УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНОЕ РЕШЕНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ПОРОУПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ ШАГОВОЙ СХЕМЫ РАДО*

Белов А.А.[1], **Айзикович С.М.**[2]

[1]*Научно-исследовательский институт механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация*
[2]*Научно-образовательный центр «Материалы» Донского государственного технического университета, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

belov_a2@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 26.10.2015

Развита методика гранично-временных элементов, основанная на применении шагового метода численного обращения преобразования Лапласа совместно с семейством методов Рунге – Кутты. Численные решения получены на основе применения схемы Радо и сопоставлены с гранично-элементными результатами на основе схемы Эйлера. Исследования проведены с использованием модели пороупругой среды Био. Применение шаговой схемы на узлах методов Рунге – Кутты, введение переменного шага интегрирования, учет симметрии подынтегральной функции, использование параллельных вычислений позволили уменьшить время гранично-элементного расчета при сохранении высокой точности полученных результатов.

Ключевые слова: граничные интегральные уравнения, метод Рунге – Кутты, преобразование Лапласа.

Введение

Одной из ключевых сложностей построения гранично-элементной схемы в сочетании с интегральным преобразованием Лапласа [1–3] является проблема численного обращения преобразования Лапласа. В статье [4] приводится модификация метода, позволяющая учитывать специфику интегрирования сильно осциллирующих функций. Расширение подхода дают работы [5, 6], использующие схемы Рунге – Кутты для решения задачи Коши, порожденной специальной процедурой обращения преобразования Лапласа. В настоящей статье развита методика гранично-временных элементов, основанная на применении шагового метода численного обращения преобразования Лапласа совместно с семейством методов Рунге – Кутты.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант 15-38-50353).

1. Модель пороупругой среды

Краевая задача для модели Био линейной насыщенной пороупругой среды в преобразованиях Лапласа (параметр преобразования s) относительно перемещений $\overline{u}_i$ и порового давления $\overline{p}$ имеет вид [1]:

$$
\begin{gathered}
G\overline{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{G}{3}\right)\overline{u}_{j,ij} - (\alpha - \beta)\overline{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\overline{u}_i = -\overline{F}_i, \\
\frac{\beta}{s\rho_f}\overline{p}_{,ii} - \frac{\varphi^2 s}{R}\overline{p} - (\alpha - \beta)s\overline{u}_{i,i} = -\overline{a}, \quad x \in \Omega, \\
\overline{u}'(x,s) = \widetilde{u}', \quad x \in \Gamma^u, \quad \overline{u}' = (\overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{p}), \\
\overline{t}'_n(x,s) = \widetilde{t}'_n, \quad x \in \Gamma^\sigma, \quad \overline{t}' = (\overline{t}_1, \overline{t}_2, \overline{t}_3, \overline{q}),
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где Γ^u – граница Дирихле, Γ^σ – граница Неймана; G, K – константы упругости; φ – пористость; $\overline{F}_i, \overline{a}$ – объемные силы,

$$
\beta = \frac{\kappa\rho_f\varphi^2 s}{\varphi^2 + s\kappa(\rho_a + \varphi\rho_f)}, \quad \alpha = 1 - \frac{K}{K_s} \text{ и } R = \frac{\varphi^2 K_f K_s^2}{K_f(K_s - K) + \varphi K_s(K_s - K_f)}
$$

– константы, описывающие взаимодействие упругого скелета с наполнителем; κ – проницаемость; ρ, ρ_a, ρ_f – плотности материала, присоединенной массы и наполнителя соответственно; K_s, K_f – объемные модули упругости скелета и наполнителя соответственно; $\overline{t}$ – обобщенная сила, $\overline{q}$ – поток.

2. Гранично-элементная методика

Решение трехмерной краевой задачи может сводиться к решению граничного интегрального уравнения (ГИУ) вида [1, 2, 7]:

$$
\begin{gathered}
\alpha_\Omega u_k(x,s) + \int_\Gamma (\widetilde{T}_{ik}(x,y,s)u_i(y,s) - \widetilde{T}^0_{ik}(x,y,s)u_i(x,s) - \widetilde{U}_{ik}(x,y,s)t_i(y,s))d\Gamma = 0, \\
x \in \Gamma, \quad t = (t_1, t_2, t_3, q)^{\mathrm{T}}, \quad u = (u_1, u_2, u_3, p)^{\mathrm{T}},
\end{gathered}
$$

где α_Ω – обобщенный коэффициент жесткости; $\widetilde{U}(x,s)$, $\widetilde{T}(x,s)$ – фундаментальные и сингулярные решения системы (1), решение $\widetilde{T}^0(x,s)$ содержит выделенные особенности. Выделение особенностей ГИУ позволяет провести регуляризацию и построить гранично-элементную схему.

Для аппроксимации граничной поверхности используется ее разбиение на совокупность четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов, при этом треугольные элементы считаются вырожденными четырехугольными. Каждый из элементов отображается на эталонный: соответственно либо квадрат $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$, либо треугольник $0 \le \xi_1 + \xi_2 \le 1$, $\xi_1 \ge 0$, $\xi_2 \ge 0$. Узлы интерполяции неизвестных граничных функций являются подмножеством геометрических узлов наложенной гранично-элементной сетки. Локальная аппроксимация строится по согласованной интерполяционной модели Р.В. Гольдштейна [8]: обобщенные граничные перемещения аппроксимируются по билинейным граничным элементам, в то время как обобщенные усилия представляются на элементах постоянными. Для получения дискретного аналога ГИУ используется метод коллокации. В качестве узлов коллокации выбирается множество узлов аппроксимации исходных граничных функций. Интегральные коэффициенты дискретных аналогов ГИУ и гранично-временных интегральных уравнений (ГВИУ) вычисляются на основе квадратурной формулы Гаусса с использованием алгоритмов понижения порядка и устранения особенности [2].

3. Шаговая схема на узлах методов Рунге – Кутты

Для интегрального преобразования Лапласа

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) \mathrm{e}^{-st} dt$$

рассмотрена шаговая схема численного обращения на узлах метода Рунге – Кутты, представленная в виде таблицы Бутчера:

$$\frac{c \,|\, A^{\mathrm{T}}}{b^{\mathrm{T}}}, \quad A \in R^{m \times m} \quad b, c \in R^{m}.$$

Шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа близок по своей формулировке к методу квадратур сверток. Однако, в то время как метод квадратур сверток основан на теореме о свертке оригиналов, шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа основан на теореме об интегрировании оригинала. Эта теорема применяется к производной оригинала искомой функции, чтобы в результате интегрирования получить искомый оригинал:

$$f(t) = \int_0^{t} f'(\tau) d\tau.$$

Опираясь на [5], записываем систему выражений для значений оригинала функции:

$$f(0) = 0, \quad f(n\Delta t) = b^{\mathrm{T}} A^{-1} \sum_{k=1}^{n} \omega_k(\Delta t), \quad n = 1, \ldots, N.$$

Коэффициенты $\omega_k(\Delta t)$ находятся численно с помощью комбинированной формулы, учитывающей специфику интегрирования сильно осциллирующих функций [9]. Вычисления производятся с переменным шагом интегрирования по аргументу ϕ и линейной аппроксимацией интегрируемой функции:

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{2} \mathrm{e}^{-in(\phi_{k+1} - \phi_k)/2} \left[D_1(w) \bar{f}(s_k) s_k + D_2(w) \bar{f}(s_{k+1}) s_{k+1} \right],$$

$$s_k = \frac{\gamma\left(R \mathrm{e}^{i\phi_k}\right)}{\Delta t}, \quad w = -n \frac{\phi_{k+1} - \phi_k}{2},$$

$$D_{1,2}(w) = \begin{cases} \dfrac{\sin w}{w} \pm \dfrac{w \cos w - \sin w}{w^2} i & \text{при } |w| > w_*, \\ e^{\mp wi} & \text{при } |w| \le w_*. \end{cases}$$

Характеристическая функция $\gamma(z)$ имеет вид [5]:

$$\gamma(z) = A^{-1} - z A^{-1} [1] b^{\mathrm{T}} A^{-1}.$$

Описанная методика применена для решения задач о действии вертикальной силы на пороупругое призматическое тело и на пороупругое полупространство.

4. Задача о действии силы в виде функции Хевисайда на торец пороупругого призматического тела

Рассмотрена задача о действии торцевой силы на пороупругое призматическое тело с жестко закрепленным концом. Исследуются перемещения и поровое давление, вызванные силой $P = P_0 H(t)$, $P_0 = 1$ Н/м². Длина консоли $l = 3$ м. Приняты следующие параметры материала: $K = 4{,}8\cdot10^9$ Н/м², $G = 7{,}2\cdot10^9$ Н/м², $\rho = 2458$ кг/м³, $\varphi = 0{,}19$, $K_s = 3{,}6\cdot10^{10}$ Н/м², $\rho_f = 1000$ кг/м³, $K_f = 3{,}3\cdot10^9$ Н/м², $\kappa = 1{,}9\cdot10^{-10}$ м⁴/(Н·с).

Используется гранично-элементная сетка из $X = 224$ элементов и $N = 500$ (125) шагов по времени для вычисления отклика перемещения (порового давления); распределение количества узлов Ł по углу ϕ кусочно-равномерное на промежутках $[0, 1/2]$, $[1/2, \pi]$, ($[0, \pi/2]$, ($[\pi/2, \pi]$) в отношении 95% к 5%. На рис. 1, 2 представлены отклики перемещений на свободном конце и давлений на закрепленном конце, полученные с помощью шаговой схемы на основе метода Радо при разных значениях Ł, и результаты, полученные на основе шаговой схемы по методу Эйлера при Ł = 2000 [7, 10] (красная сплошная линия на рис. 1 и 2).

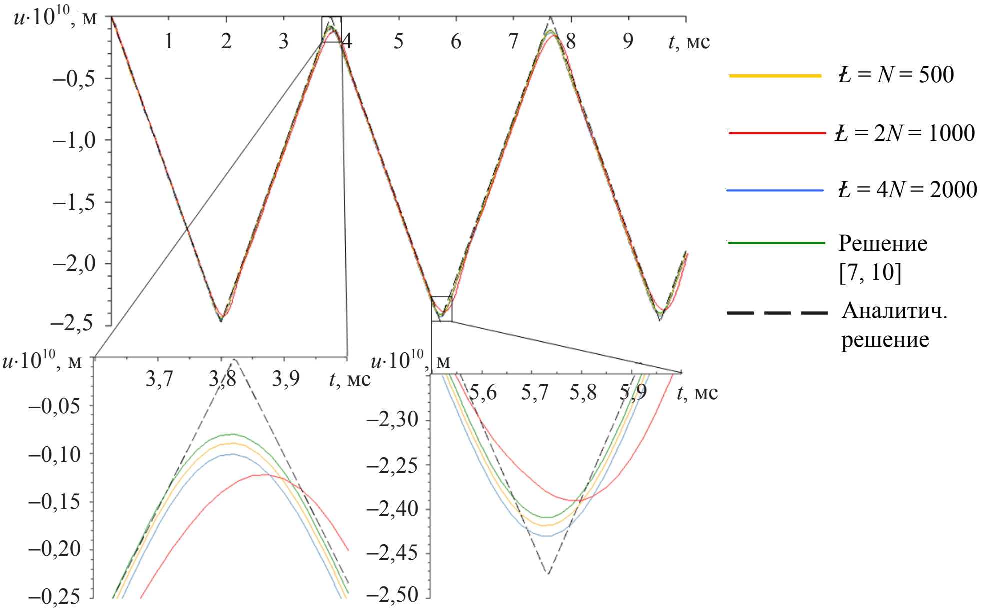

Рис. 1

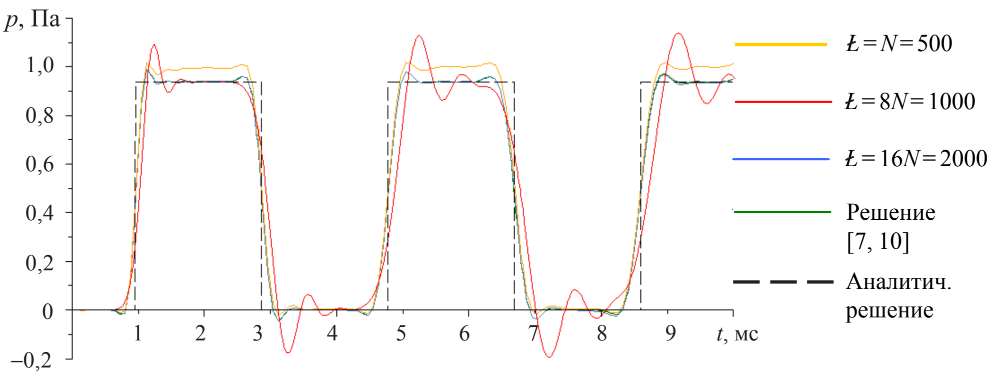

Рис. 2

Видно, что для получения приемлемого результата с помощью шагового метода на узлах схемы Радо достаточно меньшего числа и шагов по времени, и расчетных узлов по углу ϕ. Это позволяет значительно сократить вычислительные затраты, получая при этом лучшее решение.

Необходимо отметить, что шаговая по времени гранично-элементная схема с численным обращением преобразования Лапласа методом на основе схемы Радо чувствительнее к погрешностям вычислений $\tilde{f}(s)$ схемы, основанной на методе Эйлера.

5. Задача о пороупругом полупространстве

Рассматривается задача о действии вертикальной силы $t_3 = t^0 f(t)$, $t^0 = -1000$ Н/м^2 на элемент поверхности однородного пороупругого полупространства площадью 1 м^2. В качестве закона изменения нагрузки на участке взята функция Хевисайда $f(t) = \mathrm{H}(t)$. Дневная поверхность полупространства свободна и проницаема, на поверхности поровое давление $p = 0$. Приняты следующие параметры материала (скальная порода [1]): $K = 8 \cdot 10^9$ Н/м^2, $G = 6 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\rho = 2458$ кг/м^3, $\varphi = 0{,}19$, $K_s = 3{,}6 \cdot 10^{10}$ Н/м^2, $\rho_f = 1000$ кг/м^3, $K_f = 3{,}3 \cdot 10^9$ Н/м^2, $\kappa = 1{,}9 \cdot 10^{-10}$ м^4/(Н·с).

Задача решалась методом гранично-временных элементов с применением шаговой схемы на узлах метода Радо (Radau IIA) [5]. На рис. 3 и 4 продемонстрированы отклики горизонтальных и вертикальных перемещений в точке на расстоянии 15 м от центра нагруженного участка, рассчитанные с использованием гранично-элементной сетки из 1680 элементов (сетка 1). В качестве параметров шаговой схемы принято: $R = 0{,}997$, число шагов по времени: $N = 250$ и различное число узлов интегрирования Ł по аргументу ϕ (с учетом двукратности для схемы Радо). Для сравнения приведены результаты на сетке из 1980 элементов (сетка 2) и решение из [10].

Были проведены исследования откликов перемещений, полученных на сетке 2 при различных N и Ł. Результаты сопоставлены с решением из [10] на сетке из 2160 элементов. Исследование подтвердило результаты, полученные в [10]. Однако для вычисления отклика перемещений с использованием шаговой по времени схемы на узлах метода Радо достаточно 250 узлов по времени и 250 двукратных узлов по аргументу ϕ.

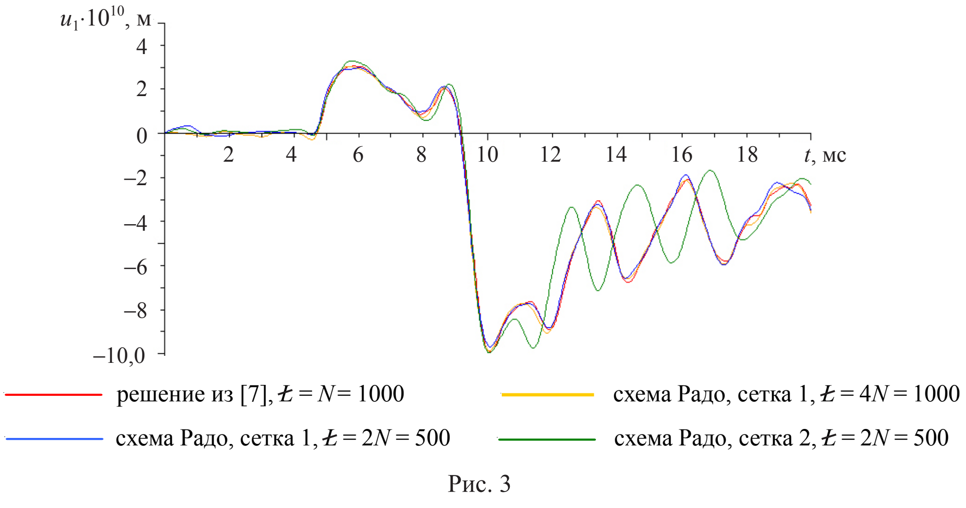

Рис. 3

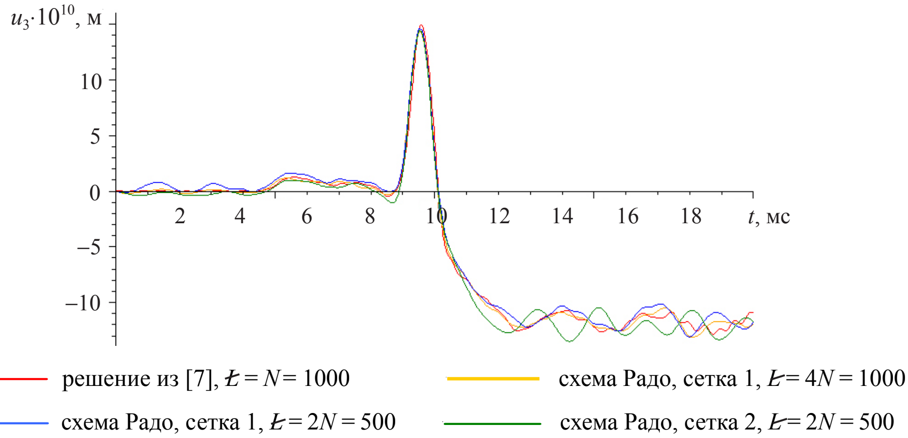

Рис. 4

На рис. 5 и 6 показана зависимость отклика перемещений от удаленности точки снятия наблюдений от центра приложения нагрузки: $l = 8$; 11,7; 15; 18,47 и 23 м.

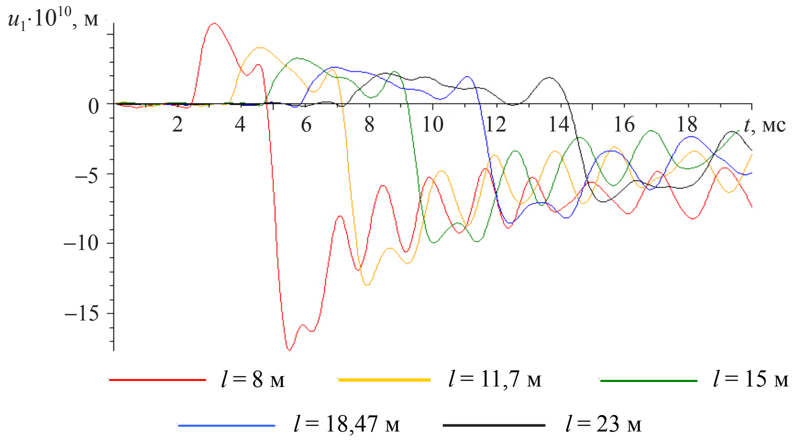

Рис. 5

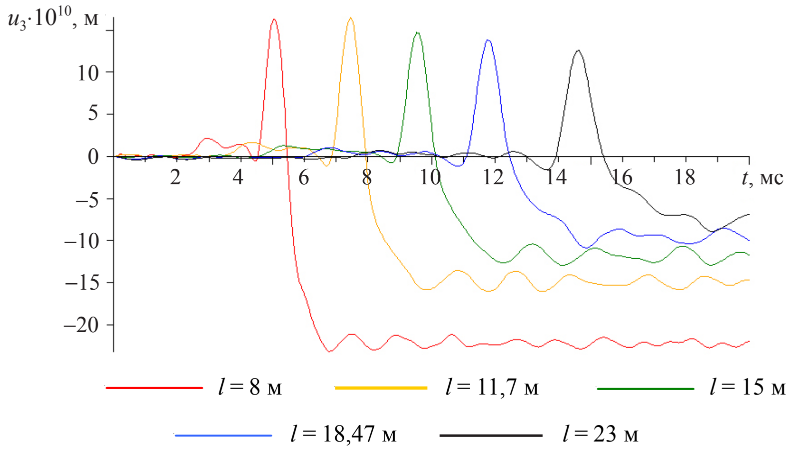

Рис. 6

Видно, что время прихода волны прямо пропорционально расстоянию от наблюдаемой точки до точки приложения силы, а амплитуда волны обратно пропорциональна этому расстоянию. Компоненты отклика перемещений в разных точках проявляют один и тот же характер изменения во времени.

6. Задача о действии вертикальной силы на поверхность ` пороупругого полупространства, ослабленного полостью

Рассмотрим задачу о действии вертикальной силы на поверхность пороупругого полупространства, ослабленного под площадкой приложения силы полостью. Рассматриваются два варианта полости – сферическая и кубическая. В качестве действующей силы принята вертикальная сила $P(t) = P_0 H(t)$, $P_0 = 1000$ Н/м^2 на площади $S = 1$ м^2 дневной поверхности полупространства. Граница полупространства полагается непроницаемой ($q = 0$). Внутри полупространства расположена сферическая или кубическая полость с диаметром (стороной) 10 м (рис. 7), причем центр полости находится на глубине $h = 7{,}5$ м. Исследуются перемещения и поровое давление на поверхности полупространства на расстоянии 15 м от области действия силы.

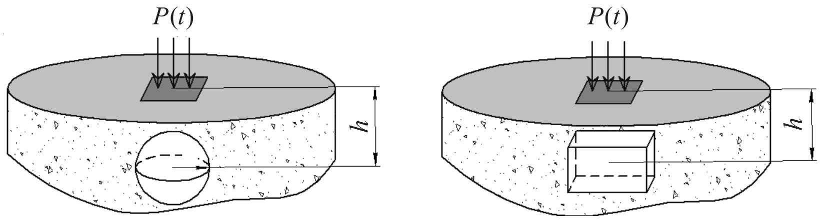

Рис. 7

В качестве пороупругого материала взята скальная порода с такими же параметрами, как в п. 5. Гранично-элементные сетки строятся с учетом двух плоскостей симметрии. Четверть сетки содержит для полупространства 420 элементов и 465 узлов, для полости – 324 элементов и 355 узлов. Для расчетов взято $N = 250$ узлов по времени и $L = 500$ двукратных узлов по аргументу ϕ на промежутке $[0, \pi]$.

На рис. 8–10 представлены графики влияния формы полости на отклики перемещений и порового давления на расстоянии $l = 15$ м от области действия силы в виде функции Хевисайда.

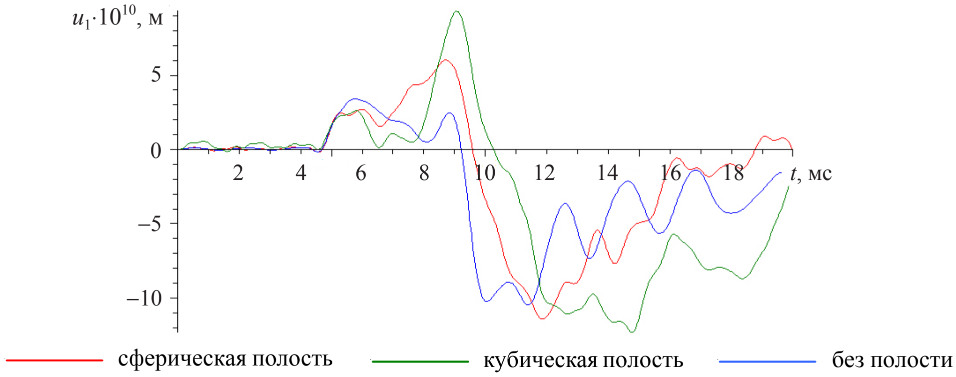

Рис. 8

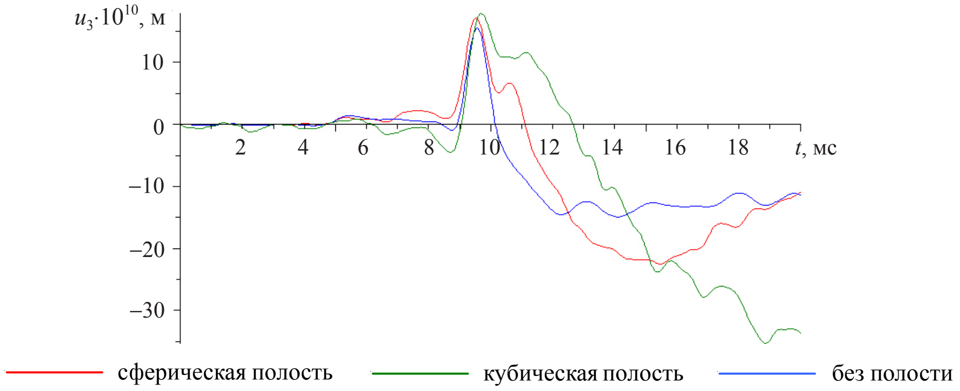

Рис. 9

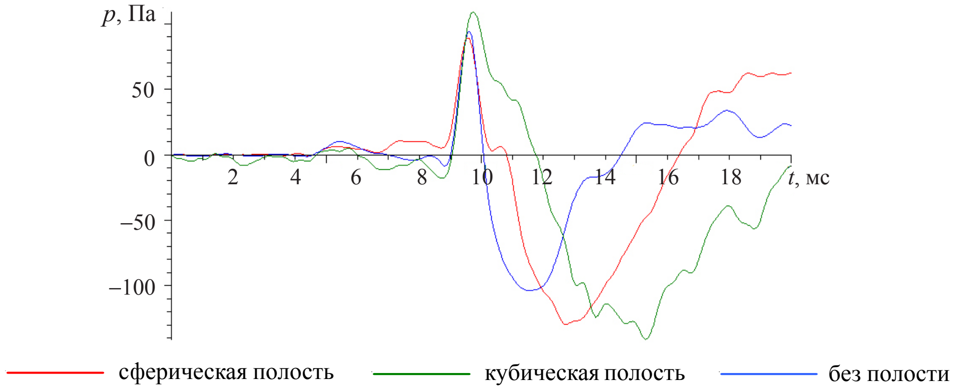

Рис. 10

На рис. 11–13 приведены зависимости откликов перемещений и порового давления от удаления от источника нагрузки на 15; 19,4; 22,18 и 25,4 м для полупространства со сферической полостью.

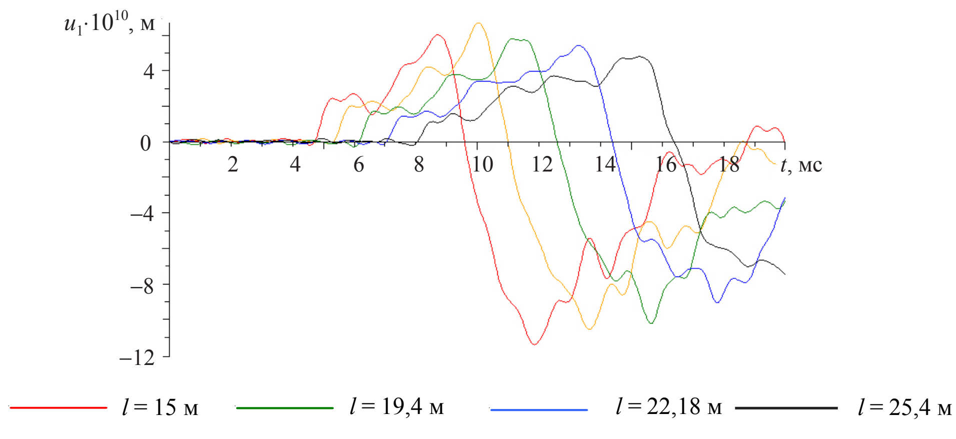

Рис. 11

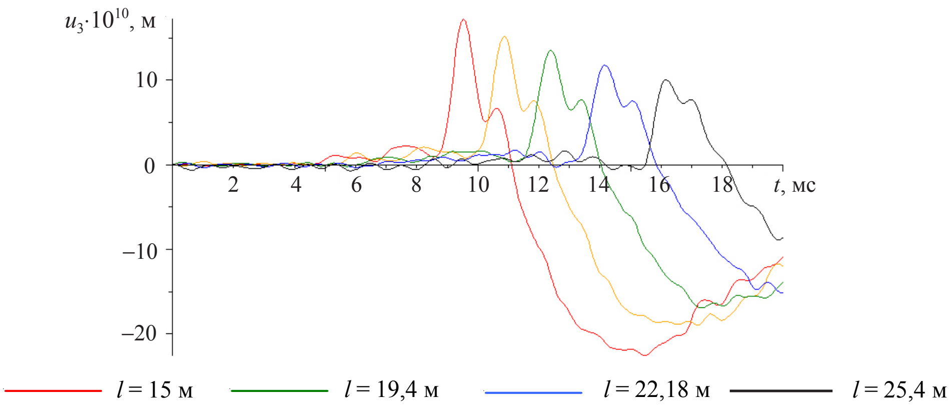

Рис. 12

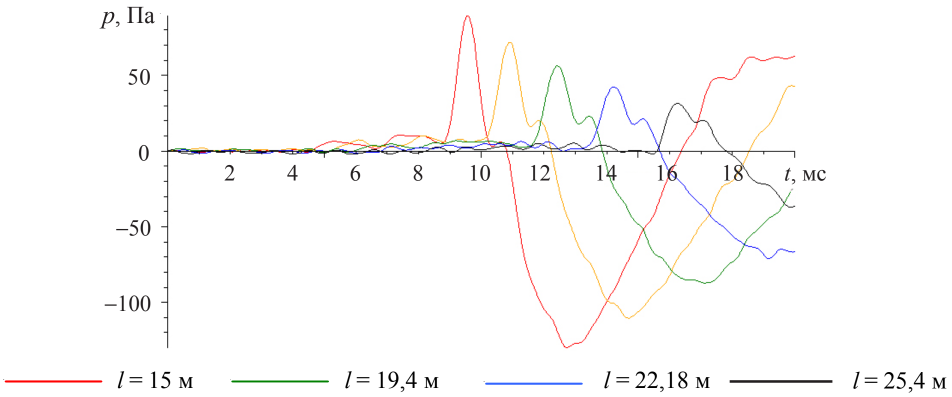

Рис. 13

Заключение

Представлена постановка начально-краевой задачи пороупругости, построена шаговая схема численного обращения преобразования Лапласа на узлах методов Рунге – Кутты. Численные решения получены на основе применения схемы Радо и сопоставлены с гранично-элементными результатами, полученными на основе схемы Эйлера, и с аналитическими решениями. Разработано программное обеспечение, проведена его верификация на основе известных аналитических решений. Программное обеспечение оптимизировано и встроено в существующий пакет гранично-элементного моделирования пороупругих сред и материалов. Решен ряд модельных и прикладных задач, проведено сравнение с существующими в научной литературе решениями. Проведен анализ возникающей волновой картины. Использование шаговой схемы на узлах методов Рунге – Кутты, введение переменного шага интегрирования и учета симметрии подынтегральной функции, использование параллельных вычислений позволили повысить точность и скорость вычислений.

Список литературы

1. Schanz M. *Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua*. Berlin: Springer, 2001. 170 p.

2. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. *Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями*. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

3. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. *Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела.* Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1986. 295 с.

4. Белов А.А., Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю. Гранично-элементная методика на основе модифицированного метода квадратур сверток в динамических задачах упругих тел. *Проблемы прочности и пластичности.* 2008. Вып. 70. С. 150–158.

5. Banjai L. Multistep and multistage convolution quadrature for the wave equation: Algorithms and experiments. *SIAM J. Sci. Comput.* 2010. **32**. P. 2964–2994.

6. Banjai L., Messner M., Schanz M. Runge – Kutta convolution quadrature for the boundary element method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 2012. Vol. 245–246. P. 90–101.

7. Аменицкий А.В., Белов А.А., Игумнов Л.А., Карелин И.С. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости. *Проблемы прочности и пластичности.* 2009. Вып. 71. С. 164–171.

8. Гольдштейн Р.В. К вопросу о применении метода граничных интегральных уравнений для решения задач механики сплошных сред. Метод граничных интегральных уравнений: Вычислительные аспекты и приложения в механике. *Механика: новое в зарубежной науке:* Сб. ст. М.: Мир, 1978. С. 183–209.

9. Баженов В.Г., Белов А.А., Игумнов Л.А. *Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций*. Н. Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2009. 180 с.

10. Петров А.Н. *Моделирование динамики составных пороупругих тел на основе метода гранично-временных элементов*: Дис… канд. физ.-мат. наук. Н.Новгород, 2013. 135 с.

References

1. Schanz M. *Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua*. Berlin: Springer, 2001. 170 p.

2. Bazhenov V.G., Igumnov L.A. *Metody granichnykh integral'nykh uravneniy i granichnykh elementov v reshenii zadach trekhmernoy dinamicheskoy teorii uprugosti s sopryazhennymi polyami.* M.: Fizmatlit, 2008. 352 s.

3. Ugodchikov A.G., Khutoryanskiy N.M. *Metod granichnykh elementov v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela.* Kazan': Izd-vo Kazanskogo un-ta, 1986. 295 s.

4. Belov A.A., Igumnov L.A., Litvinchuk S.Yu. Granichno-elementnaya metodika na osnove modifitsirovannogo metoda kvadratur svertok v dinamicheskikh zadachakh uprugikh tel. *Problemy prochnosti i plastichnosti.* 2008. Vyp. 70. С. 150–158.

5. Banjai L. Multistep and multistage convolution quadrature for the wave equation: Algorithms and experiments. *SIAM J. Sci. Comput.* 2010. **32**. P. 2964–2994.

6. Banjai L., Messner M., Schanz M. Runge – Kutta convolution quadrature for the boundary element method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 2012. Vol. 245–246. P. 90–101.

7. Amenitskiy A.V., Belov A.A., Igumnov L.A., Karelin I.S. Granichnye integral'nye uravneniya dlya resheniya dinamicheskikh zadach trekhmernoy teorii porouprugosti. *Problemy prochnosti i plastichnosti.* 2009. Vyp. 71. S. 164–171.

8. Golshteyn R.V. K voprosu o primenenii metoda granichnykh integral'nykh uravneniy dlya resheniya zadach mekhaniki sploshnykh sred. Metod granichnykh integral'nykh uravneniy: Vychislitel'nye aspekty i prilozheniya v mekhanike. *Mekhanika: novoe v zarubezhnoy nauke:* Sb. st. M.: Mir, 1978. S. 183–209.

9. Bazhenov V.G., Belov A.A., Igumnov L.A. *Granichno-elementnoe modelirovanie dinamiki kusochno-odnorodnykh sred i konstruktsiy.* N. Novgorod: Izd-vo Nizhegorodskogo gosuniversiteta, 2009. 180 s.

10. Petrov A.N. *Modelirovanie dinamiki sostavnykh porouprugikh tel na osnove metoda granichno-vremennykh elementov*: Dis… kand. fiz.-mat. nauk. N.Novgorod, 2013. 135 s.

BOUNRY-ELEMENT ANALYSIS OF 3D BOUNDARY-VALUE PROBLEMS OF POROELASTICITY BASED ON RADAU STEPPED SCHEME

Belov A.A.[1], Ayzikovich S.M.[2]

[1]*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation*
[2]*Scientific-Educational Center "Materials" Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

A time boundary-element methodology is developed, based on using the stepped method of numerical inversion of Laplace transform in combination with a family of Runge – Kutta methods. The numerical solutions obtained using Radau scheme are compared with the results of boundary-element analysis based on Euler scheme. The investigation is done using Biot's model of a poroelastic medium. Use of the stepped scheme on the nodes of Runge – Kutta methods, introduction of a variable integration step, account for the symmetry of the integrand function, and use of simultaneous computations made it possible to reduce the time of boundary-element analysis, retaining the high accuracy of the results obtained.

Keywords: boundary integral equations, Runge – Kutta method, Laplace transform.