

УДК 539.3

## ТЕРМОУПРУГОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СКОЛЬЖЕНИЯ ЖЕСТКОГО ТЕЛА ПО ПОКРЫТИЮ НА УПРУГОЙ ПОДЛОЖКЕ\*

© 2016 г. Митрин Б.И.<sup>1</sup>, Зеленцов В.Б.<sup>1</sup>, Игумнов Л.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Донской государственной технической университет,  
Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

<sup>2</sup>*Научно-исследовательский институт механики  
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,  
Нижний Новгород, Российская Федерация*

boris.mitrin@gmail.com

*Поступила в редакцию 14.12.2015*

Напряженно-деформированное состояние покрытия на упругой подложке при скользящем фрикционном контакте исследуется в рамках решения динамической контактной задачи линейной термоупругости. Определяются условия устойчивости решения задачи, величины контактных напряжений и температуры в зависимости от соотношения упругих и термомеханических свойств материалов покрытия и подложки. Получено решение задачи о скользящем термофрикционном контакте жесткой полуплоскости с покрытием на упругой полуплоскости в виде контурных квадратур интегрального преобразования Лапласа. Выражения для вычисления температуры, смещений, напряжений в покрытии получены в виде рядов по собственным функциям начально-краевой задачи. На основе полученных теоретических и численных результатов возможен анализ условий возникновения термоупругодинамической неустойчивости в узлах трения скольжения, в которых используются покрытия различного назначения.

*Ключевые слова:* термоупругая неустойчивость, скольжение, динамическая контактная задача, покрытие, преобразование Лапласа.

### **Введение**

В настоящее время широко распространены покрытия различного назначения (антифрикционные, противоизносные и др.) на контактирующих поверхностях, свойства которых могут существенно отличаться от свойств подложки. Характеристики системы покрытие–подложка при контактном взаимодействии и влияние различия их свойств активно исследуются в рамках теории упругости, термоупругости, вязкоупругости [1–3].

При функционировании триботехнических систем возникают неустойчивые режимы работы, сопровождающиеся интенсивным фрикционным разогревом. Для определения условий возникновения неустойчивости, порождаемой термоупругой

---

\* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-38-50405-мол\_нр).

деформацией контактирующих тел, исследуют устойчивость решений задач термоупругости [4–9]. В работах [10–13] было показано, что область неустойчивых решений динамических термоупругих задач о скользящем контакте для тел с покрытием отличается от таковой в квазистатических задачах и охватывает более широкий диапазон значений параметров задач. Это означает, что анализ решений задач термоупругости в динамической постановке позволяет выявить новые неустойчивые режимы работы узла трения.

Основным методом для решения задач о неустойчивости скользящего фрикционного контакта в настоящее время остается метод малых возмущений [14], а для нахождения решения задачи применяются численные методы, например метод конечных элементов [15, 16]. В статье [13] было предложено использовать метод преобразования Лапласа для получения решения термоупругодинамической контактной задачи о скольжении жесткого тела по упругому покрытию на жестком основании, а сравнение с решением соответствующей квазистатической задачи осуществлено в [17, 18].

Здесь подход [13] использован для решения и анализа устойчивости динамической задачи термоупругости о скольжении жесткого тела по поверхности упругого покрытия, сцепленного с упругой полуплоскостью.

Целью работы является исследование устойчивости решения и анализ влияния упругих свойств подложки на параметрическую границу устойчивости и на величину контактных напряжений и температуры.

### Постановка задачи

Рассматривается динамическая задача термоупругости в рамках плоской деформации о скольжении с постоянной скоростью  $V$  жесткой полуплоскости I ( $h \leq x < \infty$ ) по поверхности ( $x = h$ ) упругого покрытия ( $0 \leq x \leq h$ ), нижняя грань которого ( $x = 0$ ) сцеплена с подложкой (упругой полуплоскостью II ( $-\infty < x \leq 0$ )) из другого материала (рис. 1).

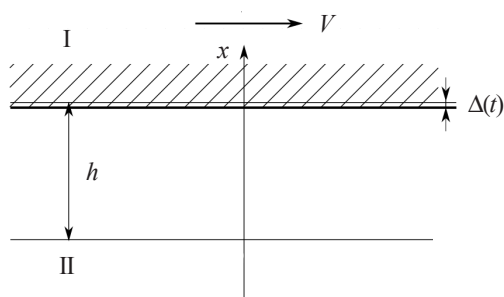


Рис. 1. К постановке динамической контактной задачи термоупругости

Скольжение недеформируемой полуплоскости I по поверхности упругого покрытия происходит с учетом кулоновского трения, но без учета износа покрытия. В начальный период времени полуплоскость I деформирует упругое покрытие, смещаясь вдоль вертикальной оси по закону  $\Delta(t)$ . Предполагается, что в начальный момент температура покрытия нулевая. Движущаяся полуплоскость I теплоизолирована, а поток тепла, образующийся за счет трения, направлен в упругое покрытие. Кроме того, на границе покрытия и полуплоскости II выполняются условия

идеального теплового контакта. Начальная температура полуплоскости II, как и покрытия, равна нулю. В начальный момент покрытие и полуплоскость II находятся в покое. В полуплоскости II при  $x \rightarrow -\infty$  смещения  $u_1(x, t)$  и напряжения стремятся к нулю.

Поставленная задача сводится к решению дифференциальных уравнений термоупругости совместно с уравнением теплопроводности:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \alpha \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

$$(0 < x < h, \quad t > 0),$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = \frac{1+\nu_1}{1-\nu_1} \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa_1} \frac{\partial T_1}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

$$(-\infty < x < 0, \quad t > 0),$$

$$a = \sqrt{\frac{2\mu(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}, \quad a_1 = \sqrt{\frac{2\mu_1(1-\nu_1)}{\rho_1(1-2\nu_1)}}, \quad (5)$$

где  $t$  – время;  $\mu, \mu_1$  – модули сдвига;  $\rho, \rho_1$  – плотности;  $\nu, \nu_1$  – коэффициенты Пуассона;  $\alpha, \alpha_1$  – коэффициенты линейного теплового расширения;  $\kappa, \kappa_1$  – коэффициенты температуропроводности материала,  $a, a_1$  – скорости продольных упругих волн;  $u(x, t), u_1(x, t), T(x, t), T_1(x, t)$  – функции распределения смещений и температуры по глубине покрытия и подложки. Параметр без индекса относится к покрытию, с индексом 1 – к подложке.

Дифференциальные уравнения (1)–(4) решаются совместно с граничными условиями, описывающими характер контакта на поверхности покрытия:

$$u(h, t) = -\Delta(t), \quad K \frac{\partial T(h, t)}{\partial x} = -fV\sigma(h, t), \quad t > 0, \quad (6)$$

где  $\Delta(t)$  – закон внедрения,  $K$  – коэффициент теплопроводности материала упругого покрытия,  $f$  – коэффициент трения,  $\sigma(x, t)$  – напряжения в покрытии.

На нижней поверхности покрытия выполняются условия сцепления покрытия с упругой полуплоскостью II:

$$u(0, t) = u_1(0, t), \quad \sigma(0, t) = \sigma_1(0, t), \quad t > 0, \quad (7)$$

$$T(0, t) = T_1(0, t), \quad K \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} = K_1 \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial x}, \quad t > 0, \quad (8)$$

где  $K_1$  – коэффициент теплопроводности материала полуплоскости II.

В упругой полуплоскости II при  $x \rightarrow -\infty$  смещения  $u_1(x, t)$ , напряжения  $\sigma_1(x, t)$ , температура  $T_1(x, t)$  стремятся к нулю, то есть выполняются условия

$$u_1(-\infty, t) = 0, \quad \sigma_1(-\infty, t) = 0, \quad T_1(-\infty, t) = 0, \quad t > 0. \quad (9)$$

Связь между напряжениями, смещениями и температурой определяется соотношениями Дюамеля – Неймана [19]:

$$\sigma(x, t) = \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha T(x, t), \quad (10)$$

$$\sigma_1(x, t) = \frac{2\mu_1(1-\nu_1)}{1-2\nu_1} \frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{2\mu_1(1+\nu_1)}{1-2\nu_1} \alpha_1 T_1(x, t). \quad (11)$$

Начальные условия задачи нулевые:

$$u(x, 0) = u_1(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad T(x, 0) = T_1(x, 0) = 0, \quad \Delta(0) = 0. \quad (12)$$

Закон внедрения верхней полуплоскости в материал покрытия  $\Delta(t)$  примем в виде

$$\Delta(t) = \Delta_0 [(-1 + e^{\varepsilon t})H(t)H(t_\varepsilon - t) + H(t - t_\varepsilon)], \quad \varepsilon > 0, \quad t_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \ln 2, \quad 0 < \Delta_0 < h, \quad (13)$$

где  $\Delta_0$  – глубина максимального внедрения жесткой полуплоскости I в упругое покрытие,  $H$  – функция Хэвисайда.

Таким образом, решение динамической задачи термоупругости о скользящем термофрикционном контакте сводится к совместному решению дифференциальных уравнений термоупругости (1), (3) и теплопроводности (2), (4) с граничными условиями (6)–(8), начальными условиями (12) и условиями на бесконечности (9).

### Решение задачи в контурных квадратурах

Применив преобразование Лапласа к дифференциальным уравнениям (1)–(4), (10), (11), граничным условиям (6)–(8), начальным условиям (12), закону внедрения (13), получим систему линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Решив систему относительно изображений и применив к ним обратное преобразование Лапласа, получим решение в виде контурных квадратур:

– для температуры

$$T(x, t) = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\gamma \hat{V}}{\alpha h} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(z) N_T(x, z) R^{-1}(z) e^{z\tilde{t}} dz, \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq h, \quad (14)$$

$$N_T(x, z) =$$

$$= \sqrt{z} \omega(z) \omega_1(z) (a_* \operatorname{ch} \gamma z + \mu_* \operatorname{sh} \gamma z) (\sqrt{\kappa_*} \operatorname{sh}(\sqrt{z} x h^{-1}) + K_* \operatorname{ch}(\sqrt{z} x h^{-1})), \quad (15)$$

$$R(z) = (a_* \operatorname{sh} \gamma z + \mu_* \operatorname{ch} \gamma z) \omega_1(z) \Omega_1(z) - \gamma \hat{V} \Omega_2(z), \quad (16)$$

$$\Omega_1(z) = \omega(z) (K_* \operatorname{sh} \sqrt{z} + \sqrt{\kappa_*} \operatorname{ch} \sqrt{z}) + \gamma^2 \hat{V} \sqrt{z} (K_* \operatorname{ch} \sqrt{z} + \sqrt{\kappa_*} \operatorname{sh} \sqrt{z}),$$

$$\Omega_2(z) = \frac{a_* K_*}{v_* \alpha_* \sqrt{\kappa_*}} \omega(z) \omega_1^-(z) + \omega_1(z) (K_* \gamma \mu_* \sqrt{z} + (K_* \operatorname{sh} \sqrt{z} + \sqrt{\kappa_*} \operatorname{ch} \sqrt{z}) \times$$

$$\times (a_* \operatorname{ch} \gamma z + \mu_* \operatorname{sh} \gamma z) - \sqrt{\kappa_*} a_*),$$

$$\omega(z) = 1 - \gamma^2 z, \quad \omega_1(z) = 1 - \gamma_1^2 \kappa_* z,$$

$$a_* = \frac{a}{a_1}, \quad \alpha_* = \frac{\alpha}{\alpha_1}, \quad \kappa_* = \frac{\kappa}{\kappa_1}, \quad \gamma = \frac{\kappa}{ah}, \quad \gamma_1 = \frac{\kappa_1}{a_1 h}, \quad \hat{V} = \frac{fV\alpha}{K} \frac{2\mu(1+\nu)h}{1-2\nu},$$

$$\mu_* = \frac{\mu(1-\nu)/(1-2\nu)}{\mu_1(1-\nu_1)/(1-2\nu_1)}, \quad \nu_* = \frac{(1+\nu)/(1-\nu)}{(1+\nu_1)/(1-\nu_1)},$$

$$K_* = \frac{K}{K_1}, \quad t_\kappa = \frac{h^2}{\kappa}, \quad \tilde{t} = \frac{t}{t_\kappa};$$

– для смещений

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(z) N_u(x, z) R^{-1}(z) e^{z\tilde{t}} dz, \quad t > 0, \quad 0 \leq x \leq h, \quad (17)$$

$$N_u(x, z) = \omega_1^-(z) \sum_{k=1}^3 G_k(x, z), \quad (18)$$

$$G_1(x, z) = -\gamma \hat{V} (a_* \operatorname{ch} \gamma z + \mu_* \operatorname{sh} \gamma z) (\sqrt{\kappa_*} \operatorname{ch}(\sqrt{z} x h^{-1}) + K_* \operatorname{sh}(\sqrt{z} x h^{-1})) \omega_1^+(z),$$

$$G_2(x, z) = (a_* \operatorname{sh}(\gamma z x h^{-1}) + \mu_* \operatorname{ch}(\gamma z x h^{-1})) [\omega(z) (\sqrt{\kappa_*} \operatorname{ch} \sqrt{z} + K_* \operatorname{sh} \sqrt{z}) + \\ + \gamma^2 \hat{V} \sqrt{z} (\sqrt{\kappa_*} \operatorname{sh} \sqrt{z} + K_* \operatorname{ch} \sqrt{z})] \omega_1^+(z),$$

$$G_3(x, z) = -\gamma \hat{V} \left[ \frac{a_* K_*}{\nu_* \alpha_* \sqrt{\kappa_*}} \omega(z) + \omega_1^+(z) (\gamma \mu_* K_* \sqrt{z} - \sqrt{\kappa_*} a_*) \right] \operatorname{ch}(\gamma z (h-x) h^{-1});$$

– для напряжений

$$\sigma(x, t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \left[ \Sigma(x, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(z) \frac{N_\sigma(x, z)}{R_\sigma(z)} e^{z\tilde{t}} dz \right], \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad (19)$$

$$\Sigma(x, t) = t_a \sum_{n=1}^{[at/2h]} q^n \frac{\Delta(\omega_n^-(x, t)) + q \Delta(\omega_n^+(x, t))}{\Delta_0}, \quad \omega_n^\pm(x, t) = a^{-1} [at - (2n-1)h \pm x], \quad (20)$$

$$N_\sigma(x, z) = \gamma z \left[ N_\sigma^0(x, z) \left( \operatorname{sh} \gamma z + \frac{\mu_*}{a_*} \operatorname{ch} \gamma z \right) - R(z) \left( \operatorname{ch}(\gamma z x h^{-1}) + \frac{\mu_*}{a_*} \operatorname{sh}(\gamma z x h^{-1}) \right) \right], \quad (21)$$

$$R_\sigma(z) = \left( \operatorname{sh} \gamma z + \frac{\mu_*}{a_*} \operatorname{ch} \gamma z \right) R(z), \quad q = \frac{1 - \mu_*/a_*}{1 + \mu_*/a_*}, \quad (22)$$

$$N_\sigma^0(x, z) = \omega_1(z) \sum_{k=7}^8 G_k(x, z) + \omega_1^-(z) G_9(x, z), \quad (23)$$

$$G_7(x, z) = -\gamma^2 \hat{V} \sqrt{z} (a_* \operatorname{ch} \gamma z + \mu_* \operatorname{sh} \gamma z) (\sqrt{\kappa_*} \operatorname{sh}(\sqrt{z} x h^{-1}) + K_* \operatorname{ch}(\sqrt{z} x h^{-1})),$$

$$G_8(x, z) = (a_* \operatorname{ch}(\gamma z x h^{-1}) + \mu_* \operatorname{sh}(\gamma z x h^{-1})) (\omega(z) (\sqrt{\kappa_*} \operatorname{ch} \sqrt{z} + K_* \operatorname{sh} \sqrt{z}) + \\ + \gamma^2 \hat{V} \sqrt{z} (\sqrt{\kappa_*} \operatorname{sh} \sqrt{z} + K_* \operatorname{ch} \sqrt{z})),$$

$$G_9(x, z) = \gamma \hat{V} \left[ \frac{a_* K_*}{\nu_* \alpha_* \sqrt{\kappa_*}} \omega(z) + (\gamma \mu_* K_* \sqrt{z} - \sqrt{\kappa_*} a_*) \omega_1^+(z) \right] \operatorname{sh}(\gamma z (h-x) h^{-1}),$$

где  $\Gamma = \{z: -i\infty + dt_k, i\infty + dt_k\}$  – контур интегрирования в комплексной плоскости  $z$ , который представляет собой прямую линию, параллельную мнимой оси и отнесенную от нее вправо на величину  $dt_k$ , в которой  $d$  подбирается таким образом, чтобы все полюсы подынтегральных функций в (14), (17), (19) были левее  $dt_k$ , а  $D(z)$  определяется через трансформанту Лапласа закона внедрения (13) и имеет вид:

$$D(z) = \Delta_0 \left[ \frac{2e^{-zt_{\text{ЭК}}} - 1}{z} + \frac{1 - e^{-(z - \varepsilon t_{\text{К}})t_{\text{ЭК}}}}{z - \varepsilon t_{\text{К}}} \right], \quad \operatorname{Re} z > \varepsilon t_{\text{К}}, \quad t_{\text{ЭК}} = \frac{t_{\varepsilon}}{t_{\text{К}}}.$$

### Исследование полюсов подынтегральных функций квадратур решения

Подынтегральные функции полученных квадратур (14), (17), (19) удовлетворяют лемме Жордана–Гаусса [20], так как имеют алгебраическое убывание на бесконечности. Кроме того, подынтегральные функции в (14), (17), (19) являются многозначными с точкой ветвления алгебраического типа  $z = 0$ . Для получения области однозначного представления подынтегральных функций в комплексной плоскости переменной интегрирования  $z = \xi + i\eta$  проводится разрез от точки  $z = 0$  до точки  $z = -\infty$  вдоль отрицательной части действительной оси. Для вычисления квадратур методами теории функций комплексного переменного необходимо изучение других изолированных особых точек в комплексной плоскости интегрирования. Они находятся из трансцендентного уравнения

$$R(z) = 0, \quad (24)$$

где  $R(z)$  определяется формулой (16). При нахождении нулей  $R(z)$  численными методами в комплексной плоскости необходимо хорошее нулевое приближение. Анализ уравнения (24) проводится относительно содержащихся в  $R(z)$  основных безразмерных параметров  $\gamma$  и  $\hat{V}$ . При произвольном  $\gamma$ , положив в (24)  $\hat{V} = 0$ , получим упрощенное уравнение:

$$\omega(z)\omega_1(z)\Omega_0^s(z)\Omega_1^c(z) = 0, \quad (25)$$

где

$$\Omega_0^s(z) = a_* \operatorname{sh} \gamma z + \mu_* \operatorname{ch} \gamma z, \quad \Omega_1^c(z) = \sqrt{\kappa_*} \operatorname{ch} \sqrt{z} + K_* \operatorname{sh} \sqrt{z}.$$

Нулями  $\omega(z)$  и  $\omega_1(z)$  в (25), а значит и в (24), при  $\hat{V} = 0$  являются  $z = \gamma^2$  и  $z = \gamma_1^{-2} \kappa_*^{-1}$  соответственно, которые, однако, не являются полюсами подынтегральных функций, так как оказываются нулями числителя – функций  $N(x, z)$  (15), (18), (21).

Комплексные корни уравнения  $\Omega_0^s(z) = 0$  определяются формулой

$$z_{0n}^{\pm} = \frac{1}{2\gamma} \ln |q| \pm i \begin{cases} \pi n / \gamma, & q > 0, \\ \pi(n + 1/2) / \gamma, & q < 0, \end{cases} \quad q = \frac{1 - \mu_* / a_*}{1 + \mu_* / a_*}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (26)$$

и так как  $0 < |q| < 1$ , то  $z_{0n}^{\pm}$  располагаются в комплексной плоскости слева от мнимой оси, при  $q = 1$  – на мнимой оси.

При решении уравнения  $\Omega_1^c(z) = 0$  в комплексной плоскости  $z$  с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси  $\arg(z)$  на верхнем листе римановой поверхности изменяется от  $-\pi$  до  $\pi$ :  $-\pi < \arg(z) < \pi$ . На промежуточном этапе решения получается равенство

$$\sqrt{z_k} = \frac{1}{2} \ln|\lambda| + i\pi \begin{cases} k, & \lambda > 0, \\ k+1/2, & \lambda < 0, \end{cases}$$

$$\lambda = \frac{1 - \sqrt{\kappa_* / K_*}}{1 + \sqrt{\kappa_* / K_*}}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (27)$$

Из (27) следует, что  $\operatorname{Re}(\sqrt{z}) = (1/2) \ln|\lambda|$  не может быть больше нуля, поэтому  $\operatorname{Re}(\sqrt{z}) < 0$  и  $\sqrt{z}$  находится во втором ( $\pi/2 < \arg(\sqrt{z}) \leq \pi$ ) или в третьем квадранте ( $-\pi < \arg(\sqrt{z}) < -\pi/2$ ). При возведении в квадрат  $\sqrt{z}$  его  $\arg(z)$  увеличивается в 2 раза, в результате чего  $z$  попадает на другой лист римановой поверхности с  $\pi < \arg(z) < 2\pi$  или с  $-2\pi < \arg(z) < -\pi$ . Ветвь  $\sqrt{z}$  выбирается на верхнем листе выполнением равенства  $\sqrt{1} = 1$ . Отсюда следует, что уравнение  $\Omega_1^c(z) = 0$  на верхнем листе римановой поверхности корней не имеет.

Таким образом,  $z_{0n}^\pm$  являются нулевыми приближениями для определения множества нулей  $z_n^\pm(\hat{V})$ ,  $\hat{V} \in [0, \infty)$ , при фиксированных значениях  $\gamma$  из численного решения уравнения (24). При  $\hat{V} > 0$  на верхнем листе римановой поверхности присутствуют также множества нулей  ${}_m \zeta_k^\pm(\hat{V})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\hat{V} \in [\hat{V}_k^+, \hat{V}_k^-]$ , где  $\hat{V}_k^+$ ,  $\hat{V}_k^-$  – значения  $\hat{V}$ , при которых  ${}_m \zeta_k^\pm(\hat{V})$  выходят с нижнего листа римановой поверхности на верхний лист (+) и обратно (–) при фиксированных остальных параметрах.

Из физического смысла величин  $\kappa$ ,  $a$ ,  $h$  следует, что параметр  $\gamma = \kappa(ah)^{-1}$  может принимать только положительные действительные значения. Отношение  $\kappa/a$  имеет размерность длины и для большинства материалов составляет 1–30 нм. Поэтому практический интерес представляют значения  $\gamma < 1$ .

Расположение нулей функции  $R(z)$  (16) при  $\hat{V} \in [0, \infty)$  и фиксированном  $\gamma = 10^{-2}$  иллюстрирует рис. 2. Здесь  ${}_m z_n^\pm(\hat{V})$  означает множество нулей  $z_n^\pm(\hat{V})$  для фиксированного значения  $\mu_* = \mu_{*m} : 10^{-5}$  ( $m = 1$ ), 1 ( $m = 2$ ), 2,1 ( $m = 3$ ), 2,3 ( $m = 4$ );  ${}_m z_{0n}^\pm = {}_m z_n^\pm(0)$  определяются формулой (26). Множества  ${}_m z_n^\pm(\hat{V})$ ,  $n = 1, 2, 3$ , представляются траекториями, похожими на незаконченные эллипсы (см. рис. 2). Стрелки на траекториях показывают направление перемещения нуля по траектории при изменении  $\hat{V}$  от 0 до  $\infty$  и указывают на точку сгущения, к которой стремится  $z_n^\pm(\hat{V})$ ,  $n = 1, 2, 3$ , при  $\hat{V} \rightarrow \infty$ . При увеличении  $\mu_*$ , что соответствует уменьшению жесткости подложки относительно покрытия,  $z_{0n}^\pm$  перемещаются влево, а вместе с ними смещаются и множества  $z_n^\pm(\hat{V})$ , что приводит к росту величины  $\hat{V}$ , при которой  $z_n^\pm(\hat{V})$  приобретает положительную действительную часть. Следует отметить, что множества  $z_n^\pm$  начинаются слева от мнимой оси, а заканчиваются в точке сгущения  ${}_m C_k^\pm = \lim_{\hat{V} \rightarrow \infty} {}_m z_n^\pm(\hat{V})$  справа ( $m = 1$ ) или слева ( $m = 2, 3, 4$ ). Дальнейшее увеличение  $\mu_*$  приводит к тому, что траектории нулей  $z_n^\pm(\hat{V})$  оказываются полностью в левой полуплоскости, и  $\operatorname{Re}(z_n^\pm(\hat{V})) < 0$  при любых значениях  $\hat{V} \in [0, \infty)$ .

Пары нулей  $z_0^+(\hat{V}) = \bar{z}_0^-(\hat{V})$  располагаются вблизи действительной оси и при изменении  $\hat{V}$  от 0 до  $\infty$  сначала отдаляются от нее, находясь слева от мнимой оси, затем пересекают мнимую ось, после чего вновь приближаются к действительной оси уже справа от мнимой оси и при некотором  $\hat{V}$  переходят на действительную ось, превращаясь в нули  $z_0(\hat{V})$  и  $z_1(\hat{V})$ . Первый из них при дальнейшем увеличе-

нии  $\hat{V}$  устремляется по действительной оси в точку ветвления, располагающуюся в начале координат, и покидает верхний лист римановой поверхности, в то время как второй устремляется по действительной оси в положительном направлении. При этом, чем ближе значение  $\mu_*$  к нулю, тем более «стянутой» к началу координат оказывается вся траектория  $z_0(\hat{V})$ . Таким образом, после того, как  $z_0^\pm(\hat{V})$  в первый раз пересекает действительную ось, в правой полуплоскости всегда присутствует нуль, являющийся полюсом подынтегральных функций решений задачи.

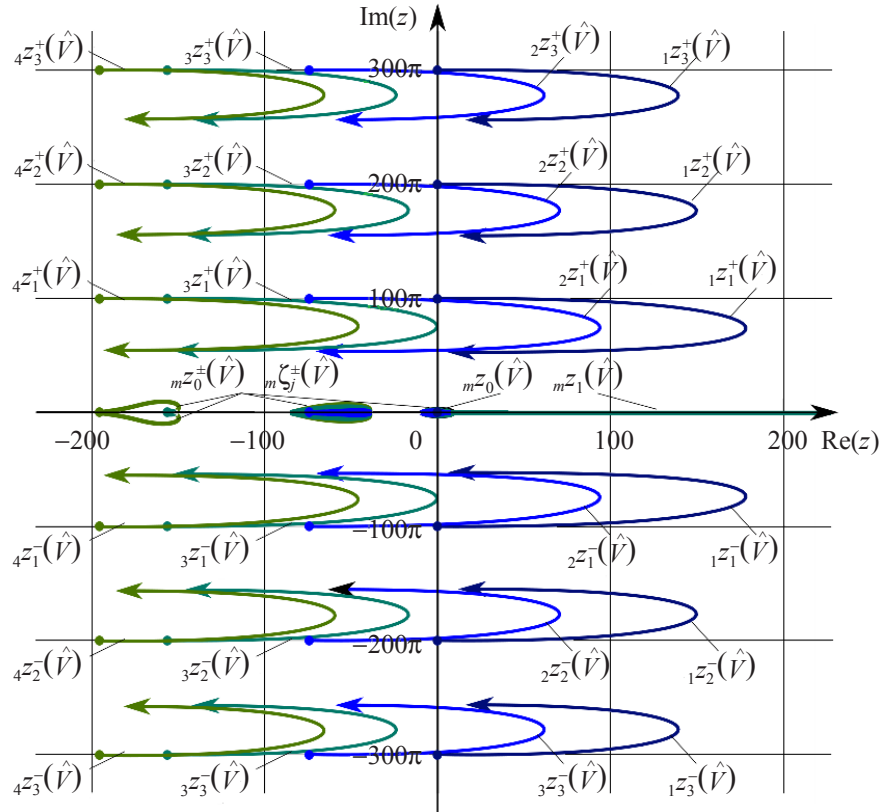


Рис. 2. Расположение нулей функции  $R(z)$  (16) на верхнем листе римановой поверхности при  $\gamma = 0,01$  и различных значениях  $\mu_*$

На верхнем листе римановой поверхности присутствуют также множества нулей  ${}_m\zeta_k^\pm(\hat{V})$   $k = 0, 1, 2, \dots$ ,  $\hat{V} \in [\hat{V}_k^+, \hat{V}_k^-]$ , где  $\hat{V}_k^+, \hat{V}_k^-$  – значения  $\hat{V}$ , при которых  ${}_m\zeta_k^\pm(\hat{V})$  выходят с нижнего листа римановой поверхности на верхний лист (+) и обратно (–) при фиксированных остальных параметрах задачи. В случае если точка сгущения  $\beta_k^\pm = \lim_{\hat{V} \rightarrow \infty} {}_m\zeta_k^\pm(\hat{V})$  находится на верхнем листе, полагается  $\hat{V}_k^- \rightarrow \infty$ .

Заметим, что для  $z_n^\pm$  и  $\zeta_k^\pm$  выполняются соотношения сопряженности

$$z_n^+ = \bar{z}_n^-, \quad \zeta_k^+ = \bar{\zeta}_k^-, \quad n, k = 0, 1, 2, \dots \quad (28)$$

Таким образом, нули характеристического уравнения или определителя системы (24), с одной стороны, являются собственными значениями начально-краевой задачи (1)–(12), а с другой, – полюсами подынтегральных функций контурных квадратур решения задачи в (14), (17), (19).



### Формулы вычисления решения

Аналогично работе [13], методами теории функций комплексного переменного можно получить формулы для вычисления квадратур в (14), (17), (19):

$$\frac{1}{2\pi r} \int_{\Gamma} D(z) \frac{N(x, z)}{R(z)} e^{z\tilde{t}} dz = \sum_{k=1}^2 S_k(x, \tilde{t}) H((-1)^k (\tilde{t} - t_{\text{ек}})), \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \quad (29)$$

$$S_1(x, t) = G(x, t) + s_1(x, t), \quad S_2(x, t) = G(x, t) - 2G(x, t - t_{\text{ек}}) + s_2(x, t), \quad (30)$$

$$G(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} [\theta^-(z_k^+) K'(z_k^+, x, t) + \theta^-(z_k^-) K'(z_k^-, x, t)] + \sum_{k=0}^{\infty} [\theta^-(\zeta_k^+) K'(\zeta_k^+, x, t) + \theta^-(\zeta_k^-) K'(\zeta_k^-, x, t)], \quad (31)$$

$$s_1(x, t) = K(\varepsilon t_{\kappa}, x, t) - K(0, x, 0) + J_1(x, t), \quad s_2(x, t) = K(0, x, 0) + J_2(x, t),$$

$$J_1(x, t) = \frac{1}{2\pi r} \int_0^{\infty} \theta^+(\xi) H(x, \xi) d\xi, \quad H(x, \xi) = \frac{N(x, -i\sqrt{\xi}, -\xi)}{R(-i\sqrt{\xi}, -\xi)} - \frac{N(x, i\sqrt{\xi}, -\xi)}{R(i\sqrt{\xi}, -\xi)}, \quad (32)$$

$$J_2(x, t) = J_1(x, t) - 2J_1(x, t, t_{\text{ек}}),$$

$$K(z, x, t) = \frac{N(x, z)}{R(z)} e^{zt}, \quad K'(z, x, t) = \frac{N(x, z)}{R'(z)} e^{zt},$$

$$K(0, x, 0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{N(x, z)}{R(z)}, \quad \theta^{\pm}(z) = \frac{\varepsilon t_{\kappa}}{z(z \pm \varepsilon t_{\kappa})}.$$

В формулах (32) введены обозначения

$$N(x, z) = N(x, \sqrt{z}, z), \quad R(z) = R(\sqrt{z}, z)$$

для отслеживания поведения этих функций на берегах разреза.

### Критерии устойчивости решения

Функция  $G(x, t)$  (31) из  $S_k(x, t)$  (30) содержит два бесконечных ряда – по  $z_k^+$  и по  $\zeta_k^+$ :

$$G(x, t) = S^+(x, t) + S^-(x, t), \quad (33)$$

$$S^+(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} b(x, z_k^+) e^{z_k^+ t}, \quad S^-(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} b(x, \zeta_k^+) e^{\zeta_k^+ t}, \quad b(x, z) = \theta(z) \frac{N(x, z)}{R(z)}.$$

Если все  $\text{Re}(z_n^+) < 0$  и  $\text{Re}(\zeta_k^+) < 0$ ,  $n, k = 0, 1, 2, \dots$ , для  $0 < \hat{V} < \hat{V}_0$  и если все  $z_n^+$  и  $\zeta_k^+$  находятся левее мнимой оси (см. рис. 2), а при  $\hat{V} > \hat{V}_0$  хотя бы один из них – или  $\zeta_{k^*}^+$  – находится справа ( $\text{Re}(z_{n^*}^+) > 0$  или  $\text{Re}(\zeta_{k^*}^+) > 0$ ), то область  $\hat{V}_S \in [0, \hat{V}_0]$  при фиксированных других параметрах  $\mu_*$ ,  $\gamma$ ,  $a_*$ , ... называется областью устойчивых решений задачи. Область  $\hat{V}_U \in (\hat{V}_0, \infty)$  называется областью неустойчивых решений задачи, так как если у одного из  $z_{n^*}^+$  (или  $\zeta_{k^*}^+$ )  $\text{Re}(z_{n^*}^+) > 0$  или  $\text{Re}(\zeta_{k^*}^+) > 0$ , то один из рядов в (33) становится расходящимся, а решение, его содержащее, – неустойчивым. Чтобы показать это, достаточно перестроить ряд  $S^+(x, t)$  в (33) для  $z_{n^*}^+$ , у которого  $\text{Re}(z_{n^*}^+) > 0$ , по формуле

$$S^+(x, t) = b(x, z_{n^*}^+) \left( 1 + \sum_{k=1} B_n(x, z_k^+) e^{-(z_{n^*}^+ - z_k^+)t} \right) e^{z_{n^*}^+ t}, \quad B_n(x, z) = \frac{b(x, z)}{b(x, z_n^+)},$$

из которой видно, что ряд в скобках сходится, а за счет множителя  $e^{z_{n^*}^+ t}$  имеем  $\lim_{t \rightarrow \infty} S^+(x, t) = \infty$ , и такое решение неустойчиво.

При анализе траекторий полюсов  $z_n^+$  и  $\zeta_k^+$ ,  $n, k = 0, 1, 2, \dots$ , изображенных на рис. 2, следует отметить, что при изменении  $\hat{V}$  от 0 до  $\infty$  полюсы движутся по своим траекториям с разной скоростью: наибольшей скоростью среди них обладает  $z_1^+, z_0^+$  или  $\zeta_0^+$ . С увеличением  $\hat{V}$  один из этих полюсов первым пересекает мнимую ось при  $\hat{V} = \hat{V}_{\text{crit}}$ . Тогда при  $\hat{V} > \hat{V}_{\text{crit}}$   $\text{Re}(z_n^+) > 0$  и решение задачи неустойчиво, независимо от того, пересекли или нет мнимую ось другие полюсы. Вывод заключается в том, что область устойчивости решения задачи по параметру  $\hat{V}$  является интервал  $[0, \hat{V}_{\text{crit}}]$ , область неустойчивости –  $(\hat{V}_{\text{crit}}, \infty)$  при фиксированных других параметрах задачи:  $\gamma, \mu_*, a_*, \dots$ . Полюсы  $\zeta_k^\pm$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , имеют  $\text{Re}(\zeta_k^\pm(\hat{V})) < 0$  при  $\hat{V} \in [0, \infty)$  и не образуют неустойчивых решений.

На рис. 3 представлены границы областей устойчивых решений на плоскости параметров  $(\lg \mu_*, \hat{V})$  при трех значениях  $\gamma$ . Другие параметры имеют следующие значения:  $K_* = 6,5$ ,  $\kappa_* = 5$ ,  $\nu_* = 1,2$ ,  $\alpha_* = 2,2$ ,  $\rho_* = 0,4$ ,  $a_* = \sqrt{\mu_*/\rho_*}$ . Отметим, что при  $\mu_* \rightarrow 0$  и  $\mu_* \rightarrow \infty$  решения неустойчивы при сколь угодно малых  $\hat{V} > 0$ .

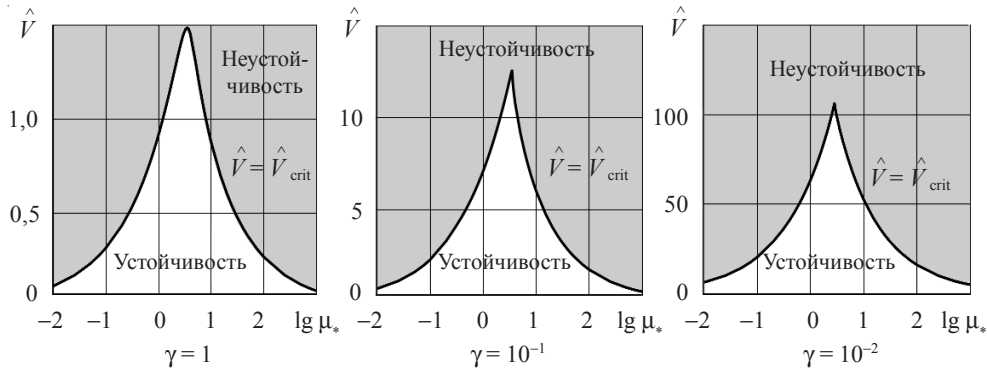


Рис. 3. Области устойчивых и неустойчивых решений задачи

### Численный анализ решения задачи

Чтобы проиллюстрировать влияние упругости и теплопроводности подложки на решение задачи, на рис. 4 приведены графики температуры (а) и напряжений (б) на контакте.

Графики получены при значениях параметров задачи, соответствующих покрытию из алюминия толщиной  $h = 2$  мм. Принимались следующие значения параметров материала:  $\mu = 25,5 \cdot 10^9$  ГПа,  $\rho = 2,7 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>,  $a = 6,24 \cdot 10^3$  м/с,  $\nu = 0,34$ ,  $K = 0,21 \cdot 10^3$  Вт/(м·К),  $\alpha = 22,9 \cdot 10^{-6}$  1/К,  $\kappa = 87,4 \cdot 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с. Скольжение осуществляется со скоростью  $V = 0,15$  м/с при коэффициенте трения  $f = 0,15$ . Параметры закона внедрения  $\Delta(t)$  (13):  $\Delta_0 = 0,01h$ ,  $\nu_0 = 0,05$  мм/с,  $\epsilon = 10$  с<sup>-1</sup>,  $t_e = 6,93 \cdot 10^{-2}$  с. Безразмерные величины  $\gamma, \hat{V}$  принимают следующие значения:  $\gamma = 7 \cdot 10^{-6}$ ,  $\hat{V} = 1,052$ .

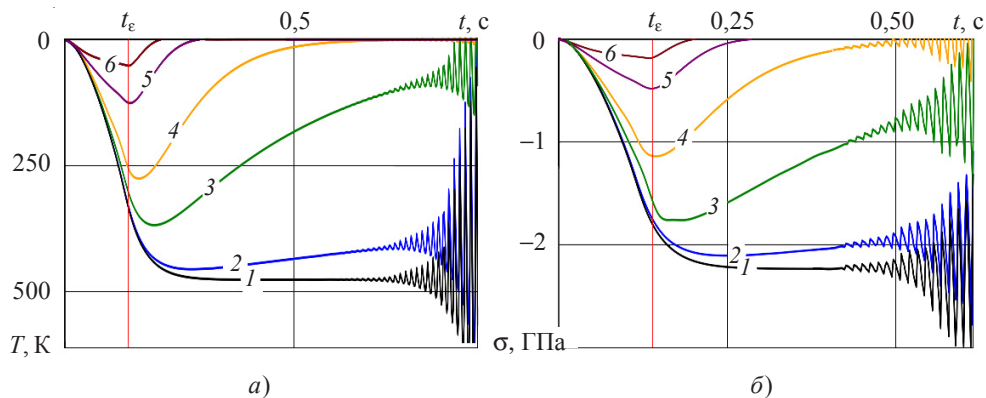


Рис. 4. Изменение температуры  $T(h, t)$  (а) и нормальных напряжений  $\sigma(h, t)$  (б) на контакте при различных значениях модуля сдвига и теплопроводности основания и фиксированных значениях остальных параметров

Значения параметров подложки – модуля сдвига  $\mu_1$ , коэффициентов теплопроводности  $K_1$  и температуропроводности  $\kappa_1$ , скорости продольной упругой волны в подложке  $a_1$  – отличаются для разных графиков, что приводит к различным значениям безразмерных параметров задачи  $\mu_*$ ,  $a_*$ ,  $K_*$ ,  $\kappa_*$ , приведенных в таблице 1. Коэффициент температуропроводности подложки определялся по формуле  $\kappa_1 = K_1 / (C_1 \rho_1)$ , где  $C_1$  – удельная теплоемкость материала подложки, а скорость продольной упругой волны – по формуле  $a_1 = \sqrt{\mu_* / \rho_*}$ , вытекающей из (5) и (16). Значения остальных безразмерных параметров задачи принимаются следующими:  $\rho_* = 0,346$ ,  $\nu_* = 1,192$ ,  $\alpha_* = 1,924$  (соответствуют покрытию из алюминия на подложке из углеродистой стали).

Таблица 1

Номер графика	$\mu_*$	$a_*$	$K_*$	$\kappa_*$
1	$4,264 \cdot 10^{-19}$	$1,110 \cdot 10^{-9}$	$4,610 \cdot 10^{-18}$	$6,906 \cdot 10^{-18}$
2	$4,264 \cdot 10^{-15}$	$1,110 \cdot 10^{-7}$	$4,610 \cdot 10^{-14}$	$6,906 \cdot 10^{-14}$
3	$4,264 \cdot 10^{-13}$	$1,110 \cdot 10^{-6}$	$4,610 \cdot 10^{-12}$	$6,906 \cdot 10^{-12}$
4	$4,264 \cdot 10^{-12}$	$3,510 \cdot 10^{-6}$	$4,610 \cdot 10^{-11}$	$6,906 \cdot 10^{-11}$
5	$8,529 \cdot 10^{-12}$	$4,964 \cdot 10^{-6}$	$9,220 \cdot 10^{-11}$	$1,381 \cdot 10^{-11}$
6	$4,264 \cdot 10^{-11}$	$1,110 \cdot 10^{-5}$	$4,610 \cdot 10^{-10}$	$6,906 \cdot 10^{-10}$
—*	$4,264 \cdot 10^{-1}$	$1,110 \cdot 10^0$	$4,610 \cdot 10^0$	$6,906 \cdot 10^0$

\*В последней строке таблицы приведены данные для основания из углеродистой стали (для сравнения).

Графики 1 решений динамической задачи, изображенные на рис. 4, совпадают с соответствующими графиками решений задачи для покрытия на жестком основании [13]. Однако с уменьшением жесткости основания (увеличением  $\mu_*$ ) величина напряжений и температуры на контакте стремительно падает, несмотря на ослабление теплопроводных качеств основания (увеличение  $K_*$ ), что демонстрируют графики 2–6 рис. 4.

Заметим, что на графиках 2–6 рост температуры и напряжений сменяется их убыванием сразу (5, б) или спустя некоторое время (2–4) после момента окончания активной фазы внедрения  $t_e$ . Графики 1–4 демонстрируют термоупругодинамически неустойчивое решение задачи, в то время как на графиках 5, б изображено устой-

чивое решение. Заметим, что рост амплитуды колебаний напряжений  $\sigma(h, t)$  становится заметным раньше, чем у температуры на контакте  $T(h, t)$ .

### Заключение

Получено решение задачи о скользящем термофрикционном контакте жесткой полуплоскости с покрытием на упругой полуплоскости в виде контурных квадратур интегрального преобразования Лапласа. Выражения для вычисления температуры, смещений, напряжений в покрытии найдены в виде рядов по собственным функциям начально-краевой задачи.

Устойчивость решения при фиксированных параметрах задачи определяется комплексными нулями знаменателя подынтегральных функций полученных квадратур. Численное решение соответствующего трансцендентного уравнения позволяет определить устойчивость или неустойчивость скользящего фрикционного контакта. Через решение этого уравнения при различных фиксированных значениях безразмерных параметров задачи можно проанализировать их влияние на устойчивость скользящего термофрикционного контакта.

Было проанализировано влияние параметра  $\mu_*$ , характеризующего соотношение жесткостей покрытия и основания, на границу области устойчивости решения по параметру  $\hat{V}$ , который при фиксированных значениях коэффициента трения и параметров покрытия зависит только от скорости скольжения. Показано, что критическое значение  $\hat{V}$  тем выше, чем ближе значения упругих модулей покрытия и основания ( $\mu_* \rightarrow 1$ ).

Таким образом, устойчивость скользящего фрикционного контакта жесткого тела с поверхностью упругого покрытия на упругом основании из другого материала при наличии тепловыделения на контакте, как и величины контактных напряжений и температуры зависят от соотношения термомеханических характеристик материалов покрытия и основания, а также от коэффициента трения и скорости скольжения.

На основе полученных теоретических и численных результатов становится возможным анализ условий возникновения термоупругодинамической неустойчивости в узлах трения скольжения, в которых используются покрытия различного назначения. Важность полученных результатов обуславливается тем, что возникновение неустойчивости при работе узла трения может привести к преждевременному выходу его из строя и, как следствие, к опасным аварийным ситуациям. Подбор материалов покрытия и полуплоскости на этапе конструирования триботехнических устройств позволяет улучшить их эксплуатационные характеристики, исключить возможность возникновения термоупругодинамической неустойчивости и обеспечить безаварийную эксплуатацию триботехнических устройств.

### Список литературы

1. Айзикович С.М., Волков С.С., Васильев А.С. Напряженное состояние упругого полупространства с мягким функционально-градиентным покрытием при внедрении штампа с плоским основанием. *Проблемы прочности и пластичности*. 2015. Т. 77, №2. С. 124–131.
2. Кренев Л.И., Айзикович С.М., Митрин Б.И. Внедрение кругового штампа при заданной постоянной температуре на плоской подошве штампа в непрерывно неоднородное полупространство. *Вестник Донского государственного технического университета*. 2014. Т. 14, №1. С. 34–44.

3. Горячева И.Г. Роль микрогеометрии поверхности при фрикционном взаимодействии вязкоупругих тел. *Проблемы прочности и пластичности*. 2015. Т. 77, №1. С. 49–59.
4. Barber J.R. Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 1969. V. 312. P. 381–394.
5. Александров В.М., Аннакулова Г.К. Взаимодействие покрытий тел с учетом деформируемости, износа и тепловыделения от трения. *Трение и износ*. 1992. Т. 13, №1. С. 154–160.
6. Евтушенко А.А., Пырьев Ю.А. Влияние изнашивания на развитие термоупругой неустойчивости фрикционного контакта. *Изв. РАН. МТТ*. 1997. №1. С. 114–121.
7. Коваленко Е.В. Контактные задачи с учетом тепловыделения от трения. *Механика контактного взаимодействия*. Под ред. И.И. Воровича, В.М. Александрова. М.: Физматлит, 2001. С. 476–490.
8. Barber J.R., Ciavarella M., Afferrante L. Influence of thermal contact resistance on frictionally excited thermoelastic instability (TEI). *Proceedings of 2004 ASME/STLE International Joint Tribology Conference*. Long Beach, California: ASME, 2004. P. 1–4.
9. Mao J.-J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Thermoelastic instability of a functionally graded layer interacting with a homogeneous layer. *Int. J. Mech. Sci.* 2015. V. 99. P. 218–227.
10. Afferrante L., Ciavarella M., Barber J.R. Sliding thermoelastodynamic instability. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2006. V. 462. No 2071. P. 2161–2176.
11. Afferrante L., Ciavarella M. Thermoelastic dynamic instability (TEDI) in frictional sliding of a half-space against a rigid non-conducting wall. *J. Appl. Mech.* 2007. V. 74. P. 875–884.
12. Afferrante L., Ciavarella M. Thermoelastic dynamic instability (TEDI) in frictional sliding of two elastic half-spaces. *J. Mech. Phys. Solids*. 2007. V. 55. No 4. P. 744–764.
13. Васильев А.С., Волков С.С., Митрин Б.И., Зеленцов В.Б. Термоупругодинамическая неустойчивость решения контактной задачи для покрытия с учетом тепловыделения от трения. *Вестник ДГТУ*. 2014. Т. 14. №4. С. 17–29.
14. Dow T.A., Burton R.A. Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear. *Wear*. 1972. V. 19, No 3. P. 315–328.
15. Yi Y.-B., Bendawi A. Effect of convective cooling on frictionally excited thermoelastic instability. *Wear*. 2012. V. 296, No 1–2. P. 583–589.
16. Yi Y.-B. et al. Finite element analysis of thermoelastic instability in intermittent sliding contact. *J. Therm. Stress*. 2014. V. 37, No 7. P. 870–883.
17. Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Айзикович С.М., Селезнев Н.М. О корректности квазистатических решений проблемы неустойчивости скользящего термофрикционного контакта. *XI Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики: Сб. докл.* Казань, 20–24 августа 2015. Казань: Изд-во КФУ, 2015. С. 1491–1493.
18. Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Айзикович С.М. Динамическая и квазистатическая неустойчивость скользящего термофрикционного контакта. *Трение и износ*. 2016. Т. 37, №3. С. 280–289 (в печати).
19. Новацкий В. *Вопросы термоупругости*. М.: Изд-во АН СССР, 1962. 363 с.
20. Диткин В.А., Прудников А.П. *Интегральные преобразования и операционные исчисления*. М.: Физматлит, 1961. 524 с.

#### References

1. Ayzikovich S.M., Volkov S.S., Vasil'yev A.S. Napryazhennoe sostoyanie uprugogo poluprostranstva s myagkim funktsional'no-gradientnym pokrytiem pri vnedrenii shtampa s ploskim osnovaniem. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2015. Т. 77, №2. S. 124–131.
2. Krenev L.I., Ayzikovich S.M., Mitrin B.I. Vnedrenie krugovogo shtampa pri zadannoy postoyannoy temperature na ploskoy podoshve shtampa v nepreryvno neodnorodnoe poluprostranstvo. *Vestnik Donskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*. 2014. Т. 14, №1. S. 34–44.
3. Goryacheva I.G. Rol' mikrogeometrii poverkhnosti pri friktsionnom vzaimodeystvii vyzkouprugikh tel. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2015. Т. 77, №1. S. 49–59.

4. Barber J.R. Thermoelastic instabilities in the sliding of conforming solids. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 1969. V. 312. P. 381–394.
5. Aleksandrov V.M., Annakulova G.K. Vzaimodeystvie pokrytiy tel s uchetom deformiruемости, iznosa i teplovydeleniya ot treniya. *Trenie i iznos.* 1992. T. 13, №1. S. 154–160.
6. Evtushenko A.A., Pyryev Yu.A. Vliyanie iznashivaniya na razvitie termouprugoy neustoychivosti friktsionnogo kontakta. *Izv. RAN. MTT.* 1997. №1. S. 114–121.
7. Kovalenko E.V. Kontaktnye zadachi s uchetom teplovydeleniya ot treniya. *Mekhanika kontaktnogo vzaimodeystviya.* Pod red. I.I. Vorovicha, V.M. Aleksandrova. M.: Fizmatlit, 2001. S. 476–490.
8. Barber J.R., Ciavarella M., Afferrante L. Influence of thermal contact resistance on frictionally excited thermoelastic instability (TEI). *Proceedings of 2004 ASME/STLE International Joint Tribology Conference.* Long Beach, California: ASME, 2004. P. 1–4.
9. Mao J.-J., Ke L.-L., Wang Y.-S. Thermoelastic instability of a functionally graded layer interacting with a homogeneous layer. *Int. J. Mech. Sci.* 2015. V. 99. P. 218–227.
10. Afferrante L., Ciavarella M., Barber J.R. Sliding thermoelastodynamic instability. *Proc. R. Soc. A Math. Phys. Eng. Sci.* 2006. V. 462. No 2071. P. 2161–2176.
11. Afferrante L., Ciavarella M. Thermoelastic dynamic instability (TEDI) in frictional sliding of a half-space against a rigid non-conducting wall. *J. Appl. Mech.* 2007. V. 74. P. 875–884.
12. Afferrante L., Ciavarella M. Thermoelastic dynamic instability (TEDI) in frictional sliding of two elastic half-spaces. *J. Mech. Phys. Solids.* 2007. V. 55, No 4. P. 744–764.
13. Vasil'yev A.S., Volkov S.S., Mitrin B.I., Zelentsov V.B. Termouprugodinamicheskaya neustoychivost' resheniya kontaktnoy zadachi dlya pokrytiya s uchetom teplovydeleniya ot treniya. *Vestnik DGTU.* 2014. T. 14, №4. S. 17–29.
14. Dow T.A., Burton R.A. Thermoelastic instability of sliding contact in the absence of wear. *Wear.* 1972. V. 19, No 3. P. 315–328.
15. Yi Y.-B., Bendawi A. Effect of convective cooling on frictionally excited thermoelastic instability. *Wear.* 2012. V. 296, No 1–2. P. 583–589.
16. Yi Y.-B. et al. Finite element analysis of thermoelastic instability in intermittent sliding contact. *J. Therm. Stress.* 2014. V. 37, No 7. P. 870–883.
17. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Ayzikovich S.M., Seleznev N.M. O korrektnosti kvazistaticheskikh resheniy problemy neustoychivosti skol'zyashchego termofriktsionnogo kontakta. XI Vserossiyskiy s'ezd po fundamental'nym problemam teoreticheskoy i prikladnoy mekhaniki: Sb. dokl. Kazan', 20–24 avgusta 2015. Kazan': Izd-vo KFU, 2015. S.1491–1493.
18. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Ayzikovich S.M. Dinamicheskaya i kvazistaticheskaya neustoychivost' skol'zyashchego termofriktsionnogo kontakta. *Trenie i iznos.* 2016. T. 37, №3. S. 280–289 (v pechati).
19. Novatskiy V. *Voprosy termouprugosti.* M.: Izd-vo AN SSSR, 1962. 363 s.
20. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. Integral'nye preobrazovaniya i operatsionnye ischisleniya. M.: Fizmatlit, 1961. 524 s.

## THERMOELASTODYNAMIC INSTABILITY OF SLIDING OF A RIGID BODY OVER A COATING ON AN ELASTIC BASE

**Mitrin B.I.<sup>1</sup>, Zelentsov V.B.<sup>1</sup>, Igumnov L.A.<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,  
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

The stressed-strained state of a coating on an elastic base at sliding frictional contact is studied in the framework of analyzing a dynamic contact problem of linear thermoelasticity. Stability conditions of the solution of the problem are determined, as well as values of contact stresses and temperatures as a function of relations between elastic and thermal-mechanical properties of the coating and

base materials. A solution of the problem of a sliding thermal-friction contact of a rigid half-plane with a coating on an elastic half-plane is obtained in the form of contour quadratures of an integral Laplace transform. Expressions for computing temperature, displacements and stresses in the coating are obtained in the form of eigenfunction series of an initial-value boundary problem. Based on the theoretical and numerical results, it is possible to analyze conditions of appearance of thermoelastodynamic instability in sliding friction units where coatings of various purposes are used.

*Keywords:* thermoelastic instability, sliding, dynamic contact problem, coating, Laplace transform.