

УДК 539.3

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ИДЕНТИФИКАЦИИ НЕОДНОРОДНЫХ ПОРОУПРУГИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛОГО ЦИЛИНДРА*

© 2016 г.

Ватульян А.О., Нестеров С.А.

*Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича
Южного федерального университета, Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

vatulyan@math.rsu.ru

Поступила в редакцию 28.10.2015

Рассматривается коэффициентная обратная задача о нахождении пороупругих характеристик неоднородного полого цилиндра. Прямая задача пороупругости для цилиндра решается с помощью метода пристрелки. В качестве дополнительной информации при решении обратной задачи выступает измеренное смещение или поровое давление на внешней границе цилиндра. Для решения обратной задачи на основе метода линеаризации получены операторные соотношения, устанавливающие взаимосвязь между искомыми и измеряемыми характеристиками. Пороупругие характеристики восстанавливались в два этапа. На первом этапе находилось начальное приближение. На втором этапе поправки к восстанавливаемым характеристикам определялись из решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода. Для решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода использовался метод А.Н. Тихонова. Приведены конкретные примеры реконструкции пороупругих характеристик неоднородного цилиндра.

Ключевые слова: пороупругость, обратная задача, полый цилиндр, интегральные уравнения.

Введение

В настоящее время в различных областях науки и техники все шире применяются пористые материалы. Пористые тела состоят из твердого скелета и заполняющих его внутреннее пространство жидкости или газа. Впервые модель линейной пороупругости предложил Био в статье [1]. В модели пороупругости Био основными неизвестными выступают векторы смещений твердой и жидкой фаз. Другой популярной моделью пороупругости является модель, предложенная в [2]. В этой модели основными неизвестными выступают вектор перемещений скелета и поровое давление жидкости. Важная связь между моделями термоупругости и пороупругости была представлена в [3]. В настоящее время динамические задачи пороупругости для однородных тел канонической формы достаточно хорошо изучены, выработаны методы их решения. Так, в [4] рассмотрен гранично-элементный анализ дина-

* Выполнено при поддержке проекта Минобрнауки РФ №9.665.2014/К на выполнение научно-исследовательской работы в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности.

мических процессов в поропругой колонне, протекающих в нестационарном режиме. В [5–8] изучаются установившиеся радиальные колебания полого цилиндра.

Известно, что многие поропругие материалы, как натуральные, так и искусственные, обладают неоднородностью физических свойств. Эффективность практического применения неоднородных поропругих материалов зависит от знания точных законов неоднородности, а для их определения необходимо решать коэффициентные обратные задачи (КОЗ) поропругости. Количество работ по исследованию КОЗ поропругости еще невелико [9, 10]. Это связано с тем, что уравнение поропругости относится к уравнениям смешанного типа, для которых сложно построить операторные уравнения.

Подход к решению КОЗ механики связанных полей представлен в [10–14]. В этих работах решение нелинейных обратных задач сводится к итерационному процессу, на каждом этапе которого решается линейное интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода. В [10] этот подход ранее был успешно применен для идентификации некоторых неоднородных поропругих характеристик трансверсально-изотропного слоя в режиме установившихся толщинных колебаний.

В настоящей статье с использованием результатов, полученных для термоупругого цилиндра [14], решается обратная задача о реконструкции неоднородных характеристик поропругого цилиндра.

1. Постановка коэффициентной обратной задачи поропругости для цилиндра

Рассмотрим задачу для поропругого неоднородного полого цилиндра, находящегося в условиях плоской деформации ($u_r = u(r)$, $u_\phi = 0$, $u_z = \text{const}$). Внутренняя цилиндрическая поверхность с радиусом a непроницаема для жидкости и свободна от напряжений, а на внешней поверхности с радиусом b действует распределенная механическая нагрузка или поток порового давления. Начально-краевая задача о радиальных колебаниях цилиндра под действием приложенного на внешней границе потока поровой жидкости $q(b, t) = q_0$ имеет вид:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (1)$$

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda \frac{u}{r} - Ap, \quad (2)$$

$$\sigma_{\phi\phi} = \lambda \frac{\partial u}{\partial r} + (\lambda + 2\mu) \frac{u}{r} - Ap, \quad (3)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(k(r)r \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{\eta^2}{R} \frac{\partial p}{\partial t} - A(r) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial p}{\partial r}(a, t) = 0, \quad -k(b) \frac{\partial p}{\partial r}(b, t) = q_0, \quad (5)$$

$$\sigma_{rr}(a, t) = 0, \quad \sigma_{rr}(b, t) = 0, \quad (6)$$

$$p(r, 0) = u(r, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(r, 0) = 0. \quad (7)$$

Здесь p – давление жидкости в порах; u – радиальное смещение; σ_{rr} , $\sigma_{\phi\phi}$ – нормаль-

ные напряжения в цилиндре; λ, μ – коэффициенты Ламе; A – модуль Био; k – коэффициент проницаемости среды; ρ – плотность среды; η – пористость; R – гидростатический модуль.

В случае возбуждения радиальных колебаний цилиндра под действием приложенной на внешней границе силы $\sigma_{rr}(r_2, t) = \sigma_0$ в задаче (1)–(7) будут использоваться другие граничные условия:

$$\frac{\partial p}{\partial r}(a, t) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial r}(b, t) = 0, \quad (8)$$

$$\sigma_{rr}(a, t) = 0, \quad \sigma_{rr}(b, t) = \sigma_0. \quad (9)$$

Перейдем в (1)–(9) к безразмерным параметрам и функциям, обозначая:

$$\begin{aligned} z &= \frac{r-a}{b-a}, \quad z_0 = \frac{a}{b-a}, \quad s = \lambda + 2\mu, \quad \bar{s}(z) = \frac{s(r)}{s_0}, \quad \bar{\lambda}(z) = \frac{\lambda(r)}{s_0}, \quad \bar{k}(z) = \frac{k(r)}{k_0}, \\ \bar{\rho}(z) &= \frac{\rho(r)}{\rho_0}, \quad v_0 = \sqrt{\frac{s_0}{\rho_0}}, \quad t_0 = \frac{b-a}{v_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \bar{\delta}(z) = \frac{A(b-a)}{k_0 s_0}, \quad \bar{\varphi}(z) = \frac{\eta^2(b-a)v_0}{Rk_0}, \\ P &= \frac{p}{s_0}, \quad U = \frac{u}{b-a}, \quad \Omega_z = \frac{\sigma_{rr}}{s_0}, \quad \Omega_\varphi = \frac{\sigma_{\varphi\varphi}}{s_0}, \quad p^* = \frac{\sigma_0}{s_0}, \quad \omega = \frac{q_0(r_2 - r_1)}{k_0 s_0}, \\ k_0 &= \max_{r \in [a, b]} k(r), \quad \rho_0 = \max_{r \in [a, b]} \rho(r), \quad \lambda_0 = \max_{r \in [a, b]} \lambda(r), \quad s_0 = \max_{r \in [a, b]} s(r). \end{aligned}$$

После приведения к безразмерным параметрам начально-краевая задача (1)–(7) примет вид:

$$\frac{\partial \Omega_z}{\partial z} + \frac{\Omega_z - \Omega_\varphi}{z + z_0} = \bar{\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \quad (10)$$

$$\Omega_z = \bar{s} \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{\lambda} \frac{U}{z + z_0} - P, \quad (11)$$

$$\Omega_\varphi = \bar{\lambda} \frac{\partial U}{\partial z} + \bar{s} \frac{U}{z + z_0} - P, \quad (12)$$

$$\frac{1}{z + z_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[\bar{k}(z)(z + z_0) \frac{\partial P}{\partial z} \right] - \bar{\varphi}(z) \frac{\partial P}{\partial \tau} - \bar{\delta}(z) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau} + \frac{1}{z + z_0} \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}(0, \tau) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial P}{\partial z}(1, \tau) = \omega, \quad (14)$$

$$\Omega_z(0, \tau) = 0, \quad \Omega_z(1, \tau) = 0, \quad (15)$$

$$P(z, 0) = U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau}(z, 0) = 0. \quad (16)$$

При этом граничные условия (8), (9) для случая механического нагружения цилиндра преобразуются к виду:

$$\frac{\partial P}{\partial z}(0, \tau) = 0, \quad \frac{\partial P}{\partial z}(1, \tau) = 0, \quad (17)$$

$$\Omega_z(0, \tau) = 0, \quad \Omega_z(1, \tau) = p^*. \quad (18)$$

Прямая задача пороупругости заключается в определении функций $U(z, \tau)$ и $P(z, \tau)$ из (10)–(16) при известных пороупругих характеристиках $\bar{\varphi}(z)$, $\bar{k}(z)$, $\bar{\delta}(z)$, $\bar{\rho}(z)$, $\bar{s}(z)$ и $\bar{\lambda}(z)$. Решение прямой задачи сведено к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка в трансформантах по Лапласу на основе метода пристрелки и использованию процедуры обращения трансформант, реализуемой в соответствии с методом Дурбина, как в [14, 15].

В обратной задаче требуется определить одну из пороупругих характеристик цилиндра при известных остальных характеристиках по некоторой дополнительной информации на его внешней поверхности. В качестве такой информации в случае нагружения цилиндра потоком поровой жидкости выступает поровое давление:

$$P(1, \tau) = f(\tau), \quad \tau \in [a, b], \quad (19)$$

а в случае механического нагружения – смещение:

$$U(1, \tau) = g(\tau), \quad \tau \in [c, d]. \quad (20)$$

2. Итерационная схема решения обратной задачи пороупругости цилиндра

Решение нелинейной коэффициентной обратной задачи пороупругости возможно на основе итерационного процесса, на каждом этапе которого решается линейная задача [10, 11].

Безразмерные пороупругие характеристики $\bar{a}(z)$ восстанавливались в два этапа. На первом этапе определялось начальное приближение в классе положительных ограниченных линейных функций $\bar{a}_0(z) = kz + b$ из условия минимизации функционала невязки. В случае механического нагружения функционал невязки имеет вид:

$$J_1 = \int_c^d (g(\tau) - U(1, \tau))^2 d\tau, \quad (21)$$

а в случае нагружения потоком поровой жидкости

$$J_2 = \int_a^b (f(\tau) - P(1, \tau))^2 d\tau. \quad (22)$$

На втором этапе уточнялись законы изменения характеристик по схеме $\bar{a}_n(z) = \bar{a}_{n-1}(z) + \delta\bar{a}_{n-1}(z)$. Поправки $\delta\bar{a}_{n-1}$ находились путем решения интегральных уравнений Фредгольма 1-го рода, полученных на основе применения метода линеаризации, аналогично тому, как это сделано в работе [14]. Так, для нахождения поправок $\delta\bar{\rho}_{n-1}$ имеем:

$$\int_0^1 \delta\bar{\rho}_{n-1} \frac{\partial^2 U_{n-1}}{\partial \tau^2} U_{n-1} dz = p^* [g(\tau) - U_{n-1}(1, \tau)], \quad \tau \in [c, d]. \quad (23)$$

При регуляризации уравнений вида (23) был использован метод А.Н. Тихонова [16]. Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижении соответствующим функционалом невязки (21), (22) порогового значения, равного 10^{-4} .

3. Результаты вычислительных экспериментов

При проведении вычислительного эксперимента принято: $p^* = 0,1$, $\omega = 0,5$, $z_0 = 2$. Определены наиболее информативные с точки зрения процедуры идентификации временные диапазоны. Так, измерение смещения было осуществлено на интервале $[c, d] = [0, 1]$ в пяти точках наблюдения внутри него, а измерение порового давления на интервале $[0; 0,5]$ – в четырех точках наблюдения внутри него. В ходе вычислительных экспериментов восстанавливалась каждая из пороупругих характеристик по отдельности; другие полагались равными единице.

Оказалось, что безразмерные характеристики восстанавливаются с хорошей точностью: погрешность реконструкции монотонных функций не превосходит 5%, а немонотонных – 10%, при этом для достижения порогового значения в соответствующих функционалах невязки требуется не более 10 итераций.

На рис. 1–4 сплошной линией изображен точный закон, точками – восстановленный.

На рис. 1 приводится пример реконструкции возрастающей функции $\bar{s}(z) = 1 + 1,5z^2$. Начальное приближение $\bar{s}_0(z) = 1,1 + 1,2z$. Для достижения функционалом невязки (21) порогового значения потребовалось 6 итераций, при этом максимальная погрешность на последней итерации не превысила 4%.

На рис. 2 приводится пример реконструкции возрастающей функции $\bar{p}(z) = 2 + \ln(1 + 6z)$. Начальное приближение $\bar{p}_0(z) = 2,05 + 1,9z$. Для достижения функционалом невязки (21) порогового значения потребовалось 5 итераций, при этом максимальная погрешность на последней итерации не превысила 3%.

На рис. 3 показан пример реконструкции убывающей функции $\bar{\varphi}(z) = 0,5 + 2e^{-3z}$. Начальное приближение $\bar{\varphi}_0(z) = 2,4 - 1,8z$. Для достижения порогового значения в функционале (22) потребовалось 4 итерации. Погрешность восстановления на последней итерации не превысила 4%.

На рис. 4 показан пример реконструкции немонотонной функции $\bar{k} = 4 - 0,5\sin(\pi z)$. Начальное приближение $k_0(z) = 3,9 - 0,3z$. Потребовалось 7 итераций. Погрешность восстановления на последней итерации не превысила 3%.

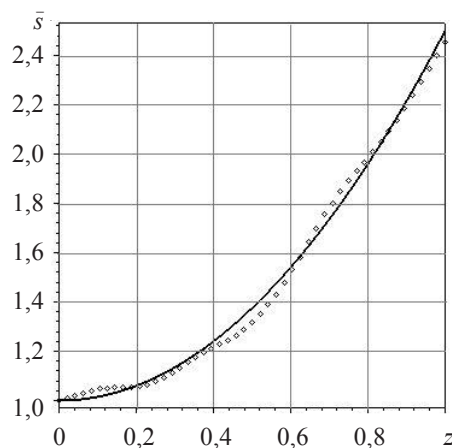


Рис. 1

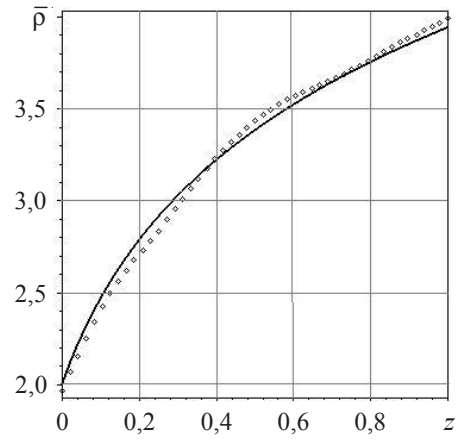


Рис. 2

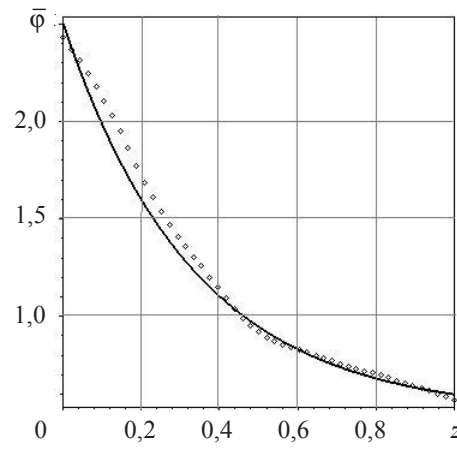


Рис. 3

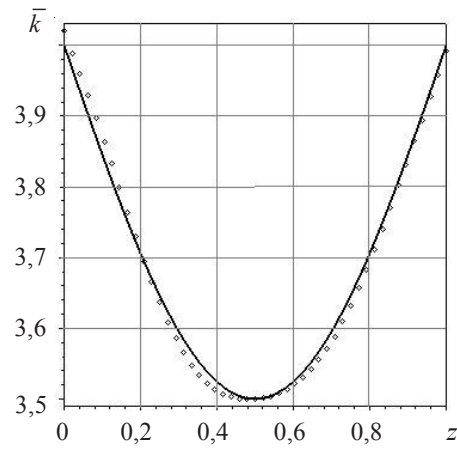


Рис. 4

Заключение

Представлен подход к нахождению неоднородных характеристик пороупругого цилиндра. Разработан метод решения прямой задачи о радиальных колебаниях неоднородного цилиндра на основе совместного применения преобразования Лапласа и метода пристрелки. Представлены результаты реконструкции неоднородных характеристик цилиндра.

Список литературы

1. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. *J. Acoustic. Soc. Am.* 1956. Vol. 28, No 2. P. 179–191.
2. Atalla N., Panneton R., Debergue P. A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials. *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. Vol. 104, No 3. P. 1444–1452.
3. Chadrasekharaiah D.S., Cowin S.C. A complete solution for a unified system of field equation of thermoelasticity and poroelasticity. *Acta Mechanica.* 1999. Vol. 99, No 1–4. P. 225–235.
4. Аменицкий А.В., Белов А.А., Игумнов Л.А. Гранично-элементный анализ динамической осадки пороупругой колонны. *Проблемы прочности и пластичности.* 2010. Вып. 72. С. 154–158.
5. Malla Reddy P., Tajuddin M. Exact analysis of plane-strain vibrations of thick-walled hollow poroelastic cylinders. *Int. J. of Solids and Structures.* 2000. Vol. 37. P. 3439–3456.
6. Abbas I. Natural frequencies of a poroelastic hollow cylinder. *Acta Mechanica.* 2006. Vol. 186. P. 229–237.
7. Ahmed Shah S. Axially symmetric vibrations of fluid-filled poroelastic circular cylindrical shells. *J. of Sound and Vibration.* 2008. Vol. 318. P. 389–405.
8. Shanker B., Manoj J., Shah S., Nageswara Nat. Radial vibrations of an infinitely long poroelastic composite hollow circular cylinder. *Int. J. Eng. Sci. Tech.* 2012. Vol. 4. P. 17–33.
9. Imomnazarov Kh. Kh., Kholmurodov A.E. Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in a porous media. *Math. and Computer Modeling.* 2007. Vol. 45, No 3–4. P. 270–280.
10. Ватульян А.О., Ляпин А.А. Об обратных коэффициентных задачах пороупругости. *Изв. РАН. МТТ.* 2013. №2. С. 114–121.
11. Ватульян А.О. К теории обратных коэффициентных задач в линейной механике деформируемого тела. *ПММ.* 2010. №6. С. 911–918.
12. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod. *Int. J. of Solids and Structures.* 2014. Vol. 51(3). P. 767–773.
13. Ватульян А.О., Нестеров С.А. Об одном способе идентификации термоупругих характеристик для неоднородных тел. *Инженерно-физический журнал.* 2014. Т. 87, №1. С. 217–224.
14. Ватульян А.О., Нестеров С.А. К определению неоднородных термомеханических характеристик трубы. *Инженерно-физический журнал.* 2015. Т. 88, №4. С. 951–959.
15. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *The Computer Journal.* 1974. Vol. 17. P. 371–376.
16. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. *Численные методы решения некорректных задач.* М.: Наука, 1990. 230 с.

References

1. Biot M.A. Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. *J. Acoustic. Soc. Am.* 1956. Vol. 28, No 2. P. 179–191.
2. Atalla N., Panneton R., Debergue P. A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials. *J. Acoust. Soc. Am.* 1998. Vol. 104, No 3. P. 1444–1452.
3. Chadrasekharaiah D.S., Cowin S.C. A complete solution for a unified system of field equation of thermoelasticity and poroelasticity. *Acta Mechanica.* 1999. Vol. 99, No 1–4. P. 225–235.
4. Amenitskiy A.V., Belov A.A., Igumnov L.A. Granichno-elementnyy analiz dinamicheskoy osadki porouprugoy kolonny. *Problemy prochnosti i plastichnosti.* 2010. Vyp. 72. S. 154–158.

5. Malla Reddy, Tajuddin M. Exact analysis of plane-strain vibrations of thick-walled hollow poroelastic cylinders. *Int. J. of Solids and Structures*. 2000. Vol. 37. P. 3439–3456.
6. Abbas I. Natural frequencies of a poroelastic hollow cylinder. *Acta Mechanica*. 2006. Vol. 186. P. 229–237.
7. Ahmed Shah S. Axially symmetric vibrations of fluid-filled poroelastic circular cylindrical shells. *J. of Sound and Vibration*. 2008. Vol. 318. P. 389–405.
8. Shanker B., Manoj J., Shah S., Nageswara Nat. Radial vibrations of an infinitely long poroelastic composite hollow circular cylinder. *Int. J. Eng. Sci. Tech.* 2012. Vol. 4. P. 17–33.
9. Imomnazarov Kh. Kh., Kholmurodov A.E. Direct and inverse dynamic problems for SH-waves in a porous media. *Math. and Computer Modeling*. 2007. Vol. 45, No 3–4. P. 270–280.
10. Vatulyan A.O., Lyapin A.A. Ob obratnykh koeffitsientnykh zadachakh porouprugosti. *Izv. RAN. MTT*. 2013. №2. S. 114–121.
11. Vatulyan A.O. K teorii obratnykh koeffitsientnykh zadach v lineynoy mekhanike deformiruemogo tela. *PMM*. 2010. №6. S. 911–918.
12. Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A. On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod. *Int. J. of Solids and Structures*. 2014. Vol. 51(3). P. 767–773.
13. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. Ob odnom sposobe identifikatsii termouprugikh kharakteristik dlya neodnorodnykh tel. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*. 2014. T. 87, №1. S. 217–224.
14. Vatulyan A.O., Nesterov S.A. K opredeleniyu neodnorodnykh termomekhanicheskikh kharakteristik truby. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*. 2015. T. 88, №4. S. 951–959.
15. Durbin F. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method. *The Computer Journal*. 1974. Vol. 17. P. 371–376.
16. Tikhonov A.N., Goncharskiy A.V., Stepanov V.V., Yagola A.G. *Chislennyye metody resheniya nekorrektnykh zadach*. M.: Nauka, 1990. 230 s.

ABOUT THE FEATURES OF IDENTIFICATION INHOMOGENEOUS POROELASTIC CHARACTERISTICS FOR HOLLOW CYLINDER

Vatulyan A.O., Nesterov S.A.

*Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science n.a. I.I. Vorovich
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russian Federation*

The coefficient inverse problem of finding poroelastic characteristics of inhomogeneous hollow cylinder is considered. Direct problem poroelasticity for the cylinder is solved by a method of adjustment. As additional information for solving the inverse problem appears measured displacement or pressure at the outer edge of the cylinder. To solve the inverse problem, based on the linearization method derived operator relations, establishing a relationship between a desired and measured characteristics. Poroelastic characteristics restored in two phases. The first phase was an initial approximation. The second stage amendments to the recoverable characteristics are determined from the solution of Fredholm integral equations of the 1st kind. For solutions of Fredholm integral equations of the 1st kind used method of A.N. Tikhonov. Concrete examples of the reconstruction of the characteristics of inhomogeneous poroelastic cylinder are given.

Keywords: poroelasticity, inverse problem, hollow cylinder, integral equations.