

УДК 539.4

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ
НЕУПРУГОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ КОМПОЗИТНЫХ БАЛОК
СЛОИСТО-ВОЛОКНИСТОЙ СТРУКТУРЫ
ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ***

© 2016 г.

Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 12.02.2016

В рамках деформационной теории пластичности исследованы особенности механического поведения гибридных изгибаемых композитных балок, которые имеют нерегулярную слоистую структуру и состоят из стенок и полок (несущих слоев). Стенки могут быть армированы волокнами продольно или перекрестно в своей плоскости, а несущие слои армируются в продольном направлении. На базе гипотез теории Тимошенко сформулирована нелинейная граничная задача расчета таких конструкций, что позволило учесть ослабленное сопротивление их стенок поперечным сдвигам. Для линеаризации поставленной краевой задачи использован метод переменных параметров упругости. На конкретных примерах изучено изгибное деформирование однородных и армированных консольных и двухопорных балок под действием распределенной поперечной нагрузки при нормальной и высокой температурах. Поперечные сечения рассматриваемых балок представляют собой двутавры. Продемонстрировано, что при высокой температуре даже для однородных металлических двутавровых балок теория Бернулли не обеспечивает приемлемой для инженерных расчетов пятипроцентной точности определения их податливости. Для балок, армированных высокомодульными волокнами, классическая теория становится вообще неприемлемой даже при нормальной температуре, так как в ряде случаев занижает расчетную податливость балок на десятки процентов. Показано, что для адекватного описания механического поведения армированных слоистых балок (особенно при высоких температурах) необходимо учитывать в их стенках активно развивающиеся деформации поперечных сдвигов. Обнаружено, что в таких условиях в композитных балках могут возникнуть ярко выраженные краевые эффекты, которые не описывает классическая теория.

Ключевые слова: слоистые балки, армирование, деформационная теория пластичности, теория Бернулли, теория Тимошенко, краевые эффекты, тепловое воздействие.

* Выполнено при поддержке РФФИ (грант №14-01-00102-а).

Проблема адекватного расчета неупругого поведения композитных элементов конструкций осложняется тем, что некоторые материалы фаз композиции (обычно армирующие волокна) практически нетермочувствительны в достаточно широком диапазоне изменения температур, а другие материалы (например, полимерные матрицы или сплавы легких металлов, используемые в качестве связующего) термочувствительны, причем, как правило, прочностные и жесткостные характеристики таких материалов резко падают при повышении температуры [1–5]. Такая специфика поведения материалов компонентов композиции при повышенных температурах, характерных для изделий аэрокосмического назначения, может привести к тому, что композитная конструкция при интенсивном термосиловом нагружении поведет себя совсем не так, как это принято традиционно считать при обычных (умеренных) температурах.

Теория расчета неупругого поведения композитных балок, стержней, ферм, рам и т.п. сложной структуры в настоящее время находится в стадии становления. Так, в работах [6, 7] изучались вопросы упругого и неупругого поведения слоистых балок и рам. Разрешающие уравнения в этих исследованиях, как и в [1, 2], получены в рамках классической теории. Известно, что в рационально спроектированной балке несущие слои (полки) целесообразно разнести и соединить одной или несколькими стенками [6, 8, 9]. Пренебрежение деформацией поперечного сдвига в тонких стенках балок сложного профиля (что имеет место в рамках теории Бернулли [9]) может привести к недопустимому занижению их податливости, особенно в условиях повышенных температур или в случаях «неудачного» армирования стенок таких балок. Для продольно армированных балок-стенок квазиоднородной структуры необходимость учета их ослабленного сопротивления поперечному сдвигу при нелинейно-упругом изгибном деформировании даже в условиях нормальных температур была продемонстрирована в [10].

Настоящая статья посвящена построению неклассической модели неупругого (нелинейно-упругого) изгибного деформирования гибридных композитных балок слоисто-волоконистой структуры при термосиловом нагружении в рамках деформационной теории пластичности и проведению сравнительного анализа расчетов, полученных на ее основе, с аналогичными результатами классической теории Бернулли.

В прямоугольной декартовой системе координат x_i рассматривается прямолинейная балка постоянного поперечного сечения длиной L ; ось x_1 направлена вдоль оси балки, а x_2 – по ее высоте (рис. 1).

В направлении x_2 балка имеет нерегулярную слоистую структуру; слои могут быть изготовлены из однородных изотропных материалов или квазиоднородных композитных материалов (в последнем случае материалы компонентов композиции также являются однородными и изотропными). Поперечные сечения слоистой балки симметричны относительно вертикальной оси x_2 (рис. 2). Контакт между слоями является идеальным (без проскальзывания).

В работающих на изгиб стержнях (балках) несущие слои целесообразно разносить на некоторое расстояние и соединять их между собой стенкой [6, 9], которую условно назовем слоем с номером $m = 0$. Несущие слои (полки), которые расположены над стенкой, пронумеруем снизу вверх от 1 до $M^{(+)}$ ($1 \leq m \leq M^{(+)}$), а полки, расположенные под стенкой, пронумеруем сверху вниз от -1 до $-M^{(-)}$ ($-M^{(-)} \leq m \leq -1$, $M^{(-)} > 0$).

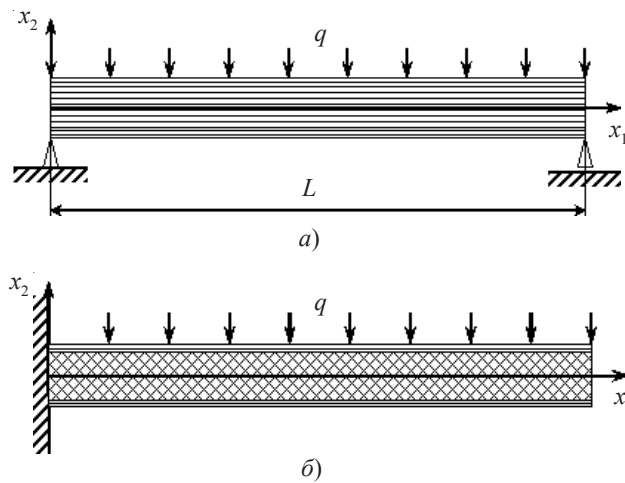


Рис. 1. Слоистые балки нерегулярной структуры: *a* – шарнирно опертая с продольным армированием стенки; *б* – консольная с перекрестным армированием стенки

На рис. 2*a* изображено поперечное сечение балки в случае $M^{(\pm)} = 2$, то есть стержень состоит из пяти слоев (причем стенка и полки с номерами $m = -1$, $m = 2$ армированы), а на рис. 2*б* и 2*в* изображены поперечные сечения трехслойных ($M^{(\pm)} = 1$) балок, причем у балки на рис. 2*в* полки армированы. Трехслойные и пятислойные стержни наиболее часто используются в практике проектирования силовых каркасных систем [6].

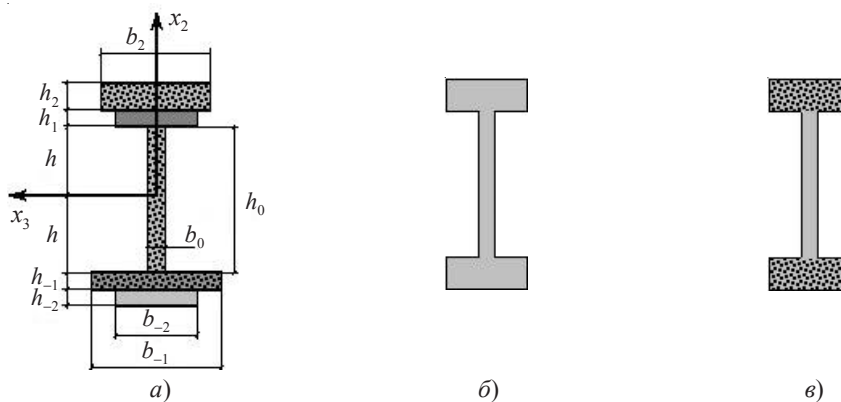


Рис. 2. Поперечные сечения слоистой балки: *a* – произвольной пятислойной структуры с армированными внешними слоями и стенкой; *б* – двутавровой однородной; *в* – двутавровой с армированными полками

Систему координат x_i свяжем с балкой так, чтобы плоскость x_1x_3 ($x_2 = 0$) совпала со срединным слоем стенки ($m = 0$).

Для простоты изложения ограничимся случаем, когда поперечное сечение каждого слоя – прямоугольник со сторонами $b_m, h_m, -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}$ (см. рис. 2*a*), где b_m, h_m – ширина и толщина m -го слоя; $h_0 = 2h$ – высота стенки, b_0 – ее толщина. Кроме того, предполагается, что толщина полок много меньше высоты стенки, а ширина полок (несущих слоев) существенно больше толщины стенки, причем ширина полок не слишком большая и сопоставима с высотой стенки (то есть из рас-

смотрения исключаются тонкостенные стержни [11]). Таким условиям отвечают, например, прокатные двутавровые и тавровые профили [9].

Задача рассматривается в геометрически линейной постановке, то есть прогибы малы; температура конструкции известна из решения соответствующей задачи теплопроводности [12, 13]; материалы фаз композиции равносопротивляются растяжению-сжатию; решение исследуемой задачи не зависит от координаты x_3 , то есть кручение и изгиб балки в плоскости x_1x_3 не изучаются.

При поперечном изгибе балок двутаврового профиля касательные напряжения в поперечном сечении практически не изменяются по высоте стенки, а в полках этими напряжениями можно пренебречь [9]. Исходя из этих фактов, ослабленное сопротивление стенки ($m = 0$) рассматриваемого слоистого стержня поперечному сдвигу в плоскости изгиба x_1x_2 будем учитывать на базе первого варианта теории Тимошенко [14, 15], основанного на кинематической гипотезе недеформирующего поперечного сечения.

Если m -й слой квазиоднородно усилен $K^{(m)}$ семействами волокон с интенсивностями армирования $\omega_k^{(m)}$ ($1 \leq k \leq K^{(m)}$), то выполняется условие нормировки

$$\sum_{k=0}^{K^{(m)}} \omega_k^{(m)} = 1, \quad -M^{(-)} \leq m \leq M^{(+)}, \quad (1)$$

где $\omega_0^{(m)}$ – относительное объемное содержание связующего в m -м слое.

Предполагается, что полки (несущие слои) армированы только в продольном направлении x_1 , поэтому в рамках гипотез теории Тимошенко с допустимой для инженерных расчетов точностью можно считать, что во всех фазах композиции несущих слоев имеет место одноосное напряженное состояние. При этом для композитных полок исследуемой балки определяющие уравнения получаются в рамках деформационной теории пластичности [1, 2] на основе структурных формул из [16].

В стенке ($m = 0$) реализуется обобщенное плоское напряженное состояние (ПНС). Стенка может быть армирована перекрестно в плоскости x_1x_2 , а направления траекторий армирования k -м семейством волокон характеризуются углом φ_k , отсчитываемым от направления x_1 (рис. 3). Для композитной стенки в рамках метода переменных параметров упругости [1] на каждой итерации имеют место определяющие уравнения, полученные в [17].

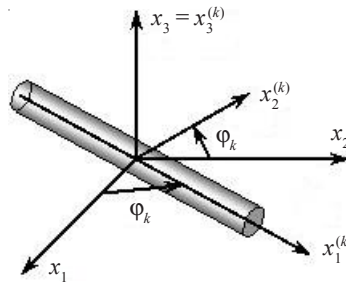


Рис. 3. Система координат, связанная с арматурой k -го семейства в стенке

В качестве конкретных примеров исследуем упругое и упругопластическое поведение слоистых однородных и композитных балок, изображенных на рис. 1 и имеющих длину $L = 1$ м. Слои балки изготовлены из магниевого высокопрочного

сплава ВМ65 или представляют собой композит, состоящий из сплава ВМ65, армированного волокнами карбида кремния (SiC). Термомеханические характеристики материалов компонентов композиции [4, 5] приведены в таблице 1, где E – модуль Юнга, E_s – модуль линейного упрочнения, σ_s – условный предел текучести (использована билинейная аппроксимация диаграммы деформирования материалов [18]), ν – коэффициент Пуассона, α – коэффициент линейного теплового расширения. Волокна SiC ведут себя упруго-хрупко [5], поэтому значения E_s для них в таблице 1 не указаны.

Таблица 1

**Термомеханические характеристики материалов
компонентов композиции слоев балки**

Материал	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , МПа	ν	$\alpha \cdot 10^6$, К ⁻¹
Температура конструкции 20 °С					
Магниевый сплав ВМ65 (Mg)	267,0	43,0	379,4	0,3	20,9
Волокна карбида кремния (SiC)	3000,0	455,0	–	0,34	3,3
Температура конструкции 400 °С					
Магниевый сплав ВМ65 (Mg)	11,0	18,5	3,931	0,3	24,6
Волокна карбида кремния (SiC)	2070,0	455,0	–	0,34	3,24

Значения термомеханических характеристик приведены для двух значений температуры конструкций, при которых проводились расчеты, причем в качестве температуры естественного состояния балок принималось $\theta = 20$ °С.

Податливость рассматриваемых балок оценивается величиной

$$u_2^* = \max_{0 \leq x_1 \leq L} |u_2^0(x_1)|, \quad (2)$$

а для сравнения по податливости решений, полученных на основе классической и неклассической теорий, используется величина

$$\delta u_2 = \frac{u_2^T - u_2^B}{u_2^T} \cdot 100\%, \quad (3)$$

где u_2^0 – прогиб; u_2^T – значение величины u_2^* , определенное по теории Тимошенко; u_2^B – значение u_2^* , вычисленное по классической теории Бернулли.

На рис. 4, 5 изображены эпюры прогибов $u_2^0(x_1)$ для трехслойных ($M^{(\pm)} = 1$) магниевых или композитных двухопорных (рис. 4а и рис. 5а) и консольных (рис. 4б и рис. 5б) балок, рассчитанные при температуре естественного состояния конструкций $\theta = 20$ °С (рис. 4, за исключением кривых 5, 5') и при нагреве до температуры $\theta = 400$ °С (рис. 5). Кривые, номера которых не помечены штрихами, получены на основе теории Тимошенко, а кривые на рис. 4а, б, номера которых помечены штрихами, определены по классической теории.

Поперечные сечения исследуемых трехслойных балок (см. рис. 2б, в) определяются следующими размерами:

$$h_0 = 85,6 \text{ мм}, \quad b_0 = 4,5 \text{ мм}, \quad h_1 = h_{-1} = 7,2 \text{ мм}, \quad b_1 = b_{-1} = 55 \text{ мм}, \quad (4)$$

которые соответствуют характерным размерам поперечного сечения двутаврового прокатного профиля №10 [9].

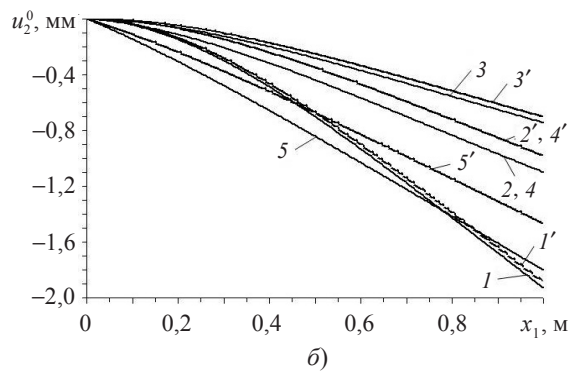
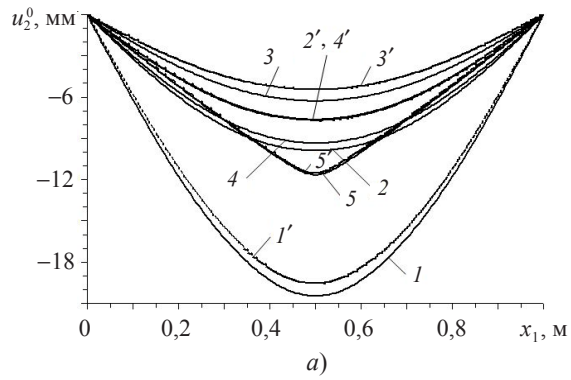


Рис. 4. Эпюры прогибов балок при $\theta = 20^\circ\text{C}$: а – двухпропорных; б – консольных

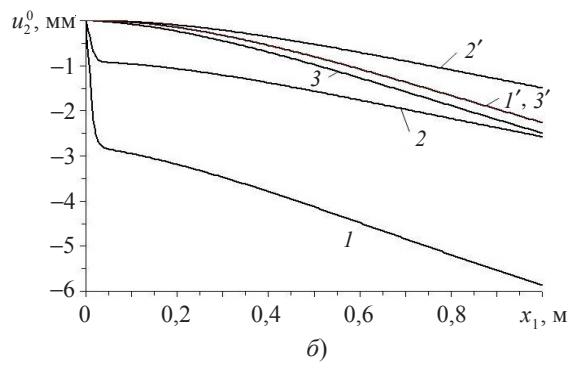
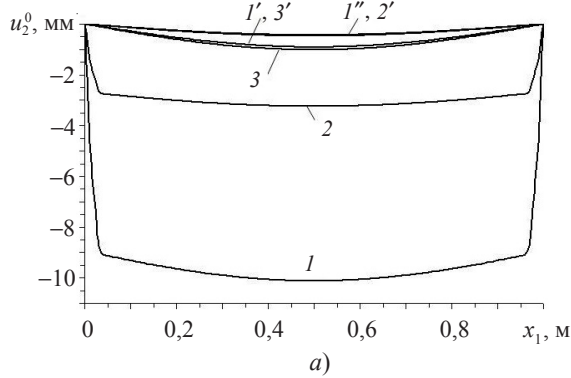


Рис. 5. Эпюры прогибов композитных балок при $\theta = 400^\circ\text{C}$: а – двухпропорных; б – консольных

Исследуем сначала особенности механического поведения таких однородных и композитных балок при $\theta = 20^\circ\text{C}$ (рис. 4, кроме кривых 5, 5'). Линии l, l' на рис. 4 рассчитаны для однородных магниевых балок, причем кривые l, l' на рис. 4а определены для двухопорной балки при распределенной нагрузке $q = 119 \text{ кН/м}$ (при этом значение $\delta u_2 = 4,4\%$ (см. (3)), и в окрестности центрального сечения $x_1 = L/2$ возникает зона пластических деформаций), а кривые l, l' на рис. 4б получены для консольной балки при $q = 14 \text{ кН/м}$ (в этом случае $\delta u_2 = 2,2\%$ и балка деформируется упруго). Следовательно, в случае малых прогибов, когда $u_2^* \leq H/5$ (здесь $H = 10 \text{ см}$ – общая высота балки), для расчета изгибного деформирования двутавровых магниевых балок рассматриваемых размеров (4) при температуре естественного состояния вполне достаточно использовать классическую теорию Бернулли [9, 19].

Кривые 2–4 и 2'–4' на рис. 4 рассчитаны для композитных балок с разными структурами армирования при нагрузке $q = 300 \text{ кН/м}$ в случае двухопорных балок (рис. 4а) и $q = 40 \text{ кН/м}$ для консольных балок (рис. 4б). При указанных уровнях нагрузок все рассматриваемые далее композитные балки при $\theta = 20^\circ\text{C}$ деформируются линейно-упруго.

Традиционно принято считать, что при изгибе балок в первую очередь необходимо усиливать несущие слои [6], поэтому сначала исследуем случай армирования полок магниевых балок SiC-волокнами ($K^{(-1)} = K^{(1)} = 1$). Оба несущих слоя армируются с одинаковой плотностью $\omega_1^{(-1)} = \omega_1^{(1)} = \omega$, а относительное объемное содержание материала связующего в полках определяется на основании (1): $\omega_0^{(-1)} = \omega_0^{(1)} = 1 - \omega$ (в стенке по-прежнему $\omega_0^{(0)} = 1$).

Расчеты показали, что при температуре $\theta = 20^\circ\text{C}$ увеличение плотности армирования полок ω от 0 до предельно допустимого значения ω_* (которое на практике примерно равно 0,7) приводит к монотонному уменьшению величины u_2^* , то есть к уменьшению податливости армированных конструкций. Кривые 2, 2' на рис. 4 определены при предельно допустимом значении $\omega = \omega_* = 0,7$. При этом в случае двухопорной балки (см. рис. 4а) величина $\delta u_2 = 22,9\%$ (см. (3)), а для консольной балки (см. рис. 4б) $\delta u_2 = 11\%$.

Дальнейшего уменьшения податливости композитных балок можно добиться только за счет усиления стенки. Предполагается, что обе полки армированы с предельно допустимой плотностью $\omega_1^{(-1)} = \omega_1^{(1)} = \omega_* = 0,7$, а стенка усилена одним семейством SiC-волокон ($K^{(0)} = 1$) в продольном направлении: $\phi_1 = 0$ (см. рис. 1а и рис. 3). Расчеты показали, что с увеличением интенсивности продольного армирования стенки $\omega_1^{(0)}$ от 0 до $\omega_* = 0,7$ зависимость $u_2^*(\omega_1^{(0)})$ монотонно убывает, поэтому наименьшей податливостью обладают композитные балки, в которых плотность армирования $\omega_1^{(\pm 1)} = \omega_1^{(0)} = \omega_* = 0,7$. Кривые 3, 3' на рис. 4 получены именно при таком армировании балок, причем в случае двухопорной балки (см. рис. 4а) величина $\delta u_2 = 13,2\%$ (см. (3)), а для консольной балки (см. рис. 4б) $\delta u_2 = 5,9\%$.

Величины δu_2 , вычисленные по кривым 2, 2' и 3, 3' на рис. 4, имеют значения больше 5%. Следовательно, для адекватного в рамках инженерной точности расчета армированных балок из рассматриваемой Mg-SiC-композиции необходимо использовать уточненную теорию Тимошенко даже в случае упругого поведения материалов фаз композиции. Тот факт, что в указанных случаях $\delta u_2 > 5\%$, свидетельствует об ослабленном сопротивлении таких балок поперечным сдвигам, а точнее, об ослабленном сопротивлении их стенок этим сдвигам. Для устранения этого нега-

тивного факта обычно рекомендуется стенку армировать перекрестно двумя ($K^{(0)} = 2$) семействами волокон по направлениям $\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/4$ (см. рис. 1б и рис. 3) – ортогональное армирование. Согласно этой рекомендации [19], рассмотрим случай, когда полки по-прежнему продольно армированы с предельно допустимой плотностью $\omega_1^{(\pm 1)} = \omega_* = 0,7$, а стенки перекрестно усилены ($\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/4$) двумя семействами SiC-волокон с одинаковыми интенсивностями армирования $\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)} = \omega^{(0)}$ (см. рис. 1б). Проведенные расчеты показали, что зависимость $u_2^*(\omega^{(0)})$ (см. (2)) монотонно убывает при увеличении $\omega^{(0)}$ от 0 до предельно допустимого значения $\omega_*/2 = 0,35$. Однако было обнаружено, что существует некоторое предельное значение $\omega_*^{(0)}$, такое, что при $\omega^{(0)} \geq \omega_*^{(0)}$ величина u_2^* практически не изменяется. В рамках традиционной инженерной 5%-ной точности определения прогиба в случае двухопорной балки $\omega_*^{(0)} = 0,11$, а для консольной балки $\omega_*^{(0)} \approx 0$. Кривые 4, 4' на рис. 4 определены именно для этих значений $\omega_*^{(0)}$, причем на рис. 4а линии 2', 4' визуальнo практически неразличимы и значение δu_2 , рассчитанное по кривым 4, 4' на рис. 4а, равно 17,8%. Линии 4, 4' на рис. 4б в силу того, что в этом случае $\omega_*^{(0)} = 0$, полностью совпадают с кривыми 2, 2' (случай армирования только несущих слоев) и при этом $\delta u_2 = 11\%$.

Для обоих вариантов закрепления балок (см. рис. 1) указанные значения $\delta u_2 > 5\%$. Следовательно, и в случае перекрестного армирования стенок рассматриваемых трехслойных композитных балок для их адекватного расчета необходимо использовать неклассическую теорию Тимошенко.

Кривые 4 на рис. 4 лежат существенно ниже линий 3. Это означает, что с точки зрения рационального проектирования по критерию максимальной жесткости (по условию $\min u_2^*$) рассматриваемые балки заданной геометрии (см. (4)), изготовленные из Mg-SiC-композиции, целесообразно армировать в продольном направлении. Объясняется этот результат, очевидно, тем, что связующий материал таких балок (магниевого высокопрочный сплав ВМ65) обеспечивает вполне достаточную сдвиговую жесткость стенки, поэтому стенка сопротивляется не столько поперечной силе $F_{12}(x_1)$, сколько совместно с полками – изгибающему моменту $M_{11}(x_1)$. В силу этого для данной Mg-SiC-композиции при температуре 20 °С армирование стенки в продольном направлении (см. кривые 3 на рис. 4) оказывается более эффективным с точки зрения уменьшения податливости изгибаемых композитных балок, чем при перекрестном армировании стенки (см. линии 4), которое рекомендуется использовать, например, для балочных элементов строительных конструкций [19].

При повышенных температурах механическое поведение композитных балок может измениться не только количественно, но и качественно. Действительно, согласно данным, приведенным в таблице, при температуре 400 °С значения E и σ_s для магниевого сплава ВМ65 уменьшаются в несколько раз по сравнению со значениями при 20 °С, а аналогичные значения для SiC-волокон изменяются незначительно. Это означает, что при повышенных температурах (в частности, при 400 °С) на каждой итерации метода переменных параметров упругости, используемого для линеаризации рассматриваемых задач, отношение секущих модулей арматуры и связующего будет достаточно большим (выше 30). Значит, соответствующую композицию условно следует рассматривать как обладающую сильной анизотропией [18], что приводит, например, к существенному ослаблению сопротивления продольно армированных стенок рассматриваемых балок поперечным сдвигам [10, 18].

Поэтому дополнительно исследуем особенности деформирования изучаемых балок при температуре 400 °С.

Кривые 5, 5' на рис. 4 и все кривые на рис. 5 рассчитаны при температуре 400 °С, причем линии 5, 5' на рис. 4 характеризуют эпюры прогибов однородных Mg-балок, а кривые на рис. 5 – эпюры прогибов композитных балок с различными структурами армирования.

Кривые 5, 5' на рис. 4а определены при $q = 5,2$ кН/м, и значение δu_2 в этом случае равно 1,2%, а линии 5, 5' на рис. 4б получены при $q = 1,32$ кН/м, при этом $\delta u_2 = 18,7\%$. В обоих случаях в однородных Mg-балках при $\theta = 400$ °С возникают развитые пластические деформации. Поведение кривых 5, 5' на рис. 4а демонстрирует, что в однородной двухопорной балке при $\theta = 400$ °С в окрестности центрального сечения $x_1 = L/2$ возникает напряженное состояние, близкое к пластическому шарниру [1, 2]. Аналогично поведение кривых 5, 5' на рис. 4б свидетельствует о том, что при той же температуре в консольной Mg-балке в окрестности заделки $x_1 = 0$ также возникает напряженно-деформированное состояние (НДС), близкое к пластическому шарниру, на которое накладывается НДС, соответствующее поперечному сдвигу стенки.

Значительное различие величин u_2^* , определенных по кривым 5, 5' на рис. 4б (в этом случае $\delta u_2 = 18,7\%$), указывает на то, что при повышенных температурах классическая теория Бернулли уже не гарантирует 5%-ной инженерной точности по податливости даже для однородных балок двутаврового поперечного сечения. Поэтому для адекватного расчета механического поведения таких силовых элементов конструкций необходимо использовать теорию Тимошенко.

Еще в большей степени различие решений, полученных по классической теории и по теории Тимошенко, проявляется в случаях армированных балок при повышенных температурах. Так, кривые на рис. 5а получены для двухопорных композитных балок при $q = 16$ кН/м и $\theta = 400$ °С, а на рис. 5б – для консольных балок при $q = 7,6$ кН/м. Здесь по-прежнему предполагалось, что полки армированы продольно с одинаковой плотностью $\omega_1^{(-1)} = \omega_1^{(1)} = \omega$, а стенки могут быть усилены продольно (см. рис. 1а) или перекрестно (см. рис. 1б).

Проведенные расчеты показали, что при армировании только полок ($\omega_0^{(0)} = 1$; см. (1)) зависимость $u_2^*(\omega)$ монотонно убывает при возрастании ω от 0 до предельно допустимого значения $\omega_* = 0,7$. Однако в отличие от случая $\theta = 20$ °С при расчетах по теории Тимошенко обнаруживается такое значение $\omega = \omega_*^{(1)}$, что при $\omega \geq \omega_*^{(1)}$ податливость балок $u_2^*(\omega)$ практически не изменяется. В рамках инженерной 5%-ной точности при $\theta = 400$ °С для двухопорной балки (см. рис. 1а) это предельное значение $\omega_*^{(1)} \approx 0,3$, а для консольной балки (см. рис. 1б) $\omega_*^{(1)} \approx 0,6$. Кривые 1, 1' на рис. 5 построены для этих предельных значений $\omega_*^{(1)}$. Величина δu_2 , рассчитанная согласно (3) по кривым 1, 1' на рис. 5а, имеет значение 91%, а в случае консольной балки (см. линии 1, 1' на рис. 5б) $\delta u_2 = 61,5\%$.

Сравнение кривых 1, 1' на рис. 5 показывает, что они различаются не только количественно (в смысле существенного различия значений ординат точек этих кривых), но и качественно. Поведение кривых 1 на рис. 5 свидетельствует о том, что в окрестности опорных сечений ($x_1 = 0$ и $x_1 = L$ на рис. 5а и $x_1 = 0$ на рис. 5б) в стенках таких композитных балок активно развиваются пластические деформации поперечных сдвигов (балки как бы срезаются в окрестности опор). Классическая теория (см. кривые 1' на рис. 5) такие особенности деформирования рассматривает

мых балок не описывает, поэтому значения u_2^* , рассчитанные по теории Бернулли и по теории Тимошенко, в данном случае различаются столь существенно. Кроме того, в рамках расчетов по классической теории не наблюдается эффект «переармирования» (в том смысле, что не обнаруживается предельное значение $\omega_*^{(1)}$), то есть согласно теории Бернулли наименьшей податливостью обладают балки с предельно допустимой плотностью армирования полков $\omega = \omega_* = 0,7$. Зависимость $u_2^0(x_1)$ для этого значения ω , определенная по классической теории, на рис. 5а характеризуется кривой I'' (соответствующая кривая на рис. 5б не изображена, так как она почти совпадает с линией I').

Таким образом, согласно расчетам, проведенным в рамках теории Тимошенко, при $\theta = 400^\circ\text{C}$ нет смысла армировать полки рассматриваемых композитных балок с плотностью ω , превосходящей предельное значение $\omega_*^{(1)}$, так как податливость таких конструкций при $\omega \geq \omega_*^{(1)}$ практически не изменяется. Следовательно, дальнейшее уменьшение податливости исследуемых балок возможно только за счет армирования стенок (без изменения размеров и геометрии конструкций).

В связи с этим по-прежнему предполагаем, что несущие слои армированы одинаково ($\omega_1^{(-1)} = \omega_1^{(1)} = \omega$), а стенки продольно усилены одним ($K^{(0)} = 1$) семейством SiC-волокон с плотностью $\omega_1^{(0)} > 0$ (см. рис. 1а). Выполненные расчеты показали, что при фиксированном значении ω увеличение интенсивности армирования стенки $\omega_1^{(0)}$ от 0 до предельно допустимого значения $\omega_* = 0,7$ приводит к монотонному уменьшению податливости композитной балки, причем эффект «переармирования» не наблюдается. Так, кривые 2, 2' на рис. 5а получены при $\omega = \omega_*^{(1)} = 0,3$, $\omega_1^{(0)} = \omega_* = 0,7$ и $\theta = 400^\circ\text{C}$ (линия 2' при этом визуально почти не отличается от кривой I''). Точность классического решения в этом случае, согласно (3), составляет 85,6%. Кривые 2, 2' на рис. 5б определены при $\omega = \omega_*^{(1)} = 0,6$, $\omega_1^{(0)} = \omega_* = 0,7$, при этом величина δu_2 имеет значение 42%.

Поведение кривых 1 и 2 на рис. 5 свидетельствует о том, что в рамках расчетов по теории Тимошенко в композитных балках обнаруживаются ярко выраженные краевые эффекты, причем зоны этих эффектов уменьшаются с увеличением плотности продольного армирования стенок балок. Эти краевые эффекты являются следствием того, что при $\theta = 400^\circ\text{C}$ в окрестности опорных сечений в стенках армированных балок активно развиваются деформации поперечных сдвигов, которые классическая теория Бернулли не учитывает. При продольном армировании стенок (то есть в случае $\omega_1^{(0)} > 0$) поперечные сдвиговые деформации развиваются преимущественно в связующем материале и их величина тем больше, чем больше интенсивность армирования стенок $\omega_1^{(0)}$, поэтому с увеличением $\omega_1^{(0)}$ наблюдается уменьшение (локализация) зон краевых эффектов, а податливость балок при этом уменьшается.

Для предотвращения возможности активного развития деформаций поперечных сдвигов в стенках балок при $\theta = 400^\circ\text{C}$ необходимо их армировать перекрестно (см. рис. 1б). Для демонстрации этого факта рассмотрим трехслойные балки, несущие слои которых армированы в продольном направлении с одинаковой интенсивностью $\omega_1^{(-1)} = \omega_1^{(1)} = \omega$, а стенки перекрестно армированы двумя ($K^{(0)} = 2$) семействами SiC-волокон с одинаковой плотностью по направлениям $\varphi_1 = -\varphi_2 = \pi/4$ (см. рис. 1б и рис. 3).

Расчеты показали, что при фиксированной интенсивности армирования полков увеличение плотности перекрестного армирования $\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)}$ от 0 до предельно

допустимого значения $\omega_1^{(0)} = \omega_*/2 = 0,35$ приводит к монотонному уменьшению величины u_2^* . Однако существуют такие предельные значения интенсивности перекрестного армирования стенки $\omega_1^{(0)} = \omega_*^{(0)}$, при превышении которых ($\omega_1^{(0)} \geq \omega_*^{(0)}$) зависимость $u_2^*(\omega_1^{(0)})$ практически не изменяется. В рамках инженерной 5%-ной точности определения величины u_2^* для двухопорной балки $\omega_*^{(0)} = 0,15$ при плотности армирования полок $\omega = \omega_*^{(1)} = 0,3$, а для консольной балки $\omega_*^{(0)} = 0,125$ при интенсивности армирования несущих слоев $\omega = \omega_*^{(1)} = 0,6$. Кривые 3, 3' на рис. 5а, б определены при этих предельных значениях $\omega_*^{(0)}$ и $\omega_*^{(1)}$ соответственно, причем линии 3' на рис. 5 визуально практически не отличаются от кривых 1'. Поведение кривых 3, 3' на рис. 5, в отличие от кривых 1, 1' и 2, 2', качественно подобно, однако величина δu_2 , рассчитанная по кривым 3, 3' на рис. 5а, имеет значение 10,9%, а по кривым 3, 3' на рис. 5б – значение 9,3%. Следовательно, и при перекрестном армировании стенки классическая теория не гарантирует 5%-ной точности расчетов рассматриваемых балок по податливости.

Как уже отмечалось, при температуре естественного состояния балок $\theta = 20^\circ\text{C}$ армирование их стенок в продольном направлении (см. рис. 1а) более эффективно с точки зрения минимизации податливости при изгибе таких конструкций, чем перекрестное армирование стенок (см. рис. 1б), поэтому кривые 3 на рис. 4 лежат выше линий 4. При $\theta = 400^\circ\text{C}$, наоборот, перекрестное армирование стенок оказывается эффективнее их продольного армирования, так как кривые 3 на рис. 5 лежат выше линий 2. При этом общий расход SiC-волокон в стенках при перекрестном армировании существенно меньше, чем при продольном их усилении. Напомним, что кривые 2 на рис. 5 получены для балок с продольным армированием стенок с предельно допустимой плотностью $\omega_1^{(0)} = \omega_* = 0,7$. Кривая 3 на рис. 5а рассчитана при перекрестном армировании стенки двухопорной балки с интенсивностями $\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)} = \omega_*^{(0)} = 0,15$ (то есть суммарная плотность такого армирования $\omega_1^{(0)} + \omega_2^{(0)} = 0,3$ в 2,33 раза меньше, чем при продольном усилении стенки), а кривая 3 на рис. 5б определена при $\omega_1^{(0)} = \omega_2^{(0)} = \omega_*^{(0)} = 0,125$, поэтому расход арматуры в стенке в этом случае в 2,8 раза меньше, чем при ее продольном армировании.

Таким образом, рациональные структуры армирования слоев балки, определенные при температуре ее естественного состояния, могут оказаться неэффективными при высоких температурах и наоборот. Следовательно, рациональные и оптимальные структуры армирования необходимо разыскивать при конкретном термостатическом нагружении слоисто-волоконистых балок.

В заключение отметим, что все особенности механического поведения балок слоисто-волоконистой структуры, обнаруженные при расчетах по теории Тимошенко, проявляются в еще большей степени при использовании более жестких армирующих волокон, например при армировании магниевых балок углеродными волокнами Торнелл-100, имеющими модуль упругости $E = 690$ ГПа [5], который примерно в 1,5 раза больше модуля Юнга SiC-волокон, армирование которыми рассматривалось в настоящей работе. В частности, краевые эффекты, возникающие в армированных слоистых балках при повышенных температурах, являются еще более ярко выраженными, чем на рис. 5 (см. кривые 1, 2). Возможность возникновения таких краевых эффектов требует разработки специальных численных методов решения соответствующих краевых задач для статически неопределимых балок слоисто-волоконистой структуры.

Список литературы

1. Малинин Н.Н. *Прикладная теория пластичности и ползучести*. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.
2. Качанов Л.М. *Основы теории пластичности*. М.: Наука, 1969. 420 с.
3. Хажинский Г.М. *Модели деформирования и разрушения металлов*. М.: Научный мир, 2011. 231 с.
4. Безухов Н.И., Бажанов В.Л., Гольденблат И.И., Николаенко Н.А., Синюков А.М. *Расчеты на прочность, устойчивость и колебания в условиях высоких температур*. Под ред. И.И. Гольденבלата. М.: Машиностроение, 1965. 567 с.
5. *Композиционные материалы*: Справочник. Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
6. Немировский Ю.В., Мищенко А.В., Вохмянин И.Т. *Рациональное и оптимальное проектирование слоистых стержневых систем*. Новосибирск: Изд-во НГАСУ, 2004. 488 с.
7. Мищенко А.В. Особенности упругопластического деформирования однородных и слоистых рационально профилированных балок при запроектных воздействиях. Сообщение 1. *Известия вузов. Строительство*. 2013. № 7. С. 12–22.
8. Каркаукас Р.П., Крутинис А.А., Аткачюнас Ю.Ю. и др. *Строительная механика. Программы и решения задач на ЭВМ*. Под ред. А.А. Чираса. М.: Стройиздат, 1990. 360 с.
9. Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*: Учебник для вузов. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.
10. Романова Т.П., Янковский А.П. Сравнительный анализ моделей изгибного деформирования армированных балок-стенок из нелинейно-упругих материалов. *Проблемы прочности и пластичности*. 2014. Т. 76, № 4. С. 297–309.
11. Юзиков В.П., Панасенко Н.Н. *Строительная механика тонкостенных стержней*. Волгоград: Волгоградское научное изд-во, 2013. 361 с.
12. Немировский Ю.В., Янковский А.П. *Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций*. Новосибирск: Изд-во «Арт-Авеню», 2008. 512 с.
13. Кудинов А.А. *Тепломассообмен*: Учеб. пособие. М.: ИНФРА-М, 2012. 375 с.
14. Васидзу К. *Вариационные методы в теории упругости и пластичности*. М.: Мир, 1987. 542 с.
15. Абрисимов Н.А., Баженов В.Г. *Нелинейные задачи динамики композитных конструкций*. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
16. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Эффективные физико-механические характеристики композитов, однонаправленно-армированных моноотропными волокнами. Сообщение 1. Модель армированной среды. *Известия вузов. Строительство*. 2006. №5. С. 16–24.
17. Янковский А.П. Определение термоупругих характеристик пространственно армированных волокнистых сред при общей анизотропии материалов компонент композиции. 1. Структурная модель. *Механика композитных материалов*. 2010. Т. 46, № 5. С. 663–678.
18. Янковский А.П. Исследование упругопластического деформирования армированных балок-стенок с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу. *Проблемы прочности и пластичности*. 2012. Вып. 74. С. 92–103.
19. Ахметзянов М.Х., Грес П.В., Лазарев И.Б. *Сопротивление материалов*. М.: Высшая школа, 2007. 334 с.

References

1. Malinin N.N. *Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti*. M.: Mashinostroenie, 1968. 400 s.
2. Kachanov L.M. *Osnovy teorii plastichnosti*. M.: Nauka, 1969. 420 s.
3. Khazhinskiy G.M. *Modeli deformirovaniya i razrusheniya metallov*. M.: Nauchnyy mir, 2011. 231 s.
4. Bezukhov N.I., Bazhanov V.L., Gol'denblat I.I., Nikolaenko N.A., Sinyukov A.M. *Raschety na prochnost', ustoychivost' i kolebaniya v usloviyakh vysokikh temperatur*. Pod red. I.I. Gol'denblata. M.: Mashinostroenie, 1965. 567 s.

5. *Kompozitsionnye materialy*: Spravochnik. Pod red. D.M. Karpinosa. Kiev: Naukova dumka, 1985. 592 s.
6. Nemirovskiy Yu.V., Mishchenko A.V., Vokhmyanin I.T. *Ratsional'noe i optimal'noe proektirovanie sloistykh sterzhnevnykh sistem*. Novosibirsk: Izd-vo NGASU, 2004. 488 s.
7. Mishchenko A.V. Osobennosti uprugoplasticheskogo deformirovaniya odnorodnykh i sloistykh ratsional'no profilirovannykh balok pri zaproektnykh vozdeystviyakh. *Soobshchenie 1. Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo*. 2013. № 7. S. 12–22.
8. Karkauskas R.P., Krutinis A.A., Atkochyunas Yu.Yu. i dr. *Stroitel'naya mekhanika. Programmy i resheniya zadach na EVM*. Pod red. A.A. Chirasa. M.: Stroyizdat, 1990. 360 s.
9. Feodos'yev V.I. *Soprotivlenie materialov*: Uchebnik dlya vuzov. M.: MG TU im. N.E. Bauman, 1999. 592 s.
10. Romanova T.P., Yankovskiy A.P. Sravnitel'nyy analiz modeley izgibnogo deformirovaniya armirovannykh balok-stenok iz nelineyno-uprugikh materialov. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2014. T. 76, №4. S. 297–309.
11. Yuzikov V.P., Panasenko N.N. *Stroitel'naya mekhanika tonkostennykh sterzhney*. Volgograd: Volgogradskoe nauchnoe izd-vo, 2013. 361 s.
12. Nemirovskiy Yu.V., Yankovskiy A.P. *Teploprovodnost' odnorodnykh i kompozitnykh tonkostennykh konstruksiy*. Novosibirsk: Izd-vo "Art-Avenyu", 2008. 512 s.
13. Kudinov A.A. *Teplomassoobmen*: Ucheb. posobie. M.: INFRA-M, 2012. 375 s.
14. Vasidzu K. *Variatsionnye metody v teorii uprugosti i plastichnosti*. M.: Mir, 1987. 542 s.
15. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. *Nelineynye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy*. N. Novgorod: Izd-vo NNGU, 2002. 400 s.
16. Nemirovskiy Yu.V., Yankovskiy A.P. Effektivnye fiziko-mekhanicheskie kharakteristiki kompozitov, odnonapravlenno-armirovannykh monotropnymi voloknami. *Soobshchenie 1. Model' armirovannoy sredy. Izvestiya vuzov. Stroitel'stvo*. 2006. №5. S. 16–24.
17. Yankovskiy A.P. Opredelenie termouprugikh kharakteristik prostranstvenno armirovannykh voloknistykh sred pri obshchey anizotropii materialov kompozitsii. 1. Strukturnaya model'. *Mekhanika kompozitnykh materialov*. 2010. T. 46, № 5. S. 663–678.
18. Yankovskiy A.P. Issledovanie uprugoplasticheskogo deformirovaniya armirovannykh balok-stenok s uchedom oslablennogo soprotivleniya poperechnomu sdvigu. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2012. Vyp. 74. S. 92–103.
19. Akhmetzyanov M.Kh., Gres P.V., Lazarev I.B. *Soprotivlenie materialov*. M.: Vysshaya shkola, 2007. 334 s.

**INVESTIGATION OF PROPERTIES OF INELASTIC DEFORMATION
OF COMPOSITE BEAMS OF LAMINATED-FIBROUS STRUCTURES
UNDER THERMAL-FORCE LOADS**

Yankovskii A.P.

*Siberian Branch of Russian Academy of Sciences
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,
Novosibirsk, Russian Federation*

In the framework of the deformation theory of plasticity the features of the mechanical behavior are investigated for flexible of hybrid composite beams, which have irregular layered structure and consist of walls and shelves (bearing layers). On the basis of the hypotheses of Timoshenko theory the nonlinear boundary value problem is formulated for the calculation of such structures, which allowed taking into account the weakened resistance to the transverse shifts of their walls. For the linearization of the obtained boundary value problem the method of variable parameters of elasticity is used. The specific examples of the flexural deformations are studied for homogeneous and reinforced double-supported and cantilever beams under the action of the distributed transverse load at normal and high temperatures. The cross sections of the considered beams are I-shaped. It is demonstrated that at high temperature even for homogeneous metal I-beam, Bernoulli theory

does not provide the 5% precision of determination of their compliance, acceptable for engineering calculations. In the cases of beams reinforced with high modulus fibers, the classical theory becomes generally unacceptable even at normal temperature, since in some cases it underestimates the calculated compliance of beams by tens of percent. It is shown that for an adequate description of the mechanical behavior of reinforced laminated beams, especially at high temperatures, it is necessary to take into account actively developing deformation of transverse shears in their walls. It was found that in such conditions in composite beams pronounced edge effects may occur, which the classical theory does not describe.

Keywords: laminated beams, reinforcement, deformation theory of plasticity, Bernoulli theory, Timoshenko theory, edge effects, thermal effects.