УДК 539.3

О ПРОДОЛЬНОМ ДВИЖЕНИИ ПАНЕЛИ ПРИ МЕХАНИЧЕСКИХ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ*

Баничук Н.В.[1,2], **Иванова С.Ю.**[1]

[1]*Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва, Российская Федерация*
[2]*Московский физико-технический институт, Москва, Российская Федерация*

banichuk@ipmnet.ru

Поступила в редакцию 28.03.2016

На основе классических методов математической физики и механики исследуются проблемы устойчивости движущихся в осевом направлении материалов и чувствительности к внешним воздействиям поведения упругого полотна. Изучается процесс прямолинейного движения упругого полотна, опертого на систему шарнирных подкреплений и моделируемого упругой панелью, которая движется с постоянной скоростью и подвержена нагреву и внешним механическим воздействиям. Малые поперечные упругие перемещения панели описываются дифференциальным уравнением четвертого порядка, содержащим члены, обусловленные действием внутриплоскостного натяжения и центростремительных сил, а также члены, учитывающие термомеханические воздействия. Отдельно рассматриваются два важных случая: случай дивергенции панели при однородном внутриплоскостном термомеханическом растяжении, когда исследуется статическая неустойчивость (дивергенция) движущейся изотропной панели, и случай деформации панели при одновременном термомеханическом изгибе и растяжении. В обоих случаях задачи решаются аналитически и решения получены в явном виде.

Ключевые слова: математическое моделирование, продольно движущаяся панель, дивергенция, термоупругая неустойчивость

Введение

Изучение механического поведения продольно движущихся упругих систем было начато в работе [1] и продолжено значительно позднее в [2–14]. В числе современных работ в этой области следует отметить статьи [15–18], а также монографии [19, 20], в которых приведен широкий обзор научной литературы по рассматриваемой проблематике.

Целью настоящего исследования является разработка математической модели для движущегося материала и установление критериев устойчивости при термомеханических воздействиях, приводящих к деформациям в поперечном направлении и к статическим формам потери устойчивости (дивергенции). Отдельно рассматри-

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант №14-08-00016а).

ваются два случая: случай воздействия на панель только внутриплоскостного термомеханического натяжения и случай совместного комбинированного термомеханического воздействия – изгиба и растяжения. В первом случае исследование явления термомеханического выпучивания (дивергенции) сводится к решению задачи на собственные значения и получению в явном виде выражений для собственных значений (критических параметров) и форм потери устойчивости. Во втором случае термомеханические деформации аналитически определяются из решения краевой задачи для неоднородного дифференциального уравнения второго порядка с применением техники разложения функций в ряды Фурье.

Основные соотношения для движущейся панели

Одной из простейших одномерных моделей движущегося материала при термомеханических воздействиях, приводящих к дивергенции и поперечным колебаниям, является движущаяся узкая панель. Рассмотрим идеальную панель, занимающую область $0 \le x \le l$, $-b/2 \le y \le b/2$, $-h/2 \le z \le h/2$ ($l >> b$, $l >> h$) в прямоугольной системе координат xyz и движущуюся с постоянной скоростью V_0 в направлении оси x. Поперечное перемещение в направлении оси z описывается функцией $w = w(x, t)$ (считаем, что перемещения не зависят от координаты y). Рассматривая стандартное волновое уравнение и переходя от лагранжевых (материальных) производных к эйлеровым, запишем известное выражение для поперечных ускорений панели [20]:

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + V_0\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w}{\partial t} + V_0\frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V_0\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V_0^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \qquad (1)$$

и представим уравнение для малых поперечных колебаний панели в следующей форме:

$$m\frac{d^2w}{dt^2} = L^M(w) - L^B(w), \qquad (2)$$

где m – масса на единицу длины панели. Заметим, что представление (1) предполагает постоянство продольной скорости V_0. Фигурирующие в правой части уравнения (2) операторы L^B и L^M являются соответственно изгибным и мембранным операторами. Выражения для $L^B(w)$ и $L^M(w)$ определяются при помощи действующего в направлении оси x натяжения $T_x = T$ и изгибающего момента $M_y = M$ относительно оси y и записываются в виде

$$L^M(w) = T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \left(T_0 - \frac{Eh}{1-\nu}\varepsilon_\theta\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad (3)$$

$$L^B(w) = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (1+\nu)\frac{\partial^2 \kappa_\theta}{\partial x^2}\right], \qquad (4)$$

где E – модуль Юнга в направлении оси x; ν – коэффициент Пуассона; h – толщина панели; T_0 – механическая часть внутриплоскостного натяжения T; а D – изгибная (цилиндрическая) жесткость, определяемая выражением [21]

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}. \qquad (5)$$

Обобщенные термические деформации ε_θ и κ_θ, соответствующие тепловому натяжению и изгибу панели, задаются соотношениями [22]:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{h}\int_{-h/2}^{h/2}\alpha_\theta \theta dz, \quad \kappa_\theta = \frac{12}{h^3}\int_{-h/2}^{h/2}\alpha_\theta \theta z dz, \tag{6}$$

где θ – приращение температуры, α_θ – коэффициент линейного теплового расширения.

С использованием соотношений (1)–(4) приходим к уравнению для малых поперечных колебаний продольно движущейся панели:

$$m\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2V_0\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + V_0^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) = \left(T_0 - \frac{Eh}{1-\nu}\varepsilon_\theta\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - D\left[\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + (1+\nu)\frac{\partial^2 \kappa_\theta}{\partial x^2}\right]. \tag{7}$$

Уравнение (7) является дифференциальным уравнением четвертого порядка относительно переменной x. В качестве краевых условий, используемых при интегрировании уравнения, примем условия шарнирного опирания

$$w = 0, \quad x = 0, l, \tag{8}$$

$$M = D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (1+\nu)\kappa_\theta\right] = 0, \quad x = 0, l, \tag{9}$$

которые выражают равенство нулю момента и соответствуют свободному вращению панели в концевых точках отрезка $[0, l]$. Данные граничные условия аппроксимируют условие движения упругой ленты между двумя прижимающими и синхронно вращающимися валками (роликами), что проверялось неоднократно в специально проводившихся исследованиях.

В стационарном одномерном случае, когда

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \tag{10}$$

функция поперечных прогибов панели $w = w(x)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(mV_0^2 + \frac{Eh}{1-\nu}\varepsilon_\theta - T_0\right)\frac{d^2 w}{dx^2} + D\left[\frac{d^4 w}{dx^4} + (1+\nu)\frac{d^2 \kappa_\theta}{dx^2}\right] = 0, \tag{11}$$

которое с учетом граничных условий (8), (9) может быть использовано для исследования статических деформаций и дивергенции движущейся упругой панели при термомеханических воздействиях.

Дивергенция и задача на собственные значения

Предположим, что $\kappa_\theta = 0$, и исследуем статическую неустойчивость (дивергенцию) движущейся изотропной панели при однородном термомеханическом внутриплоскостном натяжении

$$T = T_0 - \frac{Eh}{1-\nu}\varepsilon_\theta. \tag{12}$$

Введем безразмерную переменную $\tilde{x} = x / l$ (в дальнейшем тильда опускается) и вспомогательную функцию

$$\psi(x)=\frac{d^2w}{dx^2},\quad 0\le x\le 1, \tag{13}$$

описывающую кривизну панели. С использованием новой безразмерной переменной x, уравнения (11) и обозначения

$$\lambda=\frac{l^2}{D}\left(mV_0^2+\frac{Eh}{1-\nu}\varepsilon_\theta-T_0\right) \tag{14}$$

сформулируем следующую задачу на собственные значения:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\lambda\psi=0,\quad 0\le x\le 1, \tag{15}$$

$$\psi(0)=0,\quad \psi(1)=0. \tag{16}$$

Параметр λ, определяемый выражением (14), играет роль собственного значения в уравнении (15). Нетривиальные решения уравнения на собственные значения (15), то есть собственные функции, записываются в виде

$$\psi(x)=A\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)+B\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right) \tag{17}$$

с двумя произвольными коэффициентами A, B и неопределенной величиной λ. Используя представление (17) и граничные условия (16), будем иметь

$$\psi(x)=A\sin(j\pi x), \tag{18}$$

$$\lambda=j^2\pi^2,\quad j=1,2,..., \tag{19}$$

где $A\neq 0$ – произвольная постоянная. Заметим, что при анализе явления дивергенции в рамках концепции статической неустойчивости Эйлера амплитудные величины собственных функций остаются неопределенными.

Интегрируя (13), (18) дважды и учитывая граничные условия (8) для функции $w=w(x)$, получим функцию перемещений j-й моды в виде

$$w(x)=C\sin(j\pi x),\quad 0\le x\ge 1,\ \ j=1,2,..., \tag{20}$$

где $C=-A/(j\pi)^2$ – произвольная постоянная. Из соотношений (14) и (19) найдем соответствующее выражение для критической скорости

$$(V_0^{\mathrm{div}})_j^2=\frac{j^2\pi^2D}{ml^2}+\frac{T_0}{m}-\frac{Eh}{m(1-\nu)}\varepsilon_\theta. \tag{21}$$

Таким образом, форма собственной моды совпадает с мембранной модой (когда $D=0$ и $\kappa_\theta=0$) и не зависит от величины изгибной жесткости D и тепловой деформации ε_θ. Тем не менее, наличие изгибной жесткости и тепловой деформации приводит к появлению дополнительных членов в выражении для критической скорости (21).

Заметим, что только критическая скорость дивергенции, соответствующая минимальному собственному значению при $j=1$, имеет практическое значение. Выражение для критической скорости дивергенции следует из соотношения (21) и имеет вид

$$(V_0^{\mathrm{div}})_1^2=\frac{\pi^2D}{ml^2}+\frac{T_0}{m}-\frac{Eh}{m(1-\nu)}\varepsilon_\theta. \tag{22}$$

Отметим также, что при $D \to 0$ и $\varepsilon_\theta \to 0$ в выражении (21), то есть в мембранном приближении ($T_0 \neq 0$, $D = 0$, $\varepsilon_\theta = 0$), имеется только одно (вырожденное) собственное значение, и поэтому все моды (20) соответствуют критической скорости дивергенции. Поскольку формулы (20) описывают бесконечный базис Фурье, это означает, что мембрана может принять любую форму, удовлетворяющую граничным условиям, по мере приближения к состоянию дивергенции аналогично мембране, движущейся с критической скоростью.

Деформации при учете термомеханического изгиба и растяжения панели

Используя безразмерную координату x ($0 \le x \le 1$) и предполагая, что $\kappa_\theta = \mathrm{const} \neq \neq 0$ и $\varepsilon_\theta = \mathrm{const} \neq 0$, рассмотрим продольное движение панели, подверженной натяжению и изгибу. Представим уравнение (11) в виде

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda w + (1+\nu)\kappa_\theta\right] = 0, \quad 0 \le x \le 1, \tag{23}$$

где λ задается формулой (14). Интегрируя уравнение (23) и учитывая граничные условия (8), (9), приходим к дифференциальному уравнению второго порядка для функции перемещений

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \lambda w + (1+\nu)\kappa_\theta = 0, \quad 0 \le x \le 1. \tag{24}$$

Для решения этого уравнения представим искомую функцию $w(x)$ и величину $(1 + \nu)\kappa_\theta$ в виде рядов Фурье:

$$w = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} a_n \sin(n\pi x), \tag{25}$$

$$(1+\nu)\kappa_\theta = \frac{4(1+\nu)\kappa_\theta}{\pi} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi x). \tag{26}$$

Заметим, что представление (26) получено при помощи следующего известного равенства [23]:

$$1 = \frac{4}{\pi}\left(\sin(\pi x) + \frac{1}{3}\sin(3\pi x) + \frac{1}{5}\sin(5\pi x) + \ldots\right), \quad 0 < x < 1.$$

Подставляя разложения (25) и (26) в уравнение (24) и выполняя элементарные операции, придем к уравнению

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \sin(n\pi x)\left\{a_n[\lambda - (n\pi)^2] + \frac{4(1+\nu)}{n\pi}\kappa_\theta\right\} = 0 \tag{27}$$

и к выражениям для неизвестных коэффициентов

$$a_n = \frac{4(1+\nu)\kappa_\theta}{n\pi[(n\pi)^2 - \lambda]}, \quad n = 1, 3, \ldots \tag{28}$$

искомого решения (25).

В качестве примеров рассмотрим некоторые частные случаи задания обобщенных тепловых деформаций (6). Эти деформации зависят от распределения температурных приращений $\theta = \theta(z)$ и распределения $\alpha_\theta = \alpha_\theta(z)$ в сечении панели. В случае однородных распределений, то есть при $\alpha_\theta(z) = \alpha_\theta^0$ и $\theta(z) = \theta^0$, имеем

$$\varepsilon_\theta = \alpha_\theta^0 \theta^0, \quad \kappa_\theta = 0. \tag{29}$$

Если материал панели однороден, а температурное распределение задано линейной функцией $\theta = cz$, то

$$\varepsilon_\theta = 0, \quad \kappa_\theta = c\alpha_\theta^0. \tag{30}$$

В случае симметричного распределения термических свойств материала по толщине панели, то есть когда $\alpha_\theta = \alpha_\theta(z)$ является симметричной функцией по z, а температурное распределение однородно ($\theta(z) = \theta^0 = \text{const}$), имеем

$$\varepsilon_\theta = \frac{\theta}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \alpha_\theta(z)dz, \quad \kappa_\theta = 0. \tag{31}$$

С использованием выражений (6) могут быть рассмотрены многие другие случаи распределения температурных свойств.

Выводы

Исследовались поперечные деформации и устойчивость упругой панели, движущейся продольно с постоянной скоростью, опертой на систему роликов, моделируемых соответствующими граничными условиями. Малые поперечные упругие перемещения панели описывались дифференциальным уравнением четвертого порядка, содержащим члены, обусловленные действием внутриплоскостного натяжения и центростремительных сил, а также члены, учитывающие термомеханические воздействия. Были отдельно рассмотрены два важных случая: случай дивергенции панели при внутриплоскостном термомеханическом растяжении и случай деформации панели при термомеханическом изгибе и растяжении. В обоих случаях задачи были решены аналитически и решения получены в явном виде.

Список литературы

1. Skutch R. Über die Bewegung eines gespannten Fadens, weicher gezwungen ist durch zwei feste Punkte, mit einer constanten Geschwindigkeit zu gehen, und zwischen denselben in Transversalschwingungen von gerlinger Amplitude verzetzt wird. *Annalen der Physik und Chemie*. 1897. No. 61. S. 190–195.

2. Sack R.A. Transvers oscillations in travelling strings. *British Journal of Applied Physics*. 1954. Vol. 5. P. 224–226.

3. Archibald F.R., Emslie A.G. The vibration of a string having a uniform motion along its length. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1958. Vol. 25, No. 3. P. 347–348.

4. Miranker W.L. The wave equation in a medium in motion. *IBM Journal of Research and Development*. 1960. Vol. 4, No. 1. P. 36–42.

5. Mote C.D. Divergence buckling of an edge-loaded axially moving band. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1968. Vol. 10. P. 281–295.

6. Mote C.D. Dynamic stability of an axially moving band. *Journal of the Franklin Institute.* 1968. Vol. 285, No. 5. P. 329–346.

7. Mote C.D. Dynamic stability of axially moving materials. *Shock and Vibration Digest.* 1972. Vol. 4, No. 4. P. 2–11.

8. Mote C.D. Stability of systems transporting accelerating axially moving materials. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control.* 1975. Vol. 97, No. 1. P. 96–98.

9. Thurman A.L., Mote C.D.Jr. Free, periodic, nonlinear oscillation of an axially moving strip. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1969. Vol. 36, No. 1. P. 83–91.

10. Simpson A. Transvers modes and frequencies of beams translating between fixed end supports. *Journal of Mechanical Engineering Science.* 1973. Vol. 15. P. 159–164.

11. Mujumdar A.S., Douglas W.J.M. Analytical modelling of sheet flutter. *Svensk Papper-stidning.* 1976. Vol. 79. P. 187–192.

12. Pramila A. Sheet flutter and the interaction between sheet and air. *TAPPI Journal*. 1986. Vol. 69, No. 7. P. 70–74.

13. Pramila A. Natural frequencies of a submerged axially moving band. *Journal of Sound and Vibration*. 1987. Vol. 112, No. 1. P. 198–203.

14. Wickert J.A., Mote C.D. Classical vibration analysis of axially moving continua. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1990. Vol. 57. P. 738–744.

15. Wang J., Huang L., Liu X. Eigenvalue and stability analysis for transverse vibrations of axially moving strings based on Hamiltonian dynamics. *Acta Mechanica Sinica.* 2005. Vol. 21. P. 485–494.

16. Banichuk N., Jeronen J., Neittaamäki P., Tuovinen T. On the instability of an axially moving elastic plate. *International Journal of Solids and Structures*. 2010. Vol. 47, No. 1. P. 91–99.

17. Banichuk N., Jeronen J., Kurki M., Neittaamäki P., Saksa T., Tuovinen T. On the limit velocity and buckling phenomena of axially moving orthotropic membranes and plates. *International Journal of Solids and Structures.* 2011. Vol. 48, No. 13. P. 2015–2025.

18. Banichuk N., Kurki M., Neittaamäki P., Saksa T., Tirronen M., Tuovinen T. Optimization and analysis of processes with moving materials subjected to fatigue fracture and instability. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2013. Vol. 41, No. 2. P. 146–167.

19. Marynowski K. Dynamics of the axially moving orthotropic web. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics.* Vol. 38. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 140 p.

20. Banichuk N., Jeronen J., Neittaamäki P., Saksa T., Tuovinen T. *Mechanics of Moving Materials.* Switzerland: Springer International Publishing, 2014. 253 p.

21. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. *Пластинки и оболочки*. М.: Наука, 1966. 636 с.

22. Коваленко А.Д. *Термоупругость*. Киев: Вища школа, 1975. 216 с.

23. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. 2 ed. Ed. E.W. Weisstein. Boca Raton, Chapman&Hall/CRC, 2003. 3242 p.

References

1. Skutch R. Über die Bewegung eines gespannten Fadens, weicher gezwungen ist durch zwei feste Punkte, mit einer constanten Geschwindigkeit zu gehen, und zwischen denselben in Transversalschwingungen von gerlinger Amplitude verzetzt wird. *Annalen der Physik und Chemie*. 1897. No. 61. S. 190–195.

2. Sack R.A. Transvers oscillations in travelling strings. *British Journal of Applied Physics*. 1954. Vol. 5. P. 224–226.

3. Archibald F.R., Emslie A.G. The vibration of a string having a uniform motion along its length. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1958. Vol. 25, No. 3. P. 347–348.

4. Miranker W.L. The wave equation in a medium in motion. *IBM Journal of Research and Development*. 1960. Vol. 4, No. 1. P. 36–42.

5. Mote C.D. Divergence buckling of an edge-loaded axially moving band. *International Journal of Mechanical Sciences*. 1968. Vol. 10. P. 281–295.

6. Mote C.D. Dynamic stability of an axially moving band. *Journal of the Franklin Institute.* 1968. Vol. 285, No. 5. P. 329–346.

7. Mote C.D. Dynamic stability of axially moving materials. *Shock and Vibration Digest.* 1972. Vol. 4, No. 4. P. 2–11.

8. Mote C.D. Stability of systems transporting accelerating axially moving materials. *ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control.* 1975. Vol. 97, No. 1. P. 96–98.

9. Thurman A.L., Mote C.D.Jr. Free, periodic, nonlinear oscillation of an axially moving strip. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1969. Vol. 36, No. 1. P. 83–91.

10. Simpson A. Transvers modes and frequencies of beams translating between fixed end supports. *Journal of Mechanical Engineering Science.* 1973. Vol. 15. P. 159–164.

11. Mujumdar A.S., Douglas W.J.M. Analytical modelling of sheet flutter. *Svensk Papperstidning.* 1976. Vol. 79. P. 187–192.

12. Pramila A. Sheet flutter and the interaction between sheet and air. *TAPPI Journal*. 1986. Vol. 69, No. 7. P. 70–74.

13. Pramila A. Natural frequencies of a submerged axially moving band. *Journal of Sound and Vibration*. 1987. Vol. 112, No. 1. P. 198–203.

14. Wickert J.A., Mote C.D. Classical vibration analysis of axially moving continua. *ASME Journal of Applied Mechanics*. 1990. Vol. 57. P. 738–744.

15. Wang J., Huang L., Liu X. Eigenvalue and stability analysis for transverse vibrations of axially moving strings based on Hamiltonian dynamics. *Acta Mechanica Sinica.* 2005. Vol. 21. P. 485–494.

16. Banichuk N., Jeronen J., Neittaamäki P., Tuovinen T. On the instability of an axially moving elastic plate. *International Journal of Solids and Structures*. 2010. Vol. 47, No. 1. P. 91–99.

17. Banichuk N., Jeronen J., Kurki M., Neittaamäki P., Saksa T., Tuovinen T. On the limit velocity and buckling phenomena of axially moving orthotropic membranes and plates. *International Journal of Solids and Structures.* 2011. Vol. 48, No. 13. P. 2015–2025.

18. Banichuk N., Kurki M., Neittaamäki P., Saksa T., Tirronen M., Tuovinen T. Optimization and analysis of processes with moving materials subjected to fatigue fracture and instability. *Mechanics Based Design of Structures and Machines*. 2013. Vol. 41, No. 2. P. 146–167.

19. Marynowski K. Dynamics of the axially moving orthotropic web. *Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics.* Vol. 38. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2008. 140 p.

20. Banichuk N., Jeronen J., Neittaamäki P., Saksa T., Tuovinen T. *Mechanics of Moving Materials.* Switzerland: Springer International Publishing, 2014. 253 p.

21. Timoshenko S.P., Voynovskiy-Kriger C. *Plastinki i obolochki.* M.: Nauka, 1966. 636 s.

22. Kovalehko A.D. *Termouprugost'*. Kiev: Visha shkola, 1975. 216 s.

23. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. 2 ed. Ed. E.W. Weisstein. Boca Raton, Chapman&Hall/CRC, 2003. 3242 p.

ON AXIAL MOTION OF THE PANEL UNDER MECHANICAL AND TEMPERATURE ACTION

Banichuk N.V.[1,2], **Ivanova S.Yu.**[1]

[1]*A. Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation*

[2]*Moscow Institute of Physics and Technology, Moscow, Russian Federation*

The problems of the stability of axially moving materials and the elastic web behavior sensitivity with respect to an external loading are investigated on the basis of the classic mathematical physics and mechanics methods. It is considered the process of rectilinear motion of a simply supported elastic web modelled as a panel which moves with a constant velocity and is on the external thermomechanical actions. Small transverse elastic displacements of the panel are described by a fourth-order differential equation that includes the terms expressing the action of in-plane tension and out-of-plane centrifugal forces and the terms taking into account a thermomechanical action. Two important cases are investigated separately: the divergence of the panel loaded by in-plane thermomechanical tension and the deformation of the beam subjected to combined thermomechanical bending and tension. In both cases the considered problems have been studied analytically and the solutions have been found in an explicit form.

Keywords: mathematical modelling, axially moving panel, divergence, thermomechanical instability.