

УДК 539.4+539.37

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ МОЗАИЧНО-АРМИРОВАННЫХ ТРЕХСЛОЙНЫХ КВАДРАТНЫХ ПЛАСТИН \*

© 2016 г.

Романова Т.П.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

lab4nemir@gmail.com

*Поступила в редакцию 07.12.2015*

В рамках модели идеального жесткопластического материала с использованием структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах построено общее решение задачи о динамическом изгибе мозаично-армированных металлокомпозитных трехслойных квадратных пластин, шарнирно опертых или защемленных по контуру. На пластины действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Слои в пластине расположены симметрично относительно срединной поверхности. Несущие слои армированы волокнами арматуры из различных материалов. Волокна расположены мозаично в направлениях, параллельных контурам пластины. В зависимости от параметров армирования и амплитуды нагрузки возможны разные механизмы деформирования пластин. Получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия реализации разных схем деформирования. Определены предельные нагрузки, время деформирования и остаточные прогибы пластин. Приведены численные примеры.

*Ключевые слова:* жесткопластическая модель, гибридное армирование, мозаичное армирование, трехслойная квадратная пластина, предельная нагрузка, взрывная нагрузка, остаточный прогиб.

### **Введение**

В настоящее время существует большое количество технологий, позволяющих создавать слоистые пакеты из практически любых наборов материалов с различными физико-механическими свойствами. Основная проблема при этом заключается в выяснении оптимального месторасположения материалов из имеющегося набора, позволяющего наиболее эффективно использовать положительные качества всех или большинства из них [1]. Особенно это актуально для пластин, находящихся под действием нагрузок взрывного типа. Расчет таких конструкций за пределом упругого поведения в литературе практически отсутствует [2–4]. Для решения динамических задач при взрывном типе нагрузок широкое распространение получила мо-

---

\* Выполнено при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00102-а).

дель жесткопластического тела [2, 5] благодаря ее простоте и удобству расчетных схем. Классическая модель жесткопластического тела пренебрегает упругими деформациями, упрочнением материала и влиянием скорости деформации на пластические свойства; тело начинает деформироваться при нагрузке, превышающей некоторое предельное значение. Достоинство решений классической жесткопластической теории состоит в том, что, будучи довольно простыми, они способны давать быстрое и качественно верное представление о деформации конструкции, при этом следует учитывать, что область применения этой модели ограничена прогибами порядка толщины пластины. В рамках этой модели первое исследование по оценке остаточной поврежденности прямоугольных пластин при воздействии нагрузок взрывного типа было выполнено А.А. Гвоздевым [6], он разработал для таких пластин схему деформирования «конверт». В случае неравномерного армирования пластины, многочисленных вариантов нагружения, различных способов крепления элементов опоры указанная схема не может быть применена напрямую и требует соответствующего видоизменения.

В настоящей статье в рамках модели идеального жесткопластического материала с использованием структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах [7] проанализирован динамический изгиб мозаично-армированных металлокомпозитных трехслойных квадратных пластин, шарнирно опертых или защемленных по контуру, под действием кратковременных динамических нагрузок взрывного типа. Рассматриваемая задача является развитием схемы А.А. Гвоздева «конверт» и модели, описанной в [8] для решения задач динамического изгиба армированных полигональных пластин, на случай произвольного мозаичного армирования трехслойных квадратных пластин. Считается, что механические характеристики материалов, составляющих слоистый пакет, являются соразмерными (отличающимися не более, чем на порядок). По толщине каждый слой имеет регулярную и квазиоднородную структуру, на границах между слоями выполняются условия идеального механического контакта. В этом случае для слоистых пластин вполне приемлемо использование традиционных гипотез Кирхгофа – Лява.

### 1. Формулировка задачи, основные соотношения и предположения

Рассмотрим тонкую кирхгофовскую квадратную пластину  $A_1A_2A_3A_4$  (рис. 1) со стороной  $2a$ , шарнирно опертую или защемленную по контуру. Пусть  $x_1Ox_2$  – декартова система координат с началом в центре пластины.

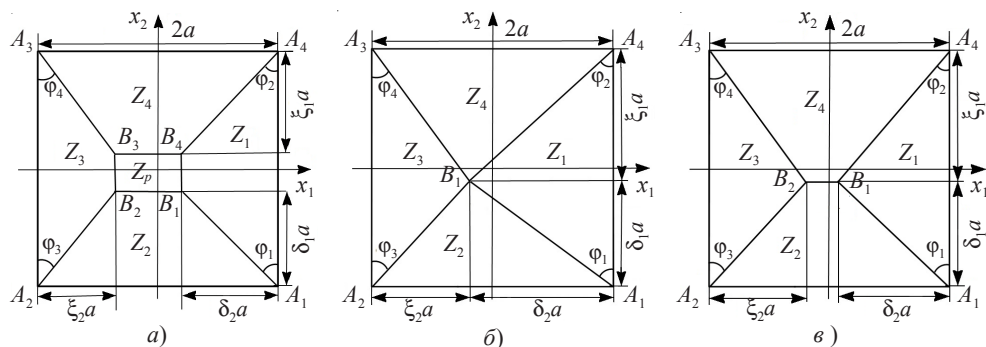


Рис. 1. Схемы деформирования квадратной пластины

Пластина состоит из трех слоев. Верхний и нижний слои (несущие слои) содержат по толщине большое количество армированных слоев, работающих без проскальзывания и отрыва, и связующих их изотропных прослоек, описываемых моделью идеального жесткопластического материала. Считаем, что несущие слои имеют одинаковую толщину  $H_s$  и расположены симметрично относительно срединной поверхности пластины. Волокна арматуры выполнены из различных материалов, деформируются, как одномерные элементы, и располагаются мозаично в направлениях, параллельных контуру пластины по линиям  $x_1 = \text{const}$  или  $x_2 = \text{const}$  (рис. 2а–д). Связующий материал различный в среднем слое и несущих слоях. Структура армирования пластины из одних и тех же составляющих материалов может иметь разный вид за счет взаимного изменения мозаично расположенных армированных участков в несущих слоях пластины.

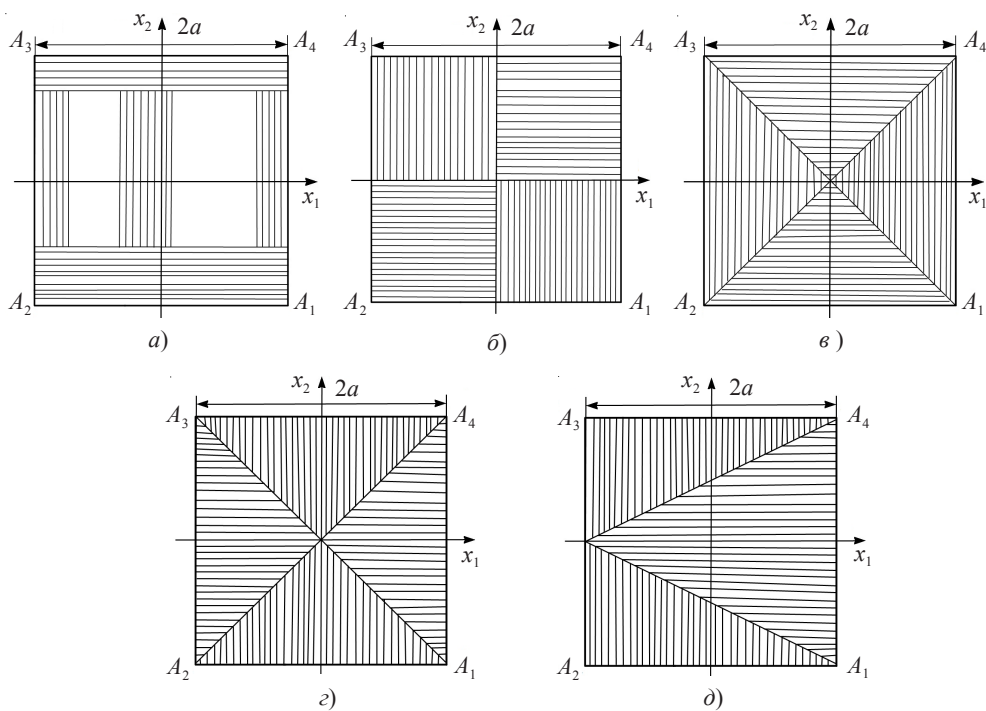


Рис. 2. Возможные структуры мозаичного армирования несущих слоев

Для рассматриваемой пластины поверхностная плотность материала равна

$$\rho(x_1, x_2) = 2(H - H_s)\rho_0 + 2H_s \{ [1 - \omega_1(x_1, x_2) - \omega_2(x_1, x_2)]\rho_{0s} + \omega_1(x_1, x_2)\rho_1 + \omega_2(x_1, x_2)\rho_2 \}, \quad (1)$$

где  $\rho_0, \rho_{0s}$  – плотность связующего материала в среднем слое и в несущих слоях соответственно;  $\rho_j$  – плотность материала арматуры в несущих слоях в направлении вдоль линий  $x_j = \text{const}$  ( $j = 1, 2$ );  $\omega_j(x_1, x_2)$  – плотность армирования (в общем случае разрывная функция, зависящая от  $x_1, x_2$ ) в несущих слоях в направлении вдоль линий  $x_j = \text{const}$ ;  $2H$  – толщина пластины.

Пластина находится под действием равномерно распределенной нагрузки  $P(t)$  взрывного типа, которая достигает максимального значения в начальный момент времени  $t = 0$ , а затем убывает.

## 2. Уравнения движения и определение начальных условий

При нагрузках, больших, чем предельные нагрузки ( $P > P_0$ ), пластина деформируется в виде совокупности жестких областей, разделенных линейными пластическими шарнирами. Общая схема деформирования рассматриваемой пластины изображена на рис. 1а, где  $Z_n$  – области, жестко вращающиеся вокруг опорных сторон ( $n = \overline{1, 4}$ );  $Z_p$  – центральная область. Из условий непрерывности скоростей на границах областей  $Z_p$  и  $Z_n$  следует, что область  $Z_p$  является прямоугольником, движущимся поступательно. Величины  $\delta_1, \xi_1, \delta_2, \xi_2$  характеризуют размеры  $Z_p$  и являются функциями времени  $t$ . На линиях, разделяющих области  $Z_p, Z_n$  ( $n = \overline{1, 4}$ ), и на контуре пластины предельные изгибающие моменты  $M_{01}, M_{02}$ , нормальные и касательные к направлению  $x_1 = \text{const}$ , согласно структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах [7], будут равны:

$$M_{0j}(x_1, x_2) = 2 \left( \int_0^{H-H_s} \sigma_{0j} z dz + \int_{H-H_s}^H \{ [1 - \omega_j(x_1, x_2)] \sigma_{0js} + \omega_j(x_1, x_2) \sigma_j \} z dz \right) = \\ = \sigma_{0j} (H - H_s)^2 + \{ [1 - \omega_j(x_1, x_2)] \sigma_{0js} + \omega_j(x_1, x_2) \sigma_j \} H_s (2H - H_s) \quad (j=1, 2), \quad (2)$$

где  $\sigma_{0j}, \sigma_{0js}$  – пределы текучести связующего материала в среднем слое и в несущих слоях соответственно,  $\sigma_j$  – пределы текучести материала арматуры в несущих слоях в направлении вдоль линий  $x_j = \text{const}$  ( $j = 1, 2$ ).

Обозначим угол поворота жесткой области  $Z_n$  ( $n = \overline{1, 4}$ ) вокруг своей опорной стороны через  $\alpha_n(t)$ , а его скорость – через  $\dot{\alpha}_n(t)$ . Для области  $Z_1$  (рис. 1а) разрыв угловой скорости на прямых  $A_1A_4$  и  $B_1B_4$  равен  $\dot{\alpha}_1(t)$ , а на сторонах  $A_1B_1$  и  $A_4B_4$  (со стороны области  $Z_1$ ) равен  $\dot{\alpha}_1 \cos \varphi_1$  и  $-\dot{\alpha}_1 \cos \varphi_2$  соответственно, где  $\text{tg } \varphi_1 = \delta_2/\delta_1$  и  $\text{tg } \varphi_2 = \delta_2/\xi_1$ . Нормальные изгибающие моменты  $M_b$  на шарнирах  $A_1A_4, B_1B_4, A_1B_1$  и  $A_4B_4$  равны:

$$M_b|_{A_1A_4} = (1 - \eta) M_{01}(a, x_2)|_{(a, x_2) \in A_1A_4}, \quad M_b|_{B_1B_4} = M_{01}(a(1 - \delta_2), x_2)|_{(a(1 - \delta_2), x_2) \in B_1B_4}, \\ M_b|_{A_1B_1}(x_1, x_2) = [M_{01}(x_1, x_2) \cos^2 \varphi_1 + M_{02}(x_1, x_2) \sin^2 \varphi_1]|_{(x_1, x_2) \in A_1B_1}, \\ M_b|_{A_4B_4}(x_1, x_2) = [M_{01}(x_1, x_2) \cos^2 \varphi_2 + M_{02}(x_1, x_2) \sin^2 \varphi_2]|_{(x_1, x_2) \in A_4B_4},$$

где  $\eta = 1$  при шарнирном опирании контура пластины,  $\eta = 0$  при его защемлении. На границах областей  $Z_2, Z_3, Z_4$  нормальные изгибающие моменты вычисляются аналогично. При действии равномерно распределенной нагрузки  $P(t)$  уравнения динамического изгиба пластины, полученные, как и в [8], на основе принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [9], имеют вид:

$$\ddot{\alpha}_n(t) \Sigma_n(t) = P(t) \Omega_n(t) - m_n(t) \quad (n = \overline{1, 4}), \quad (3)$$

$$a \frac{d}{dt} (\delta_2 \dot{\alpha}_1) = P(t) \Sigma_p(t), \quad (4)$$

$$\delta_2 \dot{\alpha}_1 = \delta_1 \dot{\alpha}_2, \quad \delta_2 \dot{\alpha}_1 = \xi_2 \dot{\alpha}_3, \quad \delta_2 \dot{\alpha}_1 = \xi_1 \dot{\alpha}_4, \quad (5)$$

где с учетом (1), (2) обозначено:

$$\begin{aligned}
\Sigma_n(\delta_1, \xi_1, \delta_2, \xi_2) &= \iint_{Z_n} \rho(x_1, x_2)(a-c)^2 dx_1 dx_2 \\
(c &= |x_1| \text{ при } n=1, 3; \quad c = |x_2| \text{ при } n=2, 4); \\
\Omega_n &= \iint_{Z_n} (a-c) dx_1 dx_2; \quad \Omega_1 = \delta_2^2(3-\delta_1-\xi_1) \frac{a^3}{3}; \quad \Omega_2 = \delta_1^2(3-\delta_2-\xi_2) \frac{a^3}{3}; \\
\Omega_3 &= \xi_2^2(3-\delta_1-\xi_1) \frac{a^3}{3}; \quad \Omega_4 = \xi_1^2(3-\delta_2-\xi_2) \frac{a^3}{3}; \\
m_1 &= (1-\eta) \int_{-a}^a M_{01}(a, x_2) dx_2 + \int_{-a(1-\delta_1)}^{a(1-\xi_1)} M_{01}(a(1-\delta_2), x_2) dx_2 + \\
&+ \int_{-a}^{-a(1-\delta_1)} [M_{01}(x_1, x_2) \cos^2 \varphi_1 + M_{02}(x_1, x_2) \sin^2 \varphi_1] \Big|_{x_1=a-(a+x_2)\delta_2/\delta_1} dx_2 + \\
&+ \int_{a(1-\xi_1)}^a [M_{01}(x_1, x_2) \cos^2 \varphi_2 + M_{02}(x_1, x_2) \sin^2 \varphi_2] \Big|_{x_1=a+(x_2-a)\delta_2/\xi_1} dx_2; \\
m_2 &= (1-\eta) \int_{-a}^a M_{02}(-a, x_2) dx_2 + \int_{-a(1-\delta_2)}^{a(1-\delta_1)} M_{02}(-a(1-\delta_1), x_2) dx_2 + \\
&+ \int_{a(1-\delta_2)}^a [M_{01}(x_1, x_2) \cos^2(\pi/2 - \varphi_1) + M_{02}(x_1, x_2) \sin^2(\pi/2 - \varphi_1)] \Big|_{x_2=-a-(x_1-a)\delta_1/\delta_2} dx_1 + \\
&+ \int_{-a}^{-a(1-\xi_2)} [M_{01}(x_1, x_2) \cos^2(\pi/2 - \varphi_3) + M_{02}(x_1, x_2) \sin^2(\pi/2 - \varphi_3)] \Big|_{x_2=(x_1+a)\delta_1/\xi_2-a} dx_1; \\
m_3 &= (1-\eta) \int_{-a}^a M_{01}(-a, x_2) dx_2 + \int_{-a(1-\delta_1)}^{a(1-\xi_1)} M_{01}(-a(1-\xi_2), x_2) dx_2 + \\
&+ \int_{-a}^{-a(1-\delta_1)} [M_{01}(x_1, x_2) \cos^2 \varphi_3 + M_{02}(x_1, x_2) \sin^2 \varphi_3] \Big|_{x_1=(x_2-a)\xi_2/\delta_1-a} dx_2 + \\
&+ \int_{a(1-\xi_1)}^a [M_{01}(x_1, x_2) \cos^2 \varphi_4 + M_{02}(x_1, x_2) \sin^2 \varphi_4] \Big|_{x_1=-a-(x_2-a)\xi_2/\xi_1} dx_2; \\
m_4 &= (1-\eta) \int_{-a}^a M_{02}(a, x_2) dx_2 + \int_{-a(1-\xi_2)}^{a(1-\delta_2)} M_{02}(a(1-\xi_1), x_2) dx_2 + \\
&+ \int_{a(1-\delta_2)}^a [M_{01}(x_1, x_2) \cos^2(\pi/2 - \varphi_2) + M_{02}(x_1, x_2) \sin^2(\pi/2 - \varphi_2)] \Big|_{x_2=a+(x_1-a)\xi_1/\delta_2} dx_1 + \\
&+ \int_{-a}^{-a(1-\xi_2)} [M_{01}(x_1, x_2) \cos^2(\pi/2 - \varphi_4) + M_{02}(x_1, x_2) \sin^2(\pi/2 - \varphi_4)] \Big|_{x_2=-(x_1+a)\xi_1/\xi_2+a} dx_1; \\
\Sigma_p &= \frac{\iint_{Z_p} dx_1 dx_2}{\iint_{Z_p} \rho(x_1, x_2) dx_1 dx_2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{\xi_2}{\delta_1}; \quad \operatorname{tg} \varphi_4 = \frac{\xi_2}{\xi_1}.
\end{aligned}$$

Условия (5) являются следствием непрерывности скоростей на границах областей  $Z_n$  ( $n = \overline{1, 4}$ ). В начальный момент  $t = 0$  пластина покоится:

$$\alpha_n(0) = \dot{\alpha}_n(0) = 0 \quad (n = \overline{1, 4}). \quad (6)$$

Начальные значения  $\delta_1(0), \xi_1(0), \delta_2(0), \xi_2(0)$ , соответствующие схеме деформирования пластины в момент начала движения, определим далее. Если область  $Z_p$  вырождается точку (см. рис. 1б), то уравнение (4) следует заменить условиями:

$$\delta_1 + \xi_1 = 2, \quad \delta_2 + \xi_2 = 2, \quad (7)$$

а если область  $Z_p$  вырождается в прямую линию (см. рис. 1в), то условием

$$\delta_1 + \xi_1 = 2 \quad \text{или} \quad \delta_2 + \xi_2 = 2. \quad (8)$$

Для определения предельной нагрузки  $P_0$  положим в (3)  $\ddot{\alpha}_n = 0$  ( $n = \overline{1, 4}$ ). Тогда

$$P = \frac{m_n}{\Omega_n} \quad (n = \overline{1, 4}). \quad (9)$$

Из системы четырех уравнений (9), выражая  $P$  через одну из неизвестных величин  $\delta_1, \xi_1, \delta_2, \xi_2$  (например  $\delta_1$ ), предельную нагрузку находим как

$$P_0 = \min_{0 < \delta_1 < 2} P = P|_{\delta_1 = \delta_{10}},$$

где  $\delta_{10}$  – значение  $\delta_1$  в предельном состоянии. Подставляя значения  $P = P_0, \delta_1 = \delta_{10}$  в три уравнения системы (9), получим значения  $\xi_{10}, \delta_{20}, \xi_{20}$ , которые вместе с величиной  $\delta_{10}$  определяют схему деформирования пластины в предельном состоянии. При определении величин  $\xi_{10}, \delta_{20}, \xi_{20}$  следует учитывать, что каждая из них должна находиться в интервале  $(0, 2)$ . В предельном состоянии также выполняются соотношения (7) или (8).

Для определения начальных значений  $\delta_1(0), \xi_1(0), \delta_2(0), \xi_2(0)$  следует рассмотреть два варианта: когда движение начнется с развитой областью  $Z_p$  и когда область  $Z_p$  вырождена. Обозначим  $P(0) = P_{\max}$ . Если область  $Z_p$  вырождена, то начальные значения  $\delta_1(0), \xi_1(0), \delta_2(0), \xi_2(0)$  определяются из (9) при  $P = P_{\max}$ .

Если область  $Z_p$  не вырождена, то соответствующие начальные условия обозначим через  $\bar{\delta}_1(0), \bar{\xi}_1(0), \bar{\delta}_2(0), \bar{\xi}_2(0)$ . Из уравнения (4) получим равенство

$$\delta_2 \dot{\alpha}_1 a + \delta_2 \ddot{\alpha}_1 a = P(t),$$

которое с учетом уравнения (3) при  $n = 1$  принимает вид

$$\dot{\delta}_2 \dot{\alpha}_1 a = \frac{P(\Sigma_1 \Sigma_p - \delta_2 a \Omega_1) + \delta_2 a m_1}{\Sigma_1}. \quad (10)$$

Аналогично из (3)–(5) получаем

$$\dot{\delta}_1 \dot{\alpha}_2 a = \frac{P(\Sigma_2 \Sigma_p - \delta_1 a \Omega_2) + \delta_1 a m_2}{\Sigma_2}, \quad (11)$$

$$\dot{\xi}_2 \dot{\alpha}_3 a = \frac{P(\Sigma_3 \Sigma_p - \xi_2 a \Omega_3) + \xi_2 a m_3}{\Sigma_3}, \quad (12)$$

$$\dot{\xi}_1 \dot{\alpha}_4 a = \frac{P(\Sigma_4 \Sigma_p - \xi_1 a \Omega_4) + \xi_1 a m_4}{\Sigma_4}. \quad (13)$$

Из (10)–(13) при условии (6) получим

$$P_{\max} = \frac{m_1}{\Omega_1 - \Sigma_1 \Sigma_p / [\bar{\delta}_2(0)a]}, \quad (14)$$

$$P_{\max} = \frac{m_2}{\Omega_2 - \Sigma_2 \Sigma_p / [\bar{\delta}_1(0)a]}, \quad (15)$$

$$P_{\max} = \frac{m_3}{\Omega_3 - \Sigma_3 \Sigma_p / [\bar{\xi}_2(0)a]}, \quad (16)$$

$$P_{\max} = \frac{m_4}{\Omega_4 - \Sigma_4 \Sigma_p / [\bar{\xi}_1(0)a]}. \quad (17)$$

Если область  $Z_p$  не вырождена, то начальные значения  $\bar{\delta}_1(0)$ ,  $\bar{\xi}_1(0)$ ,  $\bar{\delta}_2(0)$ ,  $\bar{\xi}_2(0)$  определяются из системы (14)–(17). Определим  $P_*$  – минимальное значение амплитуды  $P_{\max}$ , при котором движение пластины начнется с невырожденной областью  $Z_p$ . Из системы четырех уравнений (14)–(17), выражая  $P_{\max}$  через одну из неизвестных величин  $\bar{\delta}_1(0)$ ,  $\bar{\xi}_1(0)$ ,  $\bar{\delta}_2(0)$ ,  $\bar{\xi}_2(0)$  (например  $\bar{\delta}_1(0)$ ), нагрузку  $P_*$  находим как

$$P_* = \min_{0 < \bar{\delta}_1(0) < 2} P_{\max} = P_{\max} \Big|_{\bar{\delta}_1(0) = \delta_{1*}}.$$

Подставляя значения  $P_* = P_{\max}$ ,  $\bar{\delta}_1(0) = \delta_{1*}$  в три уравнения системы (14)–(17), получим значения  $\xi_{1*}$ ,  $\delta_{2*}$ ,  $\xi_{2*}$ , которые вместе с величиной  $\delta_{1*}$  определяют схему деформирования пластины в момент начала образования области  $Z_p$ . При определении величин  $\bar{\delta}_1(0)$ ,  $\bar{\xi}_1(0)$ ,  $\bar{\delta}_2(0)$ ,  $\bar{\xi}_2(0)$ ,  $\delta_{1*}$ ,  $\xi_{1*}$ ,  $\delta_{2*}$ ,  $\xi_{2*}$  следует учитывать, что каждая из них должна находиться в интервале (0, 2). Отметим, что при этом также выполняются соотношения (7) или (8).

### 3. Анализ поведения пластины при «средних» и «высоких» нагрузках

При  $P_0 < P_{\max} \leq P_*$  («средние» нагрузки) пластина будет деформироваться при вырожденной области  $Z_p$ . Пусть в момент времени  $t = T$  нагрузка снимается. При  $0 \leq t \leq T$  поведение пластины описывается уравнениями (3), (5), а также одним из условий (7) или (8) с начальными условиями (6),  $\delta_1(0)$ ,  $\xi_1(0)$ ,  $\delta_2(0)$ ,  $\xi_2(0)$ . Поскольку взрывная нагрузка не возрастает по времени, то в процессе движения условие (8) может смениться на (7), а вот условие (7) на (8) смениться не может.

После снятия нагрузки при  $T < t \leq t_f$  пластина движется до остановки в момент  $t_f$ . Поведение пластины при этом описывается соотношениями (5), (7) или (8) и уравнением

$$\ddot{\alpha}_n(t) \Sigma_n(t) = -m_n(t) \quad (n = \overline{1, 4})$$

с начальными условиями, определенными при  $t = T$ . Момент  $t_f$  определяется из уравнения

$$\dot{\alpha}_1(t_f) = 0. \quad (18)$$

При этом из (5) следует, что все области  $Z_n$  ( $n = \overline{1, 4}$ ) остановятся одновременно.

Прогибы в пластине  $u(x_1, x_2, t)$  определяются из соотношений

$$\dot{u}(x_1, x_2, t) = \dot{\alpha}_n(t) d(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in Z_n \quad (n = \overline{1, 4}), \quad (19)$$

где  $d(x_1, x_2)$  – расстояние от точки  $(x_1, x_2) \in Z_n$  до опорной стороны области  $Z_n$ .

При  $P_{\max} > P_*$  («высокие» нагрузки) пластина начнет деформироваться с развитой областью  $Z_p$ . При  $0 \leq t \leq t_1$  поведение пластины описывается уравнениями (3)–(5) с начальными условиями (6),  $\bar{\delta}_1(0)$ ,  $\bar{\xi}_1(0)$ ,  $\bar{\delta}_2(0)$ ,  $\bar{\xi}_2(0)$ . При этом если  $P(t) = \text{const}$ , то область  $Z_p$  не изменяется. Когда при  $t > 0$  нагрузка  $P(t)$  убывает или равна нулю, область  $Z_p$  уменьшается до вырождения в момент  $t = t_1$ . В этот момент начинают выполняться условия (7) или (8). Далее деформирование пластины описывается уравнениями для «средних» нагрузок при вырожденной области  $Z_p$ . Пластина останется в момент  $t_f$ , определяемый из (18). Прогибы в пластине определяются из уравнений (19) и выражения

$$\dot{w}(x_1, x_2, t) = a\delta_2(t)\dot{\alpha}_1(t), \quad (x_1, x_2) \in Z_p.$$

Все уравнения движения решаются численно методом Рунге – Кутты. Схемы численного интегрирования рассматриваемых систем приведены в [5].

#### 4. Численные примеры

Для расчетов рассмотрим три случая мозаичного армирования:

- 1) армирование, как на рис. 2б;
- 2) армирование, как на рис. 2в, когда в каждой четверти квадрата, разделенного диагоналями, направление армирования параллельно контуру пластины;
- 3) армирование, как на рис. 2г, когда в каждой четверти квадрата, разделенного диагоналями, направление армирования перпендикулярно контуру пластины.

Для этих случаев в силу симметрии все области  $Z_n$  ( $n = \overline{1, 4}$ ) равны и  $\bar{\delta}_1 = \bar{\xi}_1 = \bar{\delta}_2 = \bar{\xi}_2$ . Считается, что  $\rho_0 = \rho_{0s} = 1$ ,  $\rho_1 = \rho_2 = 3$ ,  $\sigma_{0j} = \sigma_{0js} = \sigma_0$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 20\sigma_0$  ( $j = 1, 2$ ). Такое соотношение параметров возможно, например, если материал среднего слоя и связующий материал несущих слоев – алюминий, а материал арматуры – сталь. Считается, что  $\omega_j(x_1, x_2) = \omega_0\psi_j(x_1, x_2)$ ;  $\psi_j(x_1, x_2) = 1$ , если  $(x_1, x_2)$  находится в области, где армирование выполнено в направлении линий  $x_j = \text{const}$ , и  $\psi_j(x_1, x_2) = 0$ , если армирование в другом направлении. На рис. 3 приведены зависимости безразмерной предельной нагрузки  $p_0 = P_0 a^2 / (\sigma_0 H^2)$  и безразмерной нагрузки  $p_* = P_* a^2 / (\sigma_0 H^2)$  от безразмерной толщины несущего слоя  $h_s = H_s / H$  при условии одинакового расхода арматуры:  $\omega_0 h_s = 0,02$ .

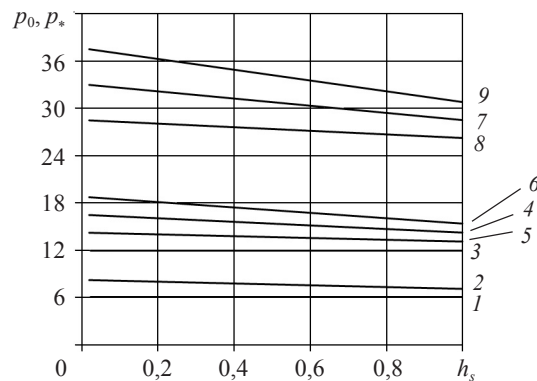


Рис. 3. Зависимость предельной нагрузки  $p_0$  и нагрузки  $p_*$  от толщины несущего слоя при условии одинакового расхода арматуры



Линии 1, 2 относятся к шарнирному опиранию контура, линии 3, 5–9 – к защемлению, линия 4 – к обоим видам крепления. Линии 1, 3 изображают  $p_0$  при отсутствии армирования. В случае шарнирного опирания контура нагрузки  $p_0$  для всех трех случаев совпадают (кривая 2), как и нагрузки  $p_*$  (кривая 4). При защемлении контура линии 4–6 изображают  $p_0$  для случаев расположения арматуры 1)–3), а линии 7–9 изображают  $p_*$  для случаев 1)–3) соответственно. Из рисунка видно, что при условии одинакового расхода арматуры значения  $p_0$  и  $p_*$  возрастают при уменьшении толщины несущих слоев.

На рис. 4 изображены безразмерные остаточные прогибы

$$w = \frac{u(x_1, 0, t_f) a^2 \rho_0}{\sigma_0 H^2 T^2}$$

в сечении  $x_2 = 0$  защемленной квадратной пластины с  $h_s = 0,2$ ,  $\omega_0 = 0,1$  под действием «высокой» нагрузки с прямоугольной формой импульса:  $P(t) = 50\sigma_0 H^2 / a^2$  при  $0 \leq t \leq T$ ,  $P(t) = 0$  при  $t > T$ . Кривые 1–3 изображают случаи армирования 1)–3) соответственно. Для всех случаев численно получено, что  $t_f \approx P_{\max} / P_0$ .

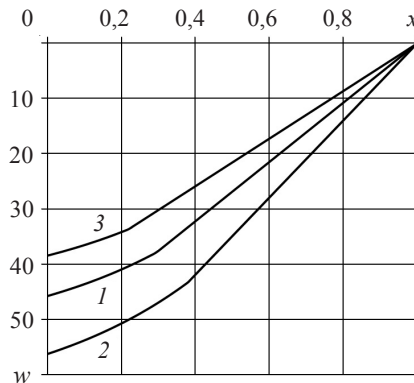


Рис. 4. Остаточные прогибы

Из расчетов и рис. 3, 4 видно, что для рассматриваемых случаев при шарнирном опирании контура пластины деформируются одинаково, а при защемлении контура изменение структур мозаичного армирования существенно влияет на величину предельных нагрузок и остаточные прогибы пластины. Наибольшая предельная нагрузка и наименьший остаточный прогиб будут в случае 3). Изменение структуры армирования в случае шарнирного опирания контура не влияет на несущую способность рассматриваемых пластин, что совпадает с выводом, полученным в работе [10], где экспериментально изучены три случая одно- и двунаправленного армирования железобетонных шарнирно опертых квадратных пластин при условии одинакового расхода арматуры, расположенной параллельно контурам квадратной пластины.

#### 4. Заключение

На основе модели идеального жесткопластического материала с использованием структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах построено общее решение задачи о динамическом изгибе мозаично-армированных металлокомпозитных трехслойных квадратных пластин, шарнирно

опертых или защемленных по контуру, находящихся под действием динамической нагрузки взрывного типа. Несущие слои расположены симметрично относительно срединной поверхности и армированы волокнами арматуры из различных материалов. Волокна расположены мозаично в направлениях, параллельных контурам пластины. Схема деформирования пластины состоит из совокупности жестких областей в форме трапеций и центральной прямоугольной области. Получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия реализации разных схем деформирования. Определены предельные нагрузки, время деформирования и остаточные прогибы пластин. Найденная предельная нагрузка соответствует определению несущей способности рассматриваемых пластин по второму предельному состоянию. В качестве примера рассмотрены три случая мозаичного армирования. Показано, что для рассматриваемых случаев при шарнирном опирании контура пластины деформируются одинаково, а при защемлении контура изменение структур мозаичного армирования существенно влияет на значения предельных нагрузок и остаточных прогибов. Получено, что при условии одинакового расхода арматуры и уменьшении толщины несущих слоев предельная нагрузка возрастает. При этом наибольшая предельная нагрузка и наименьший остаточный прогиб будут в случае, когда направление армирования перпендикулярно опорному контуру в каждой четверти квадратной пластины, разделенной диагоналями. Полученные решения могут быть использованы для оценки динамической повреждаемости мозаично-армированных металлокомпозитных трехслойных квадратных пластин в условиях кратковременного импульсивного нагружения. Количество параметров разработанной математической модели позволяет в широком диапазоне изменять схемы армирования, объемное содержание армирующих волокон, способы крепления пластин, а также толщину слоев и физические характеристики композита.

#### Список литературы

1. Немировский Ю.В. Гибридное и оптимальное проектирование композитных пластин. *Известия НАН Армении. Механика*. 2007. №1. С. 82–89.
2. Янковский А.П. Вязкопластичная динамика металлокомпозитных оболочек слоисто-волокнутой структуры при действии нагрузок взрывного типа. I. Постановка задачи и метод решения. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2012. Т. 55, №2. С. 119–130.
3. Попов О.Н., Малиновский А.П., Моисеенко М.О., Трепутнева Т.А. Состояние вопроса по расчету неоднородных элементов конструкций за пределом упругости. *Вестник ТГАСУ*. 2013. №4. С. 127–142.
4. Qatu M.S., Asadi E., Wang W. Review of recent literature on static analysis of composite shells: 2000-2010. *Open Journal of Composite Materials*. 2012. V. 2, No. 3. P. 61–86. DOI: 10.4236/ojcm.2012.23009.
5. Немировский Ю.В., Романова Т.П. *Динамическое сопротивление плоских пластических преград*. Новосибирск: Изд-во «ГЕО», 2009. 311 с.
6. Гвоздев А.А. К расчету конструкций на действие взрывной волны. *Строительная промышленность*. 1943. №1–2. С. 18–21.
7. Немировский Ю.В. Об условии пластичности (прочности) для армированного слоя. *Прикладная механика и техническая физика*. 1969. №5. С. 81–88.
8. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамический изгиб армированных правильных полигональных пластин с жесткой шайбой под действием взрывных нагрузок. *Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики*: Сб. трудов Международ. конф. 20–22 сент. 2010 г., Воронежский гос. ун-т, Воронеж. 2010. С. 255–269.
9. Ерхов М.И. *Теория идеально пластических тел и конструкций*. М.: Наука, 1978. 352 с.
10. Matesan D., Radnic J., Grgic N., Camber V. Strength capacity of square reinforced concrete

slabs. *Materialwissenschaft und werkstofftechnik (Material Science & Eng. Tech.)*. 2012, V. 43, No. 5. P. 399–404. DOI: 10.1002/mawe.201200972.

#### References

1. Nemirovskiy Yu.V. Gibridnoe i optimal'noe proektirovanie kompozitnykh plastin. *Izvestiya NAN Armenii. Mekhanika*. 2007. №1. S. 82–89.
2. Yankovskiy A.P. Vyazkoplastichnaya dinamika metallokompozitnykh obolochek sloistovoloknistoy struktury pri deystvii nagruzok vzryvnogo tipa. I. Postanovka zadachi i metod resheniya. *Matematichni metodi ta fiziko-mekhanichni polya*. 2012. T. 55, №2. S. 119–130.
3. Popov O.N., Malinovskiy A.P., Moiseenko M.O., Treputneva T.A. Sostoyanie voprosa po raschetu neodnorodnykh elementov konstruksiy za predelom uprugosti. *Vestnik TGASU*. 2013. №4. S. 127–142.
4. Qatu M.S., Asadi E., Wang W. Review of recent literature on static analysis of composite shells: 2000-2010. *Open Journal of Composite Materials*. 2012. V. 2, No. 3. P. 61–86. DOI: 10.4236/ojcm.2012.23009.
5. Nemirovskiy Yu.V., Romanova T.P. *Dinamicheskoe soprotivlenie ploskikh plasticheskikh pregrad*. Novosibirsk: Izd-vo "GEO", 2009. 311 s.
6. Gvozdev A.A. K raschetu konstruksiy na deystvie vzryvnoy volny. *Stroitel'naya promyshlennost'*. 1943. №1–2. S. 18–21.
7. Nemirovskiy Yu.V. Ob uslovii plastichnosti (prochnosti) dlya armirovannogo sloya. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 1969. №5. S. 81–88.
8. Nemirovskiy Yu.V., Romanova T.P. Dinamicheskii izgib armirovannykh pravil'nykh poligonal'nykh plastin s zhestkoy shayboy pod deystviem vzryvnykh nagruzok. *Aktual'nye problemy prikladnoy matematiki, informatiki i mekhaniki*: Sb. trudov Mezhdunarod. konf. 20–22 sent. 2010 g., Voronezhskiy gos. un-t, Voronezh. 2010. S. 255–269.
9. Erkhov M.I. *Teoriya ideal'no plasticheskikh tel i konstruksiy*. M.: Nauka, 1978. 352 s.
10. Matesan D., Radnic J., Grgic N., Camber V. Strength capacity of square reinforced concrete slabs. *Materialwissenschaft und werkstofftechnik (Material Science & Eng. Tech.)*. 2012, V. 43, No. 5. P. 399–404. DOI: 10.1002/mawe.201200972.

### MODELING OF DYNAMIC BEHAVIOR OF MOSAIC-REINFORCED THREE-LAYER SQUARE PLATES

Romanova T.P.

*Siberian Branch of Russian Academy of Sciences  
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
Novosibirsk, Russian Federation*

Within the model of an ideal rigid-plastic material using a structural model of reinforced layer with one-dimensional stress state in the fibers, the general solution is constructed for the dynamic bending of mosaic-reinforced metal-composite three-layered square plates, simply supported or clamped along the contour. The plates are under uniformly distributed, short-term dynamic load of a high intensity explosive type. The layers in the plates are located symmetrically relative to the middle surface. Bearing layers reinforced with fibers of reinforcement of different materials. Fibres are mosaic located in the directions parallel to the contours of the plate. The different mechanisms of deformation of plates are possible depending on parameters of reinforcement and the load amplitudes. The equations of dynamic deformation are obtained and the conditions of implementation of different schemes of deformation are analyzed. Limit loads, the deformation and final deflections of plates are determined. Numerical examples are given.

*Keywords*: rigid-plastic model, hybrid reinforcement, mosaic reinforcement, three-layer square plate, limit load, blast load, final deflection.