

УДК 539.374

**СВОЙСТВА СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ ПОЛЗУЧЕСТИ
ДЛЯ НАГРУЖЕНИЯ С ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТЬЮ
НА НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ, ПОРОЖДАЕМЫХ
ЛИНЕЙНЫМ СООТНОШЕНИЕМ ВЯЗКОУПРУГОСТИ**

© 2016 г.

Хохлов А.В.

*НИИ механики Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

andrey-khokhlov@ya.ru

Поступила в редакцию 08.12.2015

Аналитически изучены общие качественные свойства семейств кривых ползучести при наличии начальной стадии с постоянной скоростью нагружения, порождаемых линейным интегральным определяющим соотношением вязкоупругости с произвольной функцией ползучести (релаксации): интервалы монотонности и выпуклости, скачки скорости деформации, асимптотика, их зависимость от характеристик начальной стадии нагружения и свойств функции ползучести, условия независимости асимптотики от начальной стадии и стремления к нулю (с ростом времени) отклонения от кривых ползучести при мгновенном нагружении, характер сходимости семейств кривых ползучести при стремлении длительности начальной стадии к нулю и другие свойства. Такой качественный анализ полезен для совершенствования методик выбора, идентификации и настройки линейных моделей, уточнения арсенала возможностей и области (не)применимости линейного определяющего соотношения и выявления индикаторов нелинейности поведения материалов по свойствам их экспериментальных кривых.

Ключевые слова: вязкоупругопластичность, кривые ползучести, влияние начальной стадии нагружения, скорость нагружения, качественный анализ, асимптотика, затухание памяти.

Введение

Мгновенное нагружение до заданного постоянного уровня напряжения по функции Хевисайда $h(t)$ не осуществимо при квазистатических испытаниях материалов: на практике всегда имеется начальная стадия нагружения (НСН) – как правило, стадия с (примерно) постоянной скоростью нагружения (ramp tests). Наличие НСН и влияние ее длительности (rise time) и других характеристик на экспериментальные и теоретические кривые ползучести (КП) и на «окно наблюдения» необходимо учитывать [1–8] при обработке опытных данных и идентификации материальных функций и параметров используемого определяющего соотношения (ОС). Эксперименты на ползучесть (и релаксацию) при ramp-нагружении – важный вид квазистатических испытаний, включенный в западные стандарты протоколов испыта-

ний, позволяющий уловить и исследовать разные аспекты поведения материала и детали реализации многих эффектов (например, построить как диаграммы деформирования при разных скоростях нагружения (СН), так и КП при разных уровнях напряжения и длительностях НСН, наблюдать эффекты, сопровождающие скачок СН вниз до нуля и т.п.), собрать более богатую информацию для идентификации и верификации моделей и выявления лучшей из них по сравнению с кривыми ползучести при постоянном напряжении, которые все модели описывают адекватно при правильной настройке. Однако для расшифровки результатов испытаний и их планирования, правильной интерпретации, верного выбора ОС, его идентификации и настройки и грамотного применения необходимо точное знание общих свойств теоретических кривых (ползучести, релаксации, деформирования и других), порождаемых рассматриваемыми ОС (линейным и прочими), полученное в результате *аналитического* изучения их уравнений.

Отсюда следует, в частности, необходимость аналитического изучения влияния параметров НСН на общие свойства теоретических КП, которые порождает применяемое ОС (например, линейное интегральное ОС вязкоупругости или обобщающее его ОС «нелинейной теории наследственности» Ю.Н. Работнова [9–12]) с произвольными материальными функциями, а не только функциями конкретных видов. Такое исследование не было выполнено даже для одномерного линейного ОС, хотя оно весьма полезно для уточнения арсенала его возможностей и области (не)применимости и выявления индикаторов (не)линейности поведения материалов по результатам испытаний.

Настоящая работа – очередной шаг в программе качественного анализа линейного ОС вязкоупругости и обобщающего его нелинейного ОС Работнова с произвольными функциями релаксации и ползучести (ФР и ФП) [12–20]:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau) \quad \text{или} \quad \sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

ОС (1) описывает изотермические одноосные процессы в структурно-стабильных вязкоупругопластичных материалах, характеризуемые в данной точке тела напряжением $\sigma(t)$ и деформацией $\varepsilon(t)$ (входные процессы предполагаются кусочно-непрерывными и кусочно-гладкими при $t \geq 0$). Операторами вида (1) задаются и трехмерные ОС вязкоупругости в изотропном случае. ФП $\Pi(t)$ предполагается неотрицательной, дифференцируемой, возрастающей, выпуклой вверх на интервале $[0, \infty)$ [13], а $R(t)$ – положительной, убывающей и выпуклой вниз на интервале $(0, \infty)$ (ФР может иметь интегрируемую особенность или δ -сингулярность в точке $t = 0$).

Операторы (1) взаимно обратны, и потому ФП и ФР связаны уравнением

$$\int_0^t \Pi(t-\tau) R(\tau) d\tau = t \quad \text{или} \quad \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau) R(\tau) d\tau + \Pi(0) R(t) = 1, \quad t > 0. \quad (2)$$

Зная ФР, можно, в принципе, найти ФП из уравнения (2) и наоборот. Поэтому одномерное ОС (1) содержит лишь одну материальную функцию.

Если $\Pi(0) \neq 0$, то на множестве *непрерывных* и кусочно-дифференцируемых при $t \geq 0$ процессов $\varepsilon(t)$, $\sigma(t)$ интегральные операторы (1) действуют по формулам:

$$\varepsilon(t) = \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau) d\tau, \quad \sigma(t) = R(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varepsilon(\tau) d\tau, \quad t \geq 0. \quad (3)$$

Если $\Pi(0) \neq 0$, то мгновенный модуль $E = R(0) = 1/\Pi(0)$ конечен, $\dot{\Pi}(0)/\Pi(0) = -\dot{R}(0)/R(0)$ [18], (3) и второе уравнение (2) – уравнения Вольтерры *второго* рода с ограниченными (если $\dot{R}(0+) < \infty$) ядрами, и потому они однозначно разрешимы в пространствах $L_1[0, b]$. Случай $\Pi(0) = 0$ приводит к уравнению Вольтерры первого рода, некорректным задачам, нерегулярным моделям с особенностью в нуле у ФР, кривых релаксации (КР) и касательного модуля, вертикальности мгновенной диаграммы деформирования и т.п. [13–16].

Анализ показал [13–19], что среди моделей, описываемых ОС (1) с различными ФР и ФП, необходимо выделять (как минимум) три основных класса, поскольку качественные свойства базовых теоретических кривых моделей трех этих классов (а также особенности постановки и решения краевых задач) заметно отличаются:

- 1) регулярные модели (РеМ) – у которых $\Pi(0) \neq 0$;
- 2) сингулярные модели (СиМ) – с ФР, содержащей слагаемое вида $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$ (ФР $R = \eta\delta(t)$ задает ньютоновскую жидкость с ОС $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$ и входит слагаемым в ФР «половины» реологических моделей из пружин и демпферов), тогда $\Pi(0) = 0$ и $\dot{\Pi}(0) = \eta^{-1}$;
- 3) нерегулярные модели с неограниченной ФР, не содержащей слагаемого $\eta\delta(t)$, но имеющей интегрируемую особенность в точке $t = 0$ ($R(0+) = +\infty$).

Третий класс занимает промежуточное положение между первыми двумя классами. К нему относится, например, ФР $R(t) = At^{-u}$, $u \in (0, 1)$ (ее ФП имеет вид $\Pi(t) = A^{-1}C(u)t^u$ и обладает не только свойством $\Pi(0) = 0$, как и СиМ, но и свойством $\dot{\Pi}(0) = \infty$, переходным к $\Pi(0) \neq 0$, характеризующим РеМ). Эти три класса не исчерпывают все возможные модели вида (1) (хотя исчерпывают все используемые в практических приложениях, монографиях и учебной литературе); например, параллельное соединение моделей из второго и третьего класса даст модель с ФР, в которой есть слагаемое с сингулярностью и слагаемое с интегрируемой особенностью.

Задачи данной работы – аналитическое исследование общих качественных свойств семейства теоретических КП ОС (1) с произвольной ФП, соответствующих программам нагружения (4) (см. п. 1) с постоянной скоростью нагружения $a = \bar{\sigma}/t_*$ на начальной стадии длительностью $t_* > 0$ вплоть до выхода на постоянный уровень напряжения $\bar{\sigma} > 0$: исследование интервалов монотонности и выпуклости КП, их асимптотики, влияния параметров НСН a и t_* и характеристик ФП, условий независимости асимптотики КП от НСН, характера сходимости семейства КП к «идеальной» КП $\epsilon(t, 0) = \bar{\sigma}\Pi(t)$ при мгновенном нагружении $\sigma(t) = \bar{\sigma}h(t)$, когда длительность НСН стремится к нулю; выявление характерных особенностей КП в случае регулярных, неограниченных и сингулярных функций релаксации. Исследование этих свойств в общем виде с произвольной ФП и даже краткий их перечень, к сожалению, отсутствуют в монографиях и обзорах по вязкоупругости и механике полимеров, в частности в [1, 2, 10, 11, 21–25], анализ публикаций показывает, что многие из них не известны даже специалистам [26–28]. В отличие, например, от работ [3, 5], в которых рассматриваются частные случаи и используются приближенные формулы, в настоящей статье исследуется точное уравнение семейства КП, изучены его свойства в общей постановке и выведены универсальные оценки отклонения от КП при мгновенном нагружении.

В статье приняты следующие обозначения: $\delta(t)$ -дельта-функция Дирака, РеМ – регулярные модели (с ФП: $\Pi(0) \neq 0$); СиМ – сингулярные модели (ФР содержит

слагаемое $\eta\delta(t)$; $y(0) = y(0+)$ – предел функции $y(t)$ справа в точке $t = 0$, $\hat{y}(t_*) = y(t_* + 0) - y(t_* - 0)$ – скачок $y(t)$ в точке t_* .

1. Свойства кривых ползучести при нагружении с постоянной скоростью на начальной стадии, их зависимость от параметров нагружения

Рассмотрим двухпараметрическую непрерывную программу нагружения

$$\sigma(t) = at \text{ при } t \in [0, t_*], \quad \sigma(t) = \bar{\sigma} = \text{const при } t \geq t_*, \quad (4)$$

где $t_* > 0$, $\bar{\sigma} = at_* > 0$ – параметры. В силу (1) отклик (семейство КП) имеет вид:

$$\varepsilon(t, t_*) = a \int_0^t \Pi(x) dx = at\Theta(t) \text{ при } t \leq t_*, \quad (5)$$

где

$$\Theta(t) = t^{-1} \int_0^t \Pi(\tau) d\tau, \quad t > 0;$$

$$\varepsilon(t, t_*) = a \int_0^{t_*} \Pi(t - \tau) d\tau = \bar{\sigma} t_*^{-1} \int_{t-t_*}^t \Pi(x) dx \text{ при } t \geq t_*. \quad (6)$$

Осреднение ФП $\Theta(t)$ – возрастающая непрерывно дифференцируемая функция при $t > 0$, $\Theta(t) < \Pi(t)$, так как $\Pi(t)$ возрастает; $\Theta(0+) = \Pi(0+)$, $\Theta(+\infty) = \Pi(+\infty)$, $\dot{\Theta}(0+) = \dot{\Pi}(0+)/2$ [15].

При $t \in [0, t_*]$ функция (5) возрастает по t , выпукла вниз (так как $\dot{\varepsilon}(t, t_*) = a\Pi(t) > 0$, $\ddot{\varepsilon}(t, t_*) = a\dot{\Pi}(t) > 0$) и убывает по t_* (возрастает по $a = \bar{\sigma}t_*^{-1}$); $\varepsilon(0, t_*) = 0$, $\dot{\varepsilon}(0, t_*) = a\Pi(0)$.

На луче $t \geq t_*$ КП (6) возрастает по t и выпукла вверх, поскольку

$$\dot{\varepsilon}(t, t_*) = a \int_0^{t_*} \dot{\Pi}(t - \tau) d\tau = a[\Pi(t) - \Pi(t - t_*)] > 0,$$

$$\ddot{\varepsilon}(t, t_*) = a \int_0^{t_*} \ddot{\Pi}(t - \tau) d\tau = a[\dot{\Pi}(t) - \dot{\Pi}(t - t_*)] \leq 0$$

(так как $\dot{\Pi}(x) \geq 0$ и $\ddot{\Pi}(x) \leq 0$ при $x > 0$). Лишь для модели Максвелла ($\Pi = \alpha t + \beta$) $\ddot{\varepsilon}(t, t_*) \equiv 0$ (КП (6) принимает вид $\varepsilon(t, t_*) = \bar{\sigma}[\alpha t - 0,5\alpha t_* + \beta]$). По теореме о среднем для интеграла (6)

$$\varepsilon(t, t_*) = \bar{\sigma}\Pi(t - \xi), \quad \xi = \xi(t, t_*) \in (0, t_*). \quad (7)$$

Так как ФП возрастает, то $\bar{\sigma}\Pi(t - t_*) < \varepsilon(t, t_*) < \bar{\sigma}\Pi(t)$ при $t \geq t_*$, то есть КП (6) лежит ниже идеальной кривой ползучести (ИКП) $\varepsilon(t, 0) = \bar{\sigma}\Pi(t)$ при мгновенном нагружении и выше ее сдвига. Так как $t - \xi > t - t_* \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то $\varepsilon(t, t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\Pi(\infty)$. В частности, все КП (6) имеют горизонтальную асимптоту, если ФП ограничена; существенно, что асимптота общая для всех КП (не зависит от t_*) и совпадает с асимптотой ИКП $\varepsilon(t, 0)$. Если же $\Pi(\infty) = \infty$, то $\varepsilon(t, t_*) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, а отклонение $\varepsilon(t, t_*) - \varepsilon(t, 0)$ может не стремиться к нулю (если $\dot{\Pi}(\infty) > 0$).

В точке сопряжения $t = t_*$: $\varepsilon(t_*, t_*) = \bar{\sigma}\Theta(t_*)$. Очевидно, что $\varepsilon(t_*, t_*)$ возрастает (так как $\Theta(t)$ возрастает [15]), $\bar{\sigma}\Pi(0) < \varepsilon(t_*, t_*) < \bar{\sigma}\Pi(t_*)$ и $\varepsilon(t_*, t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\Pi(0)$ при $t_* \rightarrow 0$, то есть предел совпадает с начальным значением ИКП. В точке $t = t_*$ все КП (6) непрерывны, но имеют изломы, если $\Pi(0) \neq 0$: предел производной слева $-\dot{\varepsilon}(t_* - 0, t_*) = a\Pi(t_*) = \bar{\sigma}t_*^{-1}\Pi(t_*)$, справа $-\dot{\varepsilon}(t_* + 0, t_*) = \bar{\sigma}t_*^{-1}[\Pi(t_*) - \Pi(0)] > 0$, скачок производной $\hat{\varepsilon}(t_*) = -\Pi(0)\bar{\sigma}t_*^{-1}$ (общая связь между скачками: $\hat{\varepsilon}(t_*) = \Pi(0) \times \hat{\sigma}(t_*) + \dot{\Pi}(0)\hat{\sigma}(t_*)$ [18], но $\hat{\sigma}(t_*) = 0$ для программы (4)). Если $\Pi(0) = 0$ (например, у всех СиМ), то излома у КП нет, то есть $\dot{\varepsilon}(t)$ непрерывна. У всех РеМ $\hat{\varepsilon}(t_*) < 0$ и отношение скачков скорости деформации для различных $t_* = t_i$ не зависит от ФП: $\hat{\varepsilon}(t_1)/\hat{\varepsilon}(t_2) = t_2/t_1$. Это свойство могло бы служить одним из индикаторов применимости линейного ОС, если бы не сложность регистрации скорости ползучести и ее скачков в эксперименте. Функции $\dot{\varepsilon}(t_* - 0, t_*)$ и $|\hat{\varepsilon}(t_*)|$ убывают по t_* ; если $\Pi(0) \neq 0$, то при $t_* \rightarrow 0$ они стремятся к $+\infty$. Начальная скорость ползучести $\dot{\varepsilon}(t_* + 0, t_*)$ тоже убывает по t_* (так как $\dot{\Pi}(t)$ убывает), $\dot{\varepsilon}(t_* + 0, t_*) < \bar{\sigma}\dot{\Pi}(0)$, а при $t_* \rightarrow 0$ имеем $\dot{\varepsilon}(t_* + 0, t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\dot{\Pi}(0)$, (по теореме Лагранжа $\dot{\varepsilon}(t_* + 0, t_*) = at_*\dot{\Pi}(\xi) = \bar{\sigma}\dot{\Pi}(\xi)$, где $\xi(t_*) \in (0, t_*)$; возможен случай $\dot{\Pi}(0) = \infty$).

Докажем, что при любом фиксированном $t > t_*$ функция $\varepsilon(t, t_*)$ убывает по t_* (то есть семейство КП (6) возрастает с увеличением скорости нагружения a). Продифференцируем (6) по t_* :

$$\varepsilon_{t_*}(t, t_*) = -\bar{\sigma}t_*^{-2} \int_0^{t_*} \Pi(t - \tau) d\tau + \bar{\sigma}t_*^{-1}\Pi(t - t_*) = \bar{\sigma}t_*^{-1}[\Pi(t - t_*) - \Pi(t - \xi)],$$

где $\xi = \xi(t, t_*) \in (0, t_*)$.

Поскольку ФП возрастает, то $\Pi(t - \xi) \geq \Pi(t - t_*)$, и потому $\varepsilon_{t_*}(t, t_*) \leq 0$ при любых $t \geq t_*$ (равенство возможно лишь для постоянной на $(0, \tau)$ ФП). Это означает, что с уменьшением t_* КП (6) поднимается все выше и сближается с идеальной КП $\varepsilon(t, 0)$. Из возрастания ФП вытекает и неравенство $|\varepsilon_{t_*}(t, t_*)| < \varepsilon_{t_i}(t, t_*)$ (ведь $\varepsilon_{t_i}(t, t_*) - |\varepsilon_{t_*}(t, t_*)| = \bar{\sigma}t_*^{-1}[\Pi(t) - \Pi(t - \xi)] > 0$ при всех $t > t_*$).

Отклонение $\Delta(t, t_*) = |\varepsilon(t, t_*) - \varepsilon(t, 0)|$ КП (6), (7) от ИКП $\varepsilon(t, 0) = \bar{\sigma}\Pi(t)$ на $[t_*, \infty)$ имеет вид:

$$\Delta(t, t_*) = \bar{\sigma}(\Pi(t) - \Pi(t - \xi)) = \bar{\sigma}\xi\dot{\Pi}(t - \theta) \quad \text{при } t \geq t_*, \quad (8)$$

где $\xi = \xi(t, t_*) \in (0, t_*)$, $\theta = \theta(t, t_*) \in (0, \xi) \subset (0, t_*)$ (по теореме Лагранжа). Так как $\dot{\Pi}(t)$ не возрастает (то есть ФП выпукла вверх), то в (7) и (8) $\xi \in [0, 5t_*, t_*)$, $\theta \in [0, 5\xi, \xi) \subset [0, 25t_*, t_*)$ и $\dot{\Pi}(t - 0, 25t_*) \leq \dot{\Pi}(t - \theta) \leq \dot{\Pi}(t - t_*)$, поэтому из (8) следуют двусторонние оценки

$$0,5\dot{\Pi}(t)\bar{\sigma}t_* \leq \Delta(t, t_*) \leq \dot{\Pi}(t - t_*)\bar{\sigma}t_*, \quad t \geq t_*, \quad \text{и} \quad 0,5\dot{\Pi}(\infty)\bar{\sigma}t_* \leq \Delta(t, t_*) \leq \dot{\Pi}(0)\bar{\sigma}t_*$$

(равенство имеет место лишь при $\dot{\Pi}(t) = \text{const}$, то есть для модели Максвелла). При $t \rightarrow \infty$ и фиксированном t_* в формуле (8) $\dot{\Pi}(t - \theta) \rightarrow \nu = \dot{\Pi}(\infty)$, $\xi(t, t_*) \rightarrow 0,5t_*$ и $\Delta(t, t_*) \rightarrow 0,5\bar{\sigma}t_*\nu$. Следовательно, $\Delta(t, t_*) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (память о НСН затухает в смысле [7, 19]) тогда и только тогда, когда $\nu = 0$, а при $\nu > 0$ сходимости к нулю нет (память не затухает).

Из (8) и выпуклости вверх ФП следует равномерная сходимость семейства КП (6) при $t_* \rightarrow 0$ к ИКП на лучах $t \geq t_0 > 0$: $\Delta(t, t_*) = \bar{\sigma}\xi\dot{\Pi}(t - \theta) < \bar{\sigma}t_*\dot{\Pi}(t - \theta) \leq$

$\leq \bar{\sigma}t_*\dot{\Pi}(\inf(t - \theta))$, $\sup_{t \geq t_*} \Delta(t, t_*) \leq \dot{\Pi}(0)\bar{\sigma}t_*$ (эта оценка эффективна лишь при $\dot{\Pi}(0) < \infty$); для любого $t_0 \geq t_*$: $\sup_{t \geq t_0} \Delta(t, t_*) \leq \dot{\Pi}(t_0 - t_*)\bar{\sigma}t_*$, и потому для любых $t_0 > 0$ и $\delta > 0$, выбрав t_* так, что $t_* < t_0/2$ и $\dot{\Pi}(0, 5t_0)\bar{\sigma}t_* < \delta$, получим: $\sup_{t \geq t_0} \Delta(t, t_*) \leq \dot{\Pi}(0, 5t_0) \times \bar{\sigma}t_* < \delta$, то есть $\|\varepsilon(t, t_*) - \varepsilon(t, 0)\| \rightarrow 0$.

Условия $\dot{\Pi}(\infty) = 0$ и $\dot{\Pi}(0) < \infty$ не требуются для обеспечения равномерной сходимости семейства КП (6) при $t_* \rightarrow 0$ к идеальной КП. Если $\Pi(0) \neq 0$ (модель регулярна), то сходимости в точке $t = 0$ нет, так как $\varepsilon(0, t_*) = 0$, а $\varepsilon(0, 0) = \bar{\sigma}\Pi(0) \neq 0$.

Таким образом, доказано следующее утверждение о свойствах семейства КП (6) ОС (1).

Теорема. Пусть ФП положительна, дифференцируема, возрастает и (нестрого) выпукла вверх на интервале $(0, \infty)$. Тогда КП (5), (6) обладают свойствами:

1) при $t \in (0, t_*)$ функция (5) возрастает по t , выпукла вниз и убывает по t_* ; $\dot{\varepsilon}(0, t_*) = a\Pi(0)$;

2) на луче $t \geq t_*$ КП (6) возрастает по t и выпукла вверх, при $t_* \rightarrow \infty$ $\varepsilon(t, t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\Pi(\infty)$;

3) скачок скорости деформации в точке $t = t_*$ равен $\hat{\varepsilon}(t_*) = -\Pi(0)\bar{\sigma}t_*^{-1}$; у РеМ $\hat{\varepsilon}(t_*) < 0$ и отношение скачков для различных $t_* = t_i$ не зависит от ФП и от скорости нагружения a : $\hat{\varepsilon}(t_1)/\hat{\varepsilon}(t_2) = t_2/t_1$;

4) значение $\varepsilon(t_*, t_*)$ возрастает с ростом t_* , $\varepsilon(t_*, t_*) < \bar{\sigma}\Pi(t_*)$, $\varepsilon(t_*, t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\Pi(0)$ при $t_* \rightarrow 0$;

5) при всех $t \geq t_*$ справедлива оценка $\bar{\sigma}\Pi(t - t_*) < \varepsilon(t, t_*) < \bar{\sigma}\Pi(t)$, в частности, КП (6) лежит ниже ИКП $\varepsilon(t, 0) = \bar{\sigma}\Pi(t)$ при мгновенном нагружении;

6) $\varepsilon(t, t_*)$ убывает по t_* , то есть с уменьшением t_* КП (6) смещается вверх; $|\varepsilon_{t_*}(t, t_*)| < \varepsilon_t(t, t_*)$;

7) при $t_* \rightarrow 0$ семейство КП (6) равномерно сходится к ИКП на лучах $t \geq t_0$ с $t_0 > 0$; $\varepsilon(t_*, t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\Pi(0)$, $\dot{\varepsilon}(t_* + 0, t_*) \rightarrow \bar{\sigma}\dot{\Pi}(0)$, $\hat{\varepsilon}(t_*) \rightarrow -\infty$ (если $\Pi(0) \neq 0$);

8) для отклонения $\Delta(t, t_*) = |\varepsilon(t, t_*) - \varepsilon(t, 0)|$ КП (6) от ИКП $\varepsilon(t, 0)$ справедливы оценки

$$0,5\dot{\Pi}(t)\bar{\sigma}t_* \leq \Delta(t, t_*) \leq \dot{\Pi}(t - t_*)\bar{\sigma}t_*, \quad t \geq t_* \quad \text{и} \quad 0,5\dot{\Pi}(\infty)\bar{\sigma}t_* \leq \Delta(t, t_*) \leq \dot{\Pi}(0)\bar{\sigma}t_*;$$

9) при $t \rightarrow \infty$ $\Delta(t, t_*) \rightarrow 0,5v\bar{\sigma}t_*$, где $v = \dot{\Pi}(\infty)$, и $\varepsilon(t, t_*) - \bar{\sigma}\Pi(t - t_*) \rightarrow 0,5v\bar{\sigma}t_*$;

10) $\Delta(t, t_*) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ (память о НСН затухает) тогда и только тогда, когда $v = 0$;

11) если ФП ограничена, то $v = 0$, и все КП (6) с фиксированным $\bar{\sigma}$ имеют при $t \rightarrow \infty$ общую горизонтальную асимптоту $\varepsilon = \bar{\sigma}\Pi(\infty)$, не зависящую от t_* .

Отметим, что большинство установленных свойств КП (5), (6) вытекают только из дифференцируемости и возрастания ФП на полуоси $t > 0$, но утверждения пунктов 2, 7–10 существенно опираются на требование выпуклости вверх ФП. В частности, из п. 10 теоремы следует, что память затухает у половины реологических моделей (у всех СиМ- $2k$ и РеМ- $(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$) и не затухает у второй половины (РеМ- $2k$ и СиМ- $(2k+1)$).

2. Кривые ползучести «фрактальных» и классических реологических моделей, их зависимость от параметров нагружения и материальных параметров

Обнаруженные общие свойства КП (5), (6) при гапр-нагружении (4) проиллюстрируем на примерах моделей стандартного тела, Кельвина, Максвелла и Фойгта.

Соотношением (1) задаются, в частности, все модели, собранные из линейных пружин и демпферов посредством последовательных и параллельных соединений (структурные реологические модели). Схемы и названия всех двух-, трех- и четырехзвенных моделей (в терминологии нет единства) приведены в [14]. Можно доказать, что множество всех несократимых n -звенных моделей распадается ровно на два класса эквивалентности: РеМ- n и СиМ- n (структурно различные модели эквивалентны, если задаются одинаковыми семействами ФП или ФР). В частности:

- 1) эквивалентны трехзвенные РеМ Пойнтинга – Томсона и Кельвина [14];
- 2) все четыре РеМ-4 [14] эквивалентны модели стандартного тела (последовательному соединению моделей Максвелла и Фойгта, то есть РеМ-2 и СиМ-2);
- 3) все РеМ- $2k$ эквивалентны параллельному соединению k моделей Максвелла с разными временами релаксации;
- 4) все СиМ- $2k$ эквивалентны последовательному соединению k моделей Фойгта с разными временами ползучести (retardation time);
- 5) РеМ- $(2k+1)$ получается из СиМ- $2k$ последовательным присоединением упругого элемента, а СиМ- $(2k+1)$ – из РеМ- $2k$ параллельным подключением вязкого элемента.

Например, семейство ФП

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \alpha, \beta \geq 0, \gamma \in [0, \beta] \quad (9)$$

порождает все РеМ-4 при $\gamma \in (0, \beta)$, $\alpha, \beta > 0$ ($R = E_1 e^{-\mu t} + E_2 e^{-\mu_2 t}$), а при $\alpha = 0$ – РеМ-3 ($R = E e^{-\mu t} + r$). Так как $\Pi(0) = \beta - \gamma$, то ФП (9) порождает СиМ, когда $\gamma = \beta$: при $\lambda \beta = 0$ – ньютоновскую жидкость, при $\alpha = 0$ – модель Фойгта ($R = \eta \delta(t) + E$), при $\alpha > 0$ – СиМ-3 ($R = \eta \delta(t) + E e^{-\mu t}$). При $\gamma = 0$ (9) дает модель Максвелла ($R = E e^{-\mu t}$). Случай $\gamma < 0$ приводит к нарушению ограничения $\dot{\Pi}(t) \leq 0$, что влечет возрастание кривой обратной ползучести (противоречие с данными испытаний материалов [13]).

Подстановка (9) в (6) дает КП: $\varepsilon(t, t_*) = a[0,5\alpha t^2 + \beta t - \gamma \lambda^{-1}(1 - e^{-\lambda t})]$ при $t \leq t_*$ и

$$\varepsilon(t, t_*) = \bar{\sigma}[\alpha(t - 0,5t_*) + \beta - \gamma(\lambda t_*)^{-1}(e^{\lambda t_*} - 1)e^{-\lambda t}] \quad \text{при } t \geq t_*. \quad (10)$$

При $\alpha > 0$ (РеМ-4, СиМ-3 и РеМ-2) ФП не ограничена, у КП есть наклонная асимптота $\varepsilon = \bar{\sigma}[\alpha t - 0,5\alpha t_* + \beta]$ (скорость ползучести $\dot{\varepsilon}(t, t_*) \approx \alpha$ при больших t) и $\dot{\Pi}(\infty) = \alpha > 0$, то есть не выполнен критерий затухания памяти, и отклонение КП от ИКП $\Delta(t, t_*)$ не стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ ($\Delta(t, t_*) \rightarrow 0,5\bar{\sigma}\alpha t_*$). В частности, для модели Максвелла КП (10) принимает вид $\varepsilon(t, t_*) = \bar{\sigma}[\alpha t - 0,5\alpha t_* + \beta]$, $t \geq t_*$ (ползучесть с постоянной скоростью α). При $\alpha = 0$ (модели Кельвина и Фойгта, то есть РеМ-3 и СиМ-2) ФП ограничена, у КП есть горизонтальная асимптота $\varepsilon = \bar{\sigma}\beta$, $\dot{\Pi}(\infty) = 0$ и $\Delta(t, t_*) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Отклонение и $\Delta(t, t_*) = \varepsilon(t, 0) - \varepsilon(t, t_*)$ КП (10) от идеальной КП при $t \geq t_*$:

$$\Delta(t, t_*) = \bar{\sigma}[0,5\alpha t_* + \gamma(\lambda t_*)^{-1}(e^{\lambda t_*} - 1 - \lambda t_*)e^{-\lambda t}] = \bar{\sigma}[0,5\alpha t_* + \gamma \lambda t_* q(\lambda t_*)e^{-\lambda t}], \quad (11)$$

где $q(x) = (e^x - 1 - x)x^{-2}$ – возрастающая аналитическая функция на \mathbb{R} , $q(0) = 0,5 \neq 0$,

$q(x) > 0,5$ при $x > 0$. Очевидно, что отклонение (11) не зависит от β , $\Delta(t, t_*) \geq 0,5\alpha t_* \bar{\sigma}$ и $\Delta(t, t_*) \rightarrow 0,5\alpha t_* \bar{\sigma} \neq 0$ при $t \rightarrow \infty$. При $\alpha = 0$ (РеМ-3, СиМ-2) $\Delta(t, t_*)$ стремится к нулю, а при $\alpha > 0$ (РеМ-4, СиМ-3, РеМ-2) – нет; в частности, для модели Максвелла ($\gamma = 0$) отклонение (11) постоянно: $\Delta = 0,5\bar{\sigma}\alpha t_*$. Асимптотика (11) при $\lambda t_* \rightarrow 0$ (то есть $t_* \rightarrow 0$ или $\lambda \rightarrow 0$) и фиксированном $t \geq t_*$: $\Delta(t, t_*) = 0,5\bar{\sigma}(\alpha + \gamma\lambda e^{-\lambda t})t_* + \bar{\sigma}O((\lambda t_*)^2)e^{-\lambda t}$ (так как $q(x) = 0,5 + O(x)$). Таким образом, скорость сходимости семейства (11) к идеальной КП при $t_* \rightarrow 0$ (сходимость равномерна на любом луче $[t_0, \infty)$) определяется слагаемым $C(t, \lambda)t_*$. Так как функция $C(t, \lambda) = 0,5\bar{\sigma}(\alpha + \gamma\lambda e^{-\lambda t})$, $t \geq t_*$, $\lambda > 0$ возрастает по λ при $\lambda \in (0, t^{-1})$ и убывает при $\lambda > t^{-1}$, то $\max C(t, \lambda) = C(t, t^{-1}) = 0,5\bar{\sigma}(\alpha + \gamma e^{-1}t^{-1}) < 0,5\bar{\sigma}(\alpha + \gamma e^{-1}t_*^{-1})$. При $\lambda \rightarrow 0$ $C(t, \lambda) \rightarrow 0,5\bar{\sigma}\alpha$, и потому $\Delta(t, t_*) \rightarrow 0,5\bar{\sigma}\alpha t_*$ (при фиксированном t_*).

На рис. 1 приведены КП (10) трех моделей с ФП (9) при $\alpha > 0$ и $\bar{\sigma} = 1$ для НСН с $a = 0,1; 0,2; 0,3; 1$ ($t_* = 10; 5; 10/3; 1$): 1) модели стандартного тела (РеМ-4) с $\alpha = 0,1; \beta = 1; \gamma = 0,5; \lambda = 1$ – черные кривые; 2) сингулярной трехзвенной модели (СиМ-3) с $\gamma = \beta = 1$ (максимальное возможное значение γ), $\alpha = 0,1, \lambda = 1$ – красные кривые; 3) модели Максвелла (РеМ-2) с $\gamma = 0$ (минимальное возможное γ), $\alpha = 0,1, \beta = 1$ – розовые кривые. КП модели Максвелла на луче $t \geq t_*$ совпадают с асимптотами КП РеМ-4 (асимптота $\varepsilon = \bar{\sigma}[\alpha t - 0,5\alpha t_* + \beta]$ не зависит от параметров γ, λ). КП СиМ-3 обладают свойством $\dot{\varepsilon}(0, t_*) = 0$ и не имеют излома в точке $t = t_*$ (как и КП любой СиМ). Штриховые кривые – идеальные КП этих моделей, каждая из них будет предельной кривой семейства КП при $t_* \rightarrow 0$ (и любом $t > 0$). Так как $\nu = \alpha > 0$, то отклонения КП от ИКП не сходятся к нулю при $t \rightarrow \infty$ у всех трех моделей (у КП с разными t_* – разные асимптоты). Голубые кривые – КП РеМ-3 для $t_* = 10$ (сплошная) и $t_* = 0$ (штриховая) отличаются тем, что имеют (общую) горизонтальную асимптоту. Штрихпунктиром показаны КП РеМ-4, СиМ-3 и РеМ-3 с $\lambda = 0,1$ (то есть с увеличенным в 10 раз временем ретардации $\tau = 1/\lambda$) для $t_* = 10 = \tau$.

На рис. 2 приведены КП (10) модели Кельвина (РеМ-3) с $\alpha = 0, \beta = 1, \gamma = 0,5, \lambda = 1$ (голубые кривые) и модели Фойгта (СиМ-2) с $\alpha = 0, \gamma = \beta = 1$ (красные кривые) для НСН с $a = 0,1; 0,2; 0,3; 1$ ($t_* = 10; 5; 10/3; 1$). Все они имеют общую горизонтальную асимптоту $\varepsilon = \bar{\sigma}\beta$, то есть $\varepsilon = 1$. У КП модели Фойгта $\dot{\varepsilon}(0, t_*) = 0$ и нет излома в точке $t = t_*$ (как у КП любой СиМ).

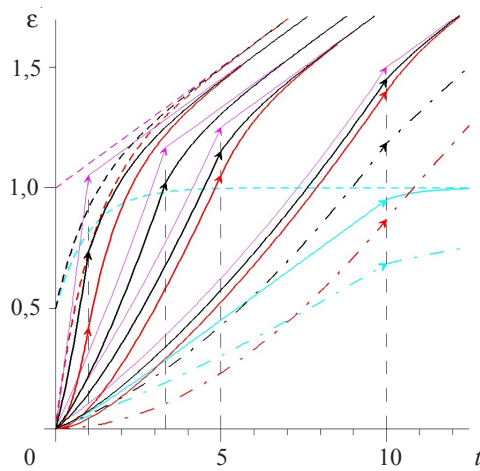


Рис. 1

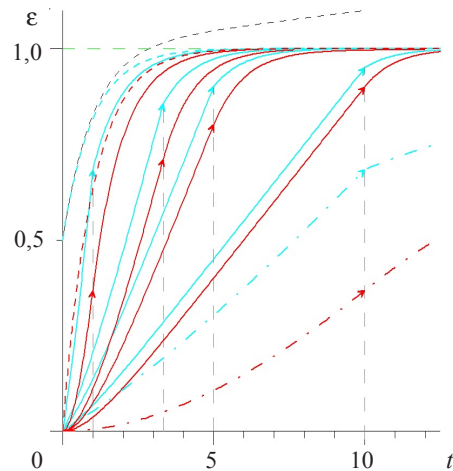


Рис. 2

Штриховые кривые – идеальные КП, каждая из них будет предельной кривой семейства КП при $t_* \rightarrow 0$. При $t_* \rightarrow \infty$ отклонение КП от ИКП стремится к нулю, так как $\alpha = 0$. Черная штриховая кривая – ИКП для РеМ-4 с $\alpha = 0,01$ (она демонстрирует чувствительность модели (9) к изменению параметра α). Штрихпунктирные кривые – КП Рем-3 и СиМ-2 с $\lambda = 0,1$ (то есть с увеличенным в 10 раз временем ретардации) для $t_* = 10 = \tau$; асимптота у них та же, но сближаются с ней они гораздо медленнее.

В качестве второго примера рассмотрим степенную ФР и соответствующую ФП [14]:

$$R(t) = At^{-u}, \quad u \in (0, 1), \quad A > 0; \quad \Pi(t) = Bt^u, \quad B = A^{-1}C(u), \quad C(u) = (u\pi)^{-1} \sin u\pi. \quad (12)$$

Очевидно, что ФП положительна, возрастает и выпукла вверх (допустима), $\Pi(0) = 0$, $\Pi(\infty) = \infty$, $\dot{\Pi}(0) = \infty$, $\dot{\Pi}(\infty) = 0$, $R(t)\Pi(t) = C(u)$, $C(u)$ убывает на интервале $(0, 1)$, $C(0+) = 1$, $C(1-0) = 0$. При $u \rightarrow 0$ семейство ФП (12) сходится к ФП упругого элемента, а при $u \rightarrow 1$ и $B = \text{const}$ – к ФП вязкого элемента. КП (5), (6) для ФП (12) принимает вид:

$$\varepsilon(t, t_*) = \bar{\sigma} t_*^{-1} B(u) (u+1)^{-1} t^{u+1}, \quad t \leq t_*,$$

$$\varepsilon(t, t_*) = \bar{\sigma} t_*^{-1} B(u) (u+1)^{-1} [t^{u+1} - (t-t_*)^{u+1}], \quad t \geq t_*.$$

При всех $u \in (0, 1)$ и $t_* \geq 0$ КП не ограничены, $\varepsilon(t, t_*) = ct^u + O(t^{u-1})$ при $t \rightarrow \infty$, отклонение КП от ИКП стремится к нулю (память затухает), так как $\dot{\Pi}(\infty) = 0$; с ростом u скорость сходимости снижается, а в случае $u = 1$ ($B > 0$) – отсутствует, так как нарушается условие $\dot{\Pi}(\infty) = 0$. Из $\Pi(0) = 0$ следует $\dot{\varepsilon}(0, t_*) = a\Pi(0) = 0$ и отсутствие у КП излома в точке $t = t_*$.

На рис. 3 приведены КП трех степенных («фрактальных») моделей (12) с $A = 1$, $u = 0,1$ (черные кривые), $u = 0,5$ (желтые кривые) и $u = 0,9$ (синие кривые) для НСН с $a = 0,1; 0,2; 0,3; 1$ ($t_* = 10; 5; 10/3; 1$), $\bar{\sigma} = 1$. Красные штриховые кривые – идеальные КП для $u = 0,1; 0,5; 0,9$ (у них $\dot{\varepsilon}(0) = \infty$ в отличие от $\dot{\varepsilon}(0, t_*) = 0$), каждая из них будет предельной кривой семейства КП при $t_* \rightarrow 0$ на всем луче $[0, \infty)$. Кривые ползучести для $u = 0,9$ (визуально) близки к прямолинейным, они растут быстрее и при больших t лежат выше КП с меньшим u .

На рис. 4 приведены КП, порожденные суммой степенной ФП (12) с $A = 1$, $u = 0,1$ (желтая штриховая кривая) и ФП (9) (тех же, что и на рис. 1), то есть КП последовательного соединения фрактального (степенного) элемента и одной из четырех моделей: РеМ-4 (черные кривые), СиМ-3 (красные кривые), РеМ-2 (розовые кривые), Рем-3 (голубые кривые). Штриховые кривые – идеальные КП этих моделей при $\bar{\sigma} = 1$. Так как $\dot{\Pi}(\infty) = \alpha > 0$ для соединений с РеМ-4, СиМ-3 и РеМ-2, то память этих моделей не затухает ($\Delta(t, t_*) \rightarrow 0,5\bar{\sigma}\alpha t_*$). В отличие от рис. 1 у КП нет асимптот при $t \rightarrow \infty$. Штрихпунктиром показаны КП тех же моделей с $\lambda = 0,001$ (то есть с увеличенным в 1000 раз временем ретардации $\tau = 1/\lambda$) для $t_* = 10$.

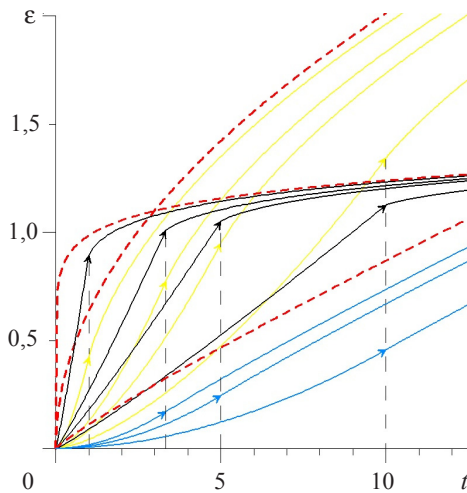


Рис. 3

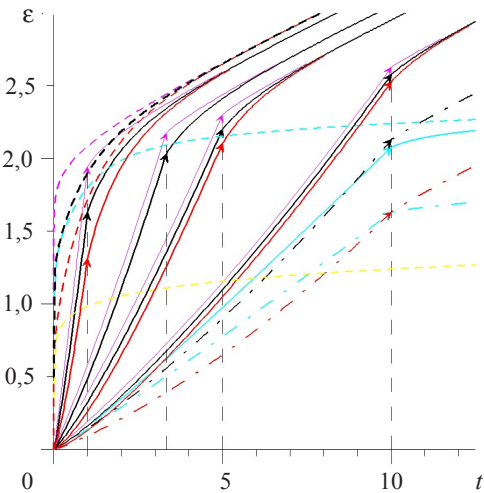


Рис. 4

Заключение

Аналитически изучены общие свойства и качественные особенности семейств КП (5), (6) при гауп-нагрузении (4), порождаемых ОС (1) с произвольной функцией ползучести, исследована их зависимость от характеристик ФП и длительности НСН t_* (от скорости нагружения на НСН), найдены универсальные двусторонние оценки для деформации ползучести и критерий сходимости к нулю при $t \rightarrow \infty$ отклонения таких КП от КП при мгновенном нагружении. Основные результаты о свойствах КП (5), (6) собраны в теореме, доказанной в п. 1. В частности, критерием затухания памяти является дополнительное ограничение на ФП: $\dot{\Pi}(\infty) = 0$; у половины всех реологических моделей из линейных демпферов и пружин – РеМ- $2k$ и СиМ- $(2k + 1)$ – оно не выполняется и память не затухает. Обнаруженные общие качественные свойства семейств кривых ползучести ОС (1) позволяют точнее очертить арсенал его возможностей, усовершенствовать методики выбора, идентификации и настройки линейных моделей, они могут служить индикаторами применимости линейного ОС (или достаточными признаками его неадекватности), удобными для экспериментальной проверки.

Список литературы

1. Tschoegl N.W. *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior*. Heidelberg: Springer, 1989. 769 p.
2. Lakes R.S. *Viscoelastic materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 462 p.
3. Di Paola M., Fiore V., Pinnola F., Valenza A. On the influence of the initial ramp for a correct definition of the parameters of fractional viscoelastic materials. *Mechanics of Materials*. 2014. V. 69, No 1. P. 63–70.
4. Fernandes V.A., De Focatiis D.S. The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber. *Polymer Testing*. 2014. V. 40. P. 124–132.
5. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment. *Acta Mechanica*. 2009. V. 205. P. 23–33.
6. Sorvari J., Malinen M., Hamalainen J. Finite ramp time correction method for non-linear viscoelastic material model. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2006. V. 41. P. 1050–1056.

7. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти. *Изв. РАН. МТТ*. 2007. №2. С. 147–166.
8. Хохлов А.В. Критерии разрушения при ползучести, учитывающие историю деформирования, и моделирование длительной прочности. *Изв. РАН. МТТ*. 2009. №4. С. 121–135.
9. Работнов Ю.Н., Паперник Л.Х., Степанычев Е.И. Приложение нелинейной теории наследственности к описанию временных эффектов в полимерных материалах. *Механика полимеров*. 1971. №1. С. 74–87.
10. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.
11. Работнов Ю.Н. *Ползучесть элементов конструкций*. М.: Наука, 1966. 752 с.
12. Хохлов А.В. Общие свойства кривых ползучести и длительной прочности, порождаемых нелинейной теорией наследственности Ю.Н. Работнова. *Отчет о НИР № 5288*. НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова. 2015. № ГР 01201152141. 74 с.
13. Хохлов А.В. Кривые обратной ползучести в рамках линейной вязкоупругости и необходимые ограничения на функцию ползучести. *Проблемы прочности и пластичности*. 2013. Вып. 75. Ч. 4. С. 257–267.
14. Хохлов А.В. Свойства произведения функции ползучести и функции релаксации в линейной вязкоупругости. *Проблемы прочности и пластичности*. 2014. Т. 76, №4. С. 343–356.
15. Хохлов А.В. Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации. *Проблемы прочности и пластичности*. 2015. Т. 77, №1. С. 60–74.
16. Хохлов А.В. Характерные особенности семейств кривых деформирования линейных моделей вязкоупругости. *Проблемы прочности и пластичности*. 2015. Т. 77, №2. С. 139–154.
17. Хохлов А.В. Свойства кривых релаксации с начальной стадией деформирования и затухание памяти в линейной теории вязкоупругости. *Современные проблемы математики, механики, информатики: Матер. Междунар. науч. конф.* Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 443–445.
18. Хохлов А.В. Общие свойства семейств кривых ползучести при ступенчатом нагружении линейного определяющего соотношения вязкоупругости, условия моделирования эффекта Кольрауша и затухания памяти. *Отчет о НИР № 5254*. НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова. 2014. 83 с.
19. Хохлов А.В. Свойства семейств кривых ползучести при ступенчатом нагружении линейного определяющего соотношения вязкоупругости. *Проблемы прочности и пластичности*. 2015. Т. 77, №4. С. 329–344.
20. Хохлов А.В. Качественный анализ определяющих соотношений как базовая стадия их аттестации. *Современные проблемы математики, механики, информатики: Матер. Междунар. науч. конф.* Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 435–438.
21. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. М.: Мир, 1974. 338 с.
22. Ильюшин А.А., Победра Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. М.: Наука, 1970. 280 с.
23. Малинин Н.Н. *Расчеты на ползучесть элементов машиностроительных конструкций*. М.: Машиностроение, 1981. 221 с.
24. Knauss W.G., Emri I., Lu H. Mechanics of polymers: Viscoelasticity. *Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*. Ed. by W.N. Sharpe. N.Y.: Springer, 2008. P. 49–96.
25. Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победра Б.Е. Особенности поведения вязкоупругих моделей. *Изв. РАН. МТТ*. 2004. №1. С. 119–157.
26. Drozdov A.D. Modeling an anomalous stress relaxation in glassy polymers (the Kitagawa effect). *Math. Comput. Model.* 1998. V. 27. P. 45–67.
27. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers. *Int. J. Plasticity*. 2011. V. 27. P. 512–521.
28. Drozdov A.D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers. *Mechanics of Materials*. 2014. V. 69. P. 116–131.

References

1. Tschoegl N.W. *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior*. Heidelberg: Springer, 1989. 769 p.
2. Lakes R.S. *Viscoelastic materials*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2009. 462 p.
3. Di Paola M., Fiore V., Pinnola F., Valenza A. On the influence of the initial ramp for a correct definition of the parameters of fractional viscoelastic materials. *Mechanics of Materials*. 2014. V. 69, No 1. P. 63–70.
4. Fernandes V.A., De Focatiis D.S. The role of deformation history on stress relaxation and stress memory of filled rubber. *Polymer Testing*. 2014. V. 40. P. 124–132.
5. Duenwald S.E., Vanderby R., Lakes R.S. Constitutive equations for ligament and other soft tissue: evaluation by experiment. *Acta Mechanica*. 2009. V. 205. P. 23–33.
6. Sorvari J., Malinen M., Hamalainen J. Finite ramp time correction method for non-linear viscoelastic material model. *International Journal of Non-Linear Mechanics*. 2006. V. 41. P. 1050–1056.
7. Khokhlov A.V. Opredelyayushchee sootnoshenie dlya reologicheskikh protsessov: svoystva teoreticheskikh krivykh polzuchesti i modelirovanie zatukhaniya pamyati. *Izv. RAN. MTT*. 2007. №2. S. 147–166.
8. Khokhlov A.V. Kriterii razrusheniya pri polzuchesti, uchityvayushchie istoriyu deformirovaniya, i modelirovanie dlitel'noy prochnosti. *Izv. RAN. MTT*. 2009. №4. S. 121–135.
9. Rabotnov Yu.N., Papernik L.Kh., Stepanychev E.I. Prilozhenie nelineynoy teorii nasledstvennosti k opisaniyu vremennykh effektov v polimernykh materialakh. *Mekhanika polimerov*. 1971. №1. S. 74–87.
10. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel*. M.: Nauka, 1977. 384 s.
11. Rabotnov Yu.N. *Polzuchest' elementov konstruksiy*. M.: Nauka, 1966. 752 s.
12. Khokhlov A.V. Obshchie svoystva krivykh polzuchesti i dlitel'noy prochnosti, porozhdaemykh nelineynoy teoriey nasledstvennosti Yu.N. Rabotnova. *Otchet o NIR № 5288*. NII mekhaniki MGU im. M.V. Lomonosova. 2015. № GR 01201152141. 74 s.
13. Khokhlov A.V. Krivye obratnoy polzuchesti v ramkakh lineynoy vyazkouprugosti i neobkhodimye ogranicheniya na funktsiyu polzuchesti. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2013. Vyp. 75. Ch. 4. S. 257–267.
14. Khokhlov A.V. Svoystva proizvedeniya funktsii polzuchesti i funktsii relaksatsii v lineynoy vyazkouprugosti. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2014. T. 76, №4. S. 343–356.
15. Khokhlov A.V. Obshchie svoystva diagramm deformirovaniya lineynykh modeley vyazkouprugosti pri postoyannoy skorosti deformatsii. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2015. T. 77, №1. S. 60–74.
16. Khokhlov A.V. Kharakternye osobennosti semeystv krivykh deformirovaniya lineynykh modeley vyazkouprugosti. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2015. T. 77, №2. S. 139–154.
17. Khokhlov A.V. Svoystva krivykh relaksatsii s nachal'noy stadiyey deformirovaniya i zatukhanie pamyati v lineynoy teorii vyazkouprugosti. *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Mater. Mezhdunar. nauch. konf.* Tula: Izd-vo TulGU, 2014. S. 443–445.
18. Khokhlov A.V. Obshchie svoystva semeystv krivykh polzuchesti pri stupenchatom nagruzhenii lineynogo opredelyayushchego sootnosheniya vyazkouprugosti, usloviya modelirovaniya efekta Kol'rausha i zatukhaniya pamyati. *Otchet o NIR № 5254*. NII mekhaniki MGU im. M.V. Lomonosova. 2014. 83 s.
19. Khokhlov A.V. Svoystva semeystv krivykh polzuchesti pri stupenchatom nagruzhenii lineynogo opredelyayushchego sootnosheniya vyazkouprugosti. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2015. T. 77, №4. S. 329–344.
20. Khokhlov A.V. Kachestvennyy analiz opredelyayushchikh sootnosheniy kak bazovaya stadiya ikh attestatsii. *Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Mater. Mezhdunar. nauch. konf.* Tula: Izd-vo TulGU, 2014. S. 435–438.
21. Kristensen R. *Vvedenie v teoriyu vyazkouprugosti*. M.: Mir, 1974. 338 s.

22. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkoprugosti*. M.: Nauka, 1970. 280 s.
23. Malinin N.N. *Raschety na polzuchest' elementov mashinostroitel'nykh konstruksiy*. M.: Mashinostroenie, 1981. 221 s.
24. Knauss W.G., Emri I., Lu H. *Mechanics of polymers: Viscoelasticity. Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*. Ed. by W.N. Sharpe. N.Y.: Springer, 2008. P. 49–96.
25. Georgievskiy D.V., Klimov D.M., Pobedrya B.E. Osobennosti povedeniya vyazkoprugikh modeley. *Izv. RAN. MTT*. 2004. №1. S. 119–157.
26. Drozdov A.D. Modeling an anomalous stress relaxation in glassy polymers (the Kitagawa effect). *Math. Comput. Model.* 1998. V. 27. P. 45–67.
27. Khan F., Yeakle C. Experimental investigation and modeling of non-monotonic creep behavior in polymers. *Int. J. Plasticity*. 2011. V. 27. P. 512–521.
28. Drozdov A.D., Dusunceli N. Unusual mechanical response of carbon black-filled thermoplastic elastomers. *Mechanics of Materials*. 2014. V. 69. P. 116–131.

**PROPERTIES OF CREEP CURVES FAMILIES GENERATED
BY THE LINEAR VISCOELASTICITY THEORY AT RAMP STRESS HISTORIES**

Khokhlov A.V.

*Institute of Mechanics Lomonosov Moscow State University,
Moscow, Russian Federation*

General qualitative properties of the theoretic creep curves at ramp stress histories generated by the linear integral constitutive equation with an arbitrary (increasing convex-up) creep function are analytically studied herein. The relation between stress and strain rates jumps, monotonicity and convexity intervals of creep curves, their asymptotic behavior at infinity, mutual two-sided bounds for creep curves and creep function, condition of convergence to ideal creep curve (at instantaneous loading) with the rise time tending to zero and the fading memory criteria are considered. Their dependence on creep compliance function properties and loading program parameters is analyzed.

The specific features of the theoretic creep curves family are highlighted that can be helpful to examine the linear viscoelasticity theory abilities to provide an adequate description of basic rheological phenomena related to creep and to indicate the field of its applicability or non-applicability considering creep test data of a material. The results of the analysis are useful for rational choice of a linear model (choice of a certain creep function), its identification, fitting and verification.

Keywords: viscoelastoplasticity, ramp tests, theoretic creep curves, influence of the initial ramp, rise time, stress rate, qualitative analysis, creep curves asymptotics, fading memory.