поверхностного трения.

### 1. Математическая постановка задачи

Рассматривается проникание ударника длиной  $L$ , радиусом миделя  $R$  и радиусом притупления  $R_0$  в цилиндрической системе координат  $zOr$  с началом отсчета в вершине тела в постановке, использованной в работах [17, 18] (рис. 1).

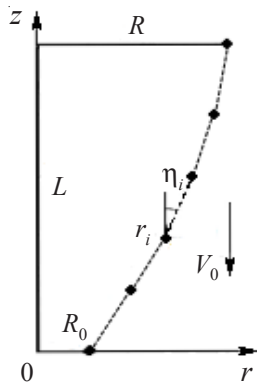


Рис. 1

В пренебрежении стадией внедрения головной части искомого ударника обтекание грунтом считаем безотрывным. В общем виде сила сопротивления внедрению определяется в виде суммы инерционного и прочностного слагаемых:

$$F = \frac{1}{2} \rho_0 C_x V^2 S_0 + C_0, \quad (1)$$

где  $\rho_0$  – плотность грунта,  $S_0$  – площадь миделя поперечного сечения,  $C_x$  – коэффициент сопротивления внедрению ударника в песчаный грунт,  $C_0$  – прочностное слагаемое,  $V$  – скорость ударника.

Сопротивление среды представляется в виде ступенчатой зависимости [1], изображенной на рис. 2 ( $a$  – график зависимости коэффициента сопротивления от скорости проникания;  $b$  – сила сопротивления внедрению  $F$ , отнесенная к величине силы сопротивления  $F_k = \rho_0 V_k^2 S$ , соответствующей критической скорости  $V_k$ ). Ранее разрывное сопротивление использовалось при исследовании движения тел в грунтовых средах [1, 3], однако применительно к расчету максимальной глубины проникания оптимальных тел вопрос исследован недостаточно.

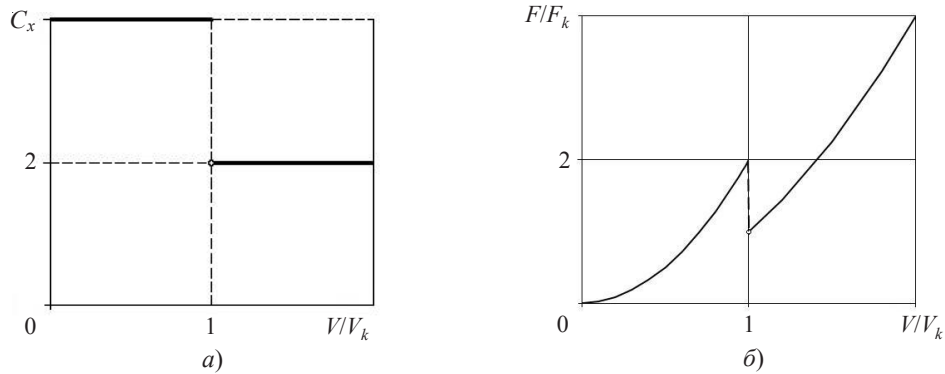


Рис. 2

Нормальное напряжение на элементе поверхности тела с углом раствора  $\eta$  (см. рис. 1) определяется с учетом смешанного закона сопротивления (1) в соответствии с квадратичной моделью локального взаимодействия и находится по следующей формуле:

$$\sigma_n = \begin{cases} A_1 V^2 \alpha^2 + C_1, & V \leq V_k, \\ A_2 V^2 \alpha^2 + C_2, & V > V_k, \end{cases} \quad (2)$$

где  $A_1, A_2, C_1, C_2$  – постоянные величины,  $\alpha = \sin \eta$ .

Касательные напряжения с учетом смешанного закона сопротивления определяются по формуле:

$$\sigma_\tau = \begin{cases} k_f \sigma_n(V\alpha) + \tau_1, & V \leq V_k, \\ \tau_2, & V > V_k, \end{cases} \quad (3)$$

где  $\tau_1, \tau_2$  – постоянные величины.

Глубина проникания  $S$  определяется решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = V, & S(0) = 0, \\ m \frac{dV}{dt} = F(V), & V(0) = V_0. \end{cases}$$

Преобразуем задачу Коши, используя выражение

$$\frac{dV}{dS} \frac{dS}{dt} = V \frac{dV}{dS},$$

к виду:

$$dS = m \frac{V dV}{F(V)}, \quad V(0) = V_0.$$

Тогда задача поиска формы тела вращения, обеспечивающей максимальную глубину проникания при смешанном законе сопротивления (2), (3), имеет вид:

$$S(r) = m \int_0^{r_0} \frac{V dV}{F(r)} \rightarrow \max, \quad r(0) = r_0, \quad r(L) = R. \quad (4)$$

Для приближенного решения задачи оптимизации образующая искомого оптимального тела представляется в виде ломаной  $r_i(z_i)$ , координаты  $z_i$  которой распределяются по длине тела с шагом  $\Delta z_i$ ,  $\alpha_i = \sin \eta_i = \Delta r_i / \sqrt{\Delta z_i^2 + \Delta r_i^2}$ ,  $\Delta r_i = r_i - r_{i-1}$ ,  $i = 1, N$ ,  $r_N = R$  (см. рис. 1).

Сила сопротивления внедрению будет иметь вид:

$$\begin{aligned} F &= AV^2 + C, \\ A &= \pi A_j r_0^2 + \pi A_j \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 (1 + \tilde{k}_f) (r_i^2 - r_{i-1}^2), \\ C &= \pi C_j r_0^2 + \pi (1 + \tilde{k}_f) C_j \sum_{i=1}^N (r_i^2 - r_{i-1}^2), \quad \tilde{k}_f = k_f \frac{\sqrt{1 - \alpha_i^2}}{\alpha_i}, \end{aligned} \quad (5)$$

$j = 1$  при  $V \leq V_k$  и  $j = 2$  при  $V > V_k$ .

Глубина проникания тела вращения до полной остановки определяется следующим выражением:

$$S = \begin{cases} \frac{m}{2A_1} \ln \left( \frac{A_1}{C_1} V_0^2 + 1 \right), & V_0 \leq V_k, \\ \frac{m}{2A_2} \ln \left( \frac{A_2}{C_2} V_0^2 + 1 \right) + S_k, & V_0 > V_k, \end{cases} \quad (6)$$

где  $S_k = m/A_1 \ln(V_0/V_k)$  – глубина проникания, достигнутая при критической скорости.

Решение задачи оптимизации (4) с учетом выражений (5), (6) сводится к задаче безусловной оптимизации: необходимо найти такой набор координат  $(r_0, \dots, r_{N-1})$ , представляющий выпуклую образующую тела вращения, что величина глубины проникания, взятая со знаком минус, достигает минимума, то есть  $-S(r_0, \dots, r_{N-1}) \rightarrow \min$ . Отметим, что поиск образующей оптимального тела осуществляется в классе затупленных тел и реализует частный случай известного метода локальных вариаций [19].

Модификация метода локальных вариаций заключается в приближенном представлении выражения для производных, определенного ранее методом конечных разностей [17]. Величина безразмерной вариации координаты  $\delta$  выбирается равной 0,0001, что приводит к ошибке менее 1%.

## 2. Результаты численных расчетов

Рассмотрим проникание ударников массой  $m = 40$  г в песчаную смесь естественного состава с начальной плотностью  $\rho_0 = 1,6$  г/см<sup>3</sup> и прочностью на сдвиг  $\tau = 0,01$  МПа. Для этого грунта экспериментально [1, 2] определены значения параметров среды:  $A_1 = 2\rho_0$ ,  $A_2 = \rho_0$ ,  $C_1 = C_2 = 0,1$  МПа. Относительное удлинение ударника  $l = L/R = \sqrt{5}$ . Расчеты проводились при начальных скоростях проникания до 400 м/с.

На рис. 3 цифрами 1, 2, 3 отмечены максимальные глубины проникания, когда сила сопротивления внедрению определяется при нулевом трении  $k_f = 0$  соответственно законами Понселе  $F = A_2 V^2 + C_2$ ,  $F = A_1 V^2$  и по формуле (2) с учетом разрывного закона сопротивления. Полученные глубины соответствуют различным формам оптимальных затупленных тел.

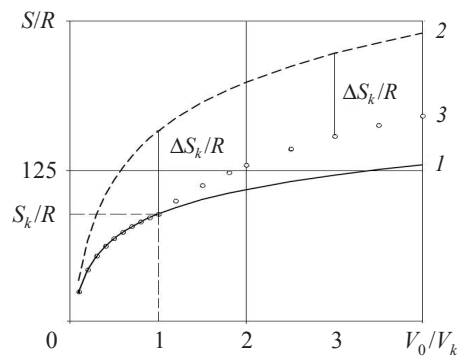


Рис. 3

Кривые 2 и 3 при  $V_0 > V_k$  отличаются на величину  $\Delta S_k$ , определенную при критической скорости  $V_k$ :

$$\Delta S_k = (S_2 - S_3)|_{V_0=V_k} = \frac{m}{2} \ln \left( \frac{((A_2 V_0^2 + C_2)/C_2)^{1/A_2}}{((A_1 V_0^2 + C_1)/C_1)^{1/A_1}} \right),$$

где  $S_2$  и  $S_3$  соответствуют максимальным глубинам проникания (см. рис. 3).

С учетом  $A_1 = 2A_2$  и  $C_1 = C_2$  имеем:

$$\Delta S_k = \frac{m}{2A_2} \ln \left( \frac{A_2 V_0^2 + C_2}{\sqrt{C_2(2A_2 V_0^2 + C_2)}} \right).$$

Таким образом, максимальная глубина проникания оптимального тела определяется выражением:

$$S = \begin{cases} S_3, & V_0 \leq V_k, \\ S_2 + \Delta S_k, & V_0 > V_k. \end{cases}$$

Численные расчеты показали, что с ростом начальной скорости внедрения радиус притупления не изменяется при отсутствии поверхностного трения, при этом с ростом скорости от 50 до 400 м/с глубина проникания возрастает практически в 2,5 раза.

Далее проведено исследование влияния сухого трения на форму оптимального тела и максимальную глубину. Экспериментально установлено, что для песчаных грунтов при докритических скоростях коэффициент трения  $k_f = 0,3$  [8].

На рис. 4 цифрами 1, 2, 3 обозначены зависимости максимальной глубины проникания оптимальных тел при разрывном законе сопротивления и различных законах трения от скорости проникания: 1 – закон Кулона, 2 – смешанный закон при постоянном касательном напряжении  $\tau_2 = k_f \sigma_n(V_k)$  при закритических скоростях и 3 – смешанный закон при отсутствии трения при закритических скоростях.

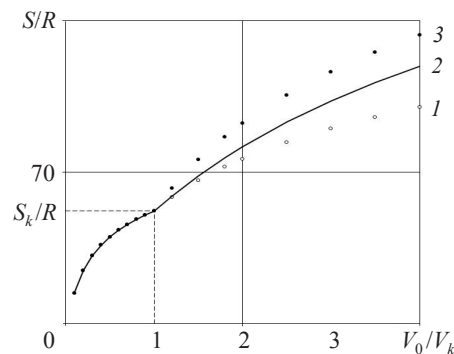


Рис. 4

Представленные зависимости качественно совпадают с экспериментальными кривыми, полученными в [2]. Из сравнения результатов на рис. 3 и рис. 4 следует, что наибольшее влияние выбранного закона трения на максимальную глубину проникания оптимальных тел наблюдается при малых скоростях, близких к критическим [3].

На рис. 5 представлены графики зависимости глубины проникания и радиуса притупления при изменении коэффициента сухого трения при начальной скорости 400 м/с. Сплошными линиями на рис. 5 показаны максимальная глубина проникания (а) и радиус притупления оптимального тела (б) в случае, когда сухое трение учитывается лишь на стадии дозвукового проникания  $V \leq V_k$ , штриховыми линиями – то же с учетом трения во всем диапазоне изменения скоростей. На графиках видно, что с ростом коэффициента трения  $k_f$  от 0 до 0,5 глубина проникания умень-

шается в 1,5 раза. При этом радиус притупления без учета трения при высоких скоростях изменяется незначительно, а при учете трения на всей стадии проникания может возрасти в 1,8 раза.

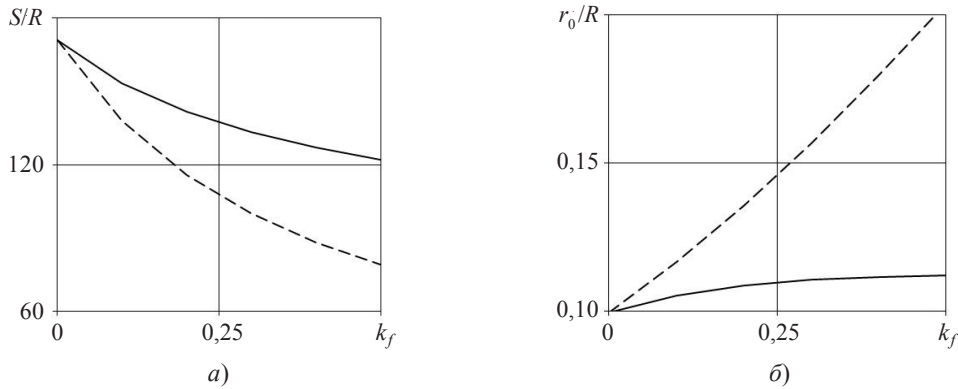


Рис. 5

На рис. 6 представлен график разности глубин проникания в диапазоне скоростей 100–400 м/с с учетом трения Кулона ( $k_f = 0,3$ ) во всем диапазоне изменения скоростей и при учете трения лишь при докритических скоростях:

$$\delta S = \frac{S_{f1} - S_{f2}}{S_{f1}},$$

где  $S_{f1}$  – максимальная глубина проникания с учетом трения лишь при докритических скоростях,  $S_{f2}$  – при законе трения Кулона во всем диапазоне изменения скоростей.

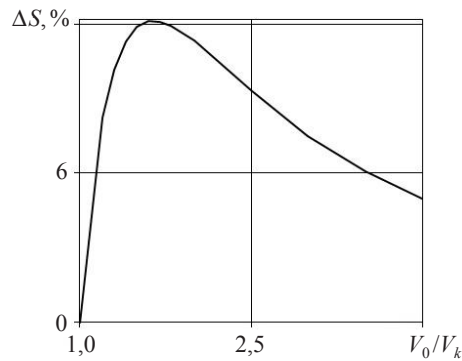


Рис. 6

Установлено, что максимальная разность глубин проникания не превышает 12% в указанном диапазоне скоростей. При скоростях порядка 1000 м/с разность глубин проникания составляет ~ 1%, что позволяет не учитывать трение при высоких скоростях проникания.

### Заключение

Реализована модель, позволяющая находить формы оптимальных тел максимальной глубины проникания с учетом разрывного закона сопротивления внедрению и смешанного закона трения. Результаты сравнения численных расчетов проникания тел в песчаный грунт с околосвуковыми скоростями с известными экспе-

риментальными данными [2] показывают, что лучшее качественное соответствие достигается при использовании смешанного закона трения и разрывного закона сопротивления, а разработанная модель при соответствующей калибровке и сравнении с данными натурных экспериментов может быть применима к расчету параметров оптимальных тел, проникающих в грунтовые среды.

#### Список литературы

1. Allen W.A., Mayfield E.B., Morrison H.L. Dynamics of a projectile penetrating sand. *Journal of Applied Physics*. 1957. Vol. 28. P. 370–376.
2. Бивин Ю.К. Проникание твердых тел в сыпучие и слоистые среды. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2008. Т. 1. С. 154–160.
3. Котов В.Л., Баландин В.В., Брагов А.М., Баландин Вл.Вл. Квазистационарное движение твердого тела в сыпучем грунте при развитой кавитации. *Докл. РАН*. 2013. Т. 451, №3. С. 278–282.
4. Якунина Г.Е. Оптимальные формы движущихся в среде тел при учете трения. *Прикладная математика и механика*. 2005. Т. 69. Вып. 5. С. 759–774.
5. Якунина Г.Е. Особенности высокоскоростного движения тел в плотных средах. *Прикладная математика и механика*. 2012. Т. 76. Вып. 3. С. 429–449.
6. Бивин Ю.К., Симонов И.В. Механика динамического проникания в грунтовую среду. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2010. Т. 6. С. 157–191.
7. Григорян С.С. Новый закон трения и механизм крупномасштабных горных обвалов и оползней. *ДАН СССР*. 1979. Т. 244, №4. С. 846–849.
8. Велданов В.А., Федоров С.В. Особенности поведения грунта на границе контакта с недеформируемым ударником при проникании. *Прикладная механика и техническая физика*. 2005. Т. 46, №6. С. 116–127.
9. Котов В.Л., Баландин Вл.В., Линник Е.Ю., Баландин Вл.Вл. Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт. *Прикладная механика и техническая физика*. 2013. Т. 54, №4. С. 114–125.
10. Баженов В.Г., Котов В.Л., Кочетков А.В. Численное моделирование нагружения песчаного грунта взрывом накладного заряда. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2001. №2. С. 70–77.
11. Баженов В.Г., Котов В.Л. Метод идентификации упругопластических свойств грунтовых сред при внедрении ударников. *Изв. РАН. Механика твердого тела*. 2008. №4. С. 184–190.
12. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л., Кочетков А.В. Исследование удара и проникания тел вращения в мягкий грунт. *Прикладная математика и механика*. 2003. №6. С. 686–697.
13. Брагов А.М., Котов В.Л., Ломунов А.К., Сергеев И.В. Анализ особенностей измерения динамических характеристик мягких грунтов методом Кольского. *Прикладная механика и техническая физика*. 2004. Т. 45, №4. С. 147–153.
14. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л. Экспериментально-теоретические исследования процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред. *Прикладная механика и техническая физика*. 2009. Т. 50, №6. С. 115–124.
15. Линник Е.Ю. Определение параметров модели локального взаимодействия при внедрении конических ударников в песчаный грунт. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2014. №1(1). С. 186–191.
16. Линник Е.Ю., Котов В.Л., Тарасова А.А., Гоник Е.Г. Решение задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде в предположении несжимаемости за фронтом ударной волны. *Проблемы прочности и пластичности*. 2012. Вып. 74. С. 49–57.
17. Котов В.Л., Линник Е.Ю. Численный расчет формы тела вращения минимального сопротивления движению в грунтовой среде в рамках модели локального взаимодействия. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Вып. 75(4). С. 296–302.



18. Котов В.Л., Линник Е.Ю. Численный расчет оптимальной формы тела вращения при движении с постоянной скоростью в грунтовой среде. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2014. Т. 7, №2. С. 142–150.

19. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Localized interaction models with non-constant friction for rigid penetrating impactors. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. P. 2593–2607.

#### References

1. Allen W.A., Mayfield E.B., Morrison H.L. Dynamics of a projectile penetrating sand. *Journal of Applied Physics*. 1957. Vol. 28. P. 370–376.

2. Bivin Yu.K. Pronikanie tverdykh tel v sypuchie i sloistye sredy. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 2008. Т. 1. С. 154–160.

3. Kotov V.L., Balandin V.V., Bragov A.M., Balandin V.I. Kvazistatsionarnoe dvizhenie tverdogo tela v sypuchem grunte pri razvitoy kavitatsii. *Dokl. RAN*. 2013. Т. 451, №3. С. 278–282.

4. Yakunina G.E. Optimal'nye formy dvizhushchikhsya v srede tel pri uchete treniya. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2005. Т. 69. Vyp. 5. С. 759–774.

5. Yakunina G.E. Osobennosti vysokoskorostnogo dvizheniya tel v plotnykh sredakh. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2012. Т. 76. Vyp. 3. С. 429–449.

6. Bivin Yu.K., Simonov I.V. Mekhanika dinamicheskogo pronikaniya v gruntovuyu sredy. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 2010. Т. 6. С. 157–191.

7. Grigoryan S.S. Novyy zakon treniya i mekhanizm krupnomasshtabnykh gornykh obvalov i opolzney. *DAN SSSR*. 1979. Т. 244, №4. С. 846–849.

8. Veldanov V.A., Fedorov S.V. Osobennosti povedeniya grunta na granitse kontakta s nedeforimiruemym udarnikom pri pronikani. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2005. Т. 46, №6. С. 116–127.

9. Kotov V.L., Balandin V.I., Linnik E.Yu., Balandin V.I. Primenenie modeli lokal'nogo vzaimodeystviya dlya opredeleniya sily soprotivleniya vnedreniyu udarnikov v peschanyy grunt. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2013. Т. 54, №4. С. 114–125.

10. Bazhenov V.G., Kotov V.L., Kochetkov A.V. Chislennoe modelirovanie nagruzheniya peschanogo grunta vzyryvom nakladnogo zaryada. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 2001. №2. С. 70–77.

11. Bazhenov V.G., Kotov V.L. Metod identifikatsii uprugoplasticheskikh svoystv gruntovykh sred pri vnedrenii udarnikov. *Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela*. 2008. №4. С. 184–190.

12. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Kotov V.L., Kochetkov A.V. Issledovanie udara i pronikaniya tel vrashcheniya v myagkiy grunt. *Prikladnaya matematika i mekhanika*. 2003. №6. С. 686–697.

13. Bragov A.M., Kotov V.L., Lomunov A.K., Sergeichev I.V. Analiz osobennostey izmereniya dinamicheskikh kharakteristik myagkikh gruntov metodom Kol'skogo. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2004. Т. 45, №4. С. 147–153.

14. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Kotov V.L. Eksperimental'no-teoreticheskie issledovaniya protsessov pronikaniya zhestkikh udarnikov i identifikatsiya svoystv gruntovykh sred. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2009. Т. 50, №6. С. 115–124.

15. Linnik E.Yu. Opredelenie parametrov modeli lokal'nogo vzaimodeystviya pri vnedrenii konicheskikh udarnikov v peschanyy grunt. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*. 2014. №1(1). С. 186–191.

16. Linnik E.Yu., Kotov V.L., Tarasova A.A., Gonik E.G. Reshenie zadachi o rasshirenii sfericheskoy polosti v gruntovoy srede v predpolozhenii neszhimaemosti za frontom udarnoy volny. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2012. Vyp. 74. С. 49–57.

17. Kotov V.L., Linnik E.Yu. Chislennyy raschet formy tela vrashcheniya minimal'nogo soprotivleniya dvizheniyu v gruntovoy srede v ramkakh modeli lokal'nogo vzaimodeystviya. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2013. Vyp. 75(4). С. 296–302.

18. Kotov V.L., Linnik E.Yu. Chislennyy raschet optimal'noy formy tela vrashcheniya pri dvizhenii s postoyannoy skorost'yu v gruntovoy srede. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*. 2014. Т. 7, №2. С. 142–150.

19. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. Localized interaction models with non-constant friction for rigid penetrating impactors. *International Journal of Solids and Structures*. 2007. Vol. 44. P. 2593–2607.

### **SOME SPECIAL FEATURES OF DETERMINING THE MAXIMAL PENETRATION DEPTH OF OPTIMAL BODIES INTO A SAND SOIL**

**Linnik E.Yu.**

*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,  
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

Penetration of optimal axisymmetric bodies of revolution of assigned length and cross-sectional radii, normal to the free surface into a sand soil with a discontinuous law of resistance to penetration is considered. The discontinuity of the force at a critical velocity near sonic velocity is connected with a difference in the subsonic and supersonic behavior. The critical velocity value was determined earlier in the experiments on penetration of strikers with conical and hemispherical heads. A mixed law expressing the finite nature of tangential stresses at supercritical velocities was used to describe the friction force.

A numerical methodology is developed and optimal forms of bodies with the piecewise-linear representation of the generatrix are found. The search was conducted in a class of obtuse bodies with a flat front end modified using the local variation method. In the optimization problem, penetration depth is considered as the objective function, which is determined using: a binomial local interaction model, including inertial and strength components, and a mixed law with constant and Coulomb friction. Expression for determining the obtuseness radius of optimal bodies and their maximal penetration depth as a function of the chosen friction law and model parameters are found, which qualitatively agree with the available experimental data. It is found that, at high penetration velocities, Coulomb friction law results in substantial differences in the forms and maximal penetration depths as compared with a mixed friction model.

*Keywords:* soil medium, body of revolution, optimization, maximal penetration depth, local interaction model.