УДК 539.3

ДВУМЕРНАЯ НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА УПРУГОЙ ДИФФУЗИИ ДЛЯ ОРТОТРОПНОЙ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ*

Вестяк А.В.[1], **Земсков А.В.**[1], **Тарлаковский Д.В.**[2]

[1]*Московский авиационный институт (МАИ), Москва, Российская Федерация*
[2]*НИИ механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

azemskov1975@mail.ru

Поступила в редакцию 07.12.2015

Рассматривается двумерная нестационарная задача для ортотропной упругой полуплоскости с учетом диффузии. Используется локально равновесная модель механодиффузии, включающая в себя связанную систему уравнений движения упругого тела и уравнение массопереноса. Решение ищется в интегральной форме с помощью преобразований Лапласа по времени и Фурье по пространственным координатам. Обращение первого из них сводится к вычислению оригиналов рациональных функций и осуществляется аналитически. Для обращения преобразований Фурье используются квадратурные формулы.

Ключевые слова: механодиффузия, упругая диффузия, нестационарные задачи, полуплоскость, преобразования Лапласа и Фурье.

Введение

В последнее время большой научный интерес вызывают вопросы учета взаимодействия полей различной физической природы. В частности, актуальны задачи расчета напряженно-деформированного состояния конструкций и их элементов с учетом явлений массопереноса. Сложность экспериментальных исследований в этой области ввиду длительности диффузионных процессов приводит к необходимости построения математических моделей связанных процессов, разработки методов их решений и анализа. Наиболее общие постановки таких задач в рамках геометрически линейной локально равновесной теории механодиффузии приведены в [1–4].

В настоящей статье рассматривается двумерная нестационарная задача для упругой ортотропной полуплоскости с учетом диффузии, а также предлагается метод ее решения, основанный на использовании интегральных преобразований Лапласа и Фурье. Достоинством метода является то, что трансформанты Лапласа являются рациональными функциями, что существенно упрощает вопрос, связанный с их обращением.

* Выполнено при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-08-01161 А) и грантом Президента РФ НШ-2029.2014.8.

1. Постановка задачи

Рассматривается однородная ортотропная полуплоскость $x_2 \geq 0$, где Ox_1x_2 – прямоугольная декартова система координат. Полагается, что физико-механические процессы в ней без учета температурных эффектов описываются следующими уравнениями [1–4]:

$$C_{ijkl}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} = \ddot{u}_i + \alpha_{ij}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}, \quad D_{ij}\frac{\partial^2 \eta}{\partial x_i \partial x_j} = \dot{\eta} + \Lambda_{iljk}\frac{\partial^3 u_k}{\partial x_i \partial x_j \partial x_l}, \tag{1}$$

$$\begin{gathered} \sigma_{12}\big|_{x_2=0} = f_1(x_1,\tau), \quad u_2\big|_{x_2=0} = f_2(x_1,\tau), \quad J_2\big|_{x_2=0} = f_3(x_1,\tau), \\ \sigma_{12} = O(1), \quad u_2 = O(1), \quad J_2 = O(1) \quad (x_2 \to \infty), \end{gathered} \tag{2}$$

$$u_i\big|_{\tau=0} = \dot{u}_i\big|_{\tau=0} = \eta\big|_{\tau=0} = 0. \tag{3}$$

Здесь по повторяющимся латинским индексам подразумевается суммирование от 1 до 2, точками обозначены производные по параметру τ, а также используются следующие безразмерные параметры (при одинаковом написании они обозначены штрихом, который в дальнейшем изложении опущен):

$$x_i' = \frac{x_i}{L}, \quad u_i' = \frac{u_i}{L}, \quad \tau = \frac{Ct}{L}, \quad C^2 = \frac{C_{2222}}{\rho}, \quad \eta' = \frac{\eta}{n_0}, \quad C_{ijkl}' = \frac{C_{ijkl}}{\rho C^2}, \quad \alpha_{ij}' = \frac{n_0 \alpha_{ij}}{\rho C^2},$$

$$D_{ij}' = \frac{D_{ij}}{CL}, \quad \Lambda_{iljk}' = \frac{\Lambda_{iljk}}{n_0 CL}, \quad f_1' = \frac{f_1}{C_{1212}}, \quad f_2' = \frac{f_2}{L}, \quad f_3' = \frac{f_3}{n_0 C D_{22}},$$

где t – время; L – характерный линейный размер; $u_i(x_1, x_2, t)$ – координаты вектора перемещений; $\eta = n - n_0$ – приращение объемной концентрации атомов вещества n, образующего полуплоскость, относительно их начальной концентрации n_0; C_{ijkl} – компоненты тензора упругих постоянных; ρ – плотность среды; α_{ij} – компоненты тензора, характеризующие объемное расширение, связанное с массопереносом; D_{ij} – коэффициенты самодиффузии; $\Lambda_{iljk} = n_0 D_{il}\alpha_{jk}/(RT_0)$; T_0 – абсолютная температура среды; R – универсальная газовая постоянная; σ_{ij} и J_i – компоненты тензора напряжений и вектора диффузионного потока, определяемые так:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l} - \alpha_{ij}\eta, \quad J_i = \Lambda_{iljk}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_l \partial x_j} - D_{ij}\frac{\partial \eta}{\partial x_j}.$$

2. Метод решения

Пусть $G_{im} = u_i, G_{3m} = \eta\left(m = \overline{1,3}, i = 1,2\right)$ – функции Грина задачи (1)–(3), то есть решения задач, включающих в себя уравнения (1), начальные условия (3) и следующие граничные условия (здесь учтена ортотропность среды):

$$\left.\left(C_{12kl}\frac{\partial G_{km}}{\partial x_l}\right)\right|_{x_2=0} = \delta_{m1}\delta(x_1)\delta(\tau), \quad G_{2m}\big|_{x_2=0} = \delta_{m2}\delta(x_1)\delta(\tau),$$

$$\left.\left(\Lambda_{2l2k}\frac{\partial^2 G_{km}}{\partial x_l \partial x_2} - D_{22}\frac{\partial G_{3m}}{\partial x_2}\right)\right|_{x_2=0} = \delta_{m3}\delta(x_1)\delta(\tau),$$

$$\left(C_{12kl}\frac{\partial G_{km}}{\partial x_l}\right) = O(1), \quad G_{2m} = O(1), \Lambda_{2l2k}\frac{\partial^2 G_{km}}{\partial x_l \partial x_2} - D_{22}\frac{\partial G_{3m}}{\partial x_2} = O(1) \quad (x_2 \to \infty),$$

где $\delta(\tau)$ – дельта-функция Дирака, δ_{ij} – символ Кронекера.

Тогда решение задачи (1)–(3) имеет вид (звездочки обозначают свертки по времени τ и координате x_1) [4]:

$$u_i = \sum_{m=1}^{3} G_{im} ** f_m, \quad \eta = \sum_{m=1}^{3} G_{3m} ** f_m. \tag{4}$$

Далее к задаче (1)–(3) применяем преобразование Лапласа по времени и экспоненциальное преобразование Фурье по переменной x_1 (соответственно s и ω – их параметры, а индексы L и F обозначают трансформанты):

$$\begin{gathered} l_{11}\left(u_1^{FL}\right) - l_{12}\left(u_2^{FL}\right) + i\omega\alpha_{11}\eta^{FL} = 0, \quad -l_{12}\left(u_1^{FL}\right) + l_{22}\left(u_2^{FL}\right) + l_{23}\left(\eta^{FL}\right) = 0, \\ i\omega l_{31}\left(u_1^{FL}\right) + \left[l_{31}\left(u_2^{FL}\right)\right]' + l_{33}\left(\eta^{FL}\right) = 0; \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} m_1\left(u_1^{FL}, u_2^{FL}\right)\Big|_{x_2=0} = f_1^{FL}, \ u_2^{FL}\Big|_{x_2=0} = f_2^{FL}, \ m_2\left(u_1^{FL}, u_2^{FL}, \eta^{FL}\right)\Big|_{x_2=0} = f_3^{FL}, \\ m_1\left(u_1^{FL}, u_2^{FL}\right) = O(1), \quad u_2^{FL} = O(1), \quad m_2\left(u_1^{FL}, u_2^{FL}, \eta^{FL}\right) = O(1) \quad (x_2 \to \infty). \end{gathered} \tag{6}$$

Здесь (штрих везде означает производную по переменной x_2):

$$l_{\alpha\alpha}(u) = \kappa_\alpha(\omega, s)u - C_{\alpha 2}u'', \quad l_{12}(u) = l_{21}(u) = i\omega C_{21}u', \quad l_{23}(u) = \alpha_{22}u',$$

$$l_{3\alpha}(u) = (\Lambda_{2\alpha}u'' - \omega^2\Lambda_{1\alpha}u), \quad l_{33}(u) = \kappa_3(\omega, s)u - D_{22}u'',$$

$$m_1(u_1, u_2) = u_1' + i\omega u_2, \quad m_2(u_1, u_2, \eta) = (i\omega\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2')' - \eta',$$

$$\kappa_\alpha(\omega, s) = C_{1\alpha}\omega^2 + s^2, \quad \kappa_3(\omega, s) = D_{11}\omega^2 + s,$$

$$C_{11} = C_{1111}, \quad C_{22} = C_{2222} = 1, \quad C_{12} = C_{1212}, \quad C_{21} = C_{1122} + C_{1221},$$

$$\Lambda_{11} = \Lambda_{1111}, \quad \Lambda_{22} = \Lambda_{2222}, \quad \Lambda_{12} = \Lambda_{1122}, \quad \Lambda_{21} = \Lambda_{2211}, \quad \gamma_\alpha = \frac{\Lambda_{2\alpha}}{D_{22}} \quad (\alpha = 1, 2).$$

Решение задачи (5), (6) ищем в виде:

$$u_i^{FL} = U_i + \varphi_i, \quad \eta^{FL} = H + \psi, \tag{7}$$

где [4]:

$$\begin{gathered} \varphi_1(\omega, x_2, s) = -\left(f_1^{FL} - i\omega f_2^{FL}\right)\mathrm{e}^{-x_2}, \quad \varphi_2(\omega, x_2, s) = \mathrm{e}^{-x_2} f_2^{FL}, \\ \psi(\omega, x_2, s) = -\left[i\omega\gamma_1 f_1^{FL} + (\gamma_1\omega^2 + \gamma_2) f_2^{FL} - f_3^{FL}\right]\mathrm{e}^{-x_2}. \end{gathered} \tag{8}$$

Тогда для функций U_i и H получаем следующую краевую задачу:

$$\begin{gathered} l_{11}(U_1) - i\omega C_{21}U_2' + i\omega\alpha_{11}H = F_1, \quad -i\omega C_{21}U_1' + l_{22}(U_2) + \alpha_{22}H' = F_2, \\ i\omega l_{31}(U_1) + l_{31}(U_2') + l_{33}(H) = F_3; \end{gathered} \tag{9}$$

$$m_1(U_1, U_2)\Big|_{x_2=0} = 0, \quad U_2^{FL}\Big|_{x_2=0} = 0, \quad m_2(U_1, U_2, H)\Big|_{x_2=0} = 0,$$

$$m_1(U_1, U_2) = O(1), \quad U_2^{FL} = O(1), \quad m_2(U_1, U_2, H) = O(1) \quad (x_2 \to \infty).$$

Здесь

$$F_i(\omega, x_2, s) = \mathrm{e}^{-x_2}\sum_{j=1}^{3} B_{ij}(\omega, s) f_j^{FL}(s), \quad \gamma_3 = C_{12} - C_{21},$$

$$B_{11}(\omega,s) = -(\alpha_{11}\gamma_1\omega^2 + C_{12} - \kappa_1), \quad B_{12}(\omega,s) = i\omega[(\gamma_1\omega^2 + \gamma_2)\alpha_{11} + \gamma_3 - \kappa_1],$$

$$B_{21}(\omega,s) = i\omega(C_{21} - \alpha_{22}\gamma_1), \quad B_{22}(\omega,s) = \omega^2 C_{21} - \alpha_{22}(\gamma_1\omega^2 + \gamma_2) + 1 - \kappa_2,$$

$$B_{13}(\omega,s) = -i\omega\alpha_{11}, \quad B_{23}(\omega,s) = \alpha_{22}, \quad B_{33}(\omega,s) = D_{22} - \kappa_3,$$

$$B_{31}(\omega,s) = -i\omega(\Lambda_{11}\omega^2 - \gamma_1\kappa_3), \quad B_{32}(\omega,s) = \kappa_3(\gamma_1\omega^2 + \gamma_2) - \omega^2(\Lambda_{12} + \Lambda_{11}\omega^2).$$

Для решения полученной системы уравнений используем синус- и косинус-преобразования Фурье по переменой x_2 (их изображениям соответствуют верхние индексы S и C; p – параметр преобразования). При этих преобразованиях правые части уравнений в (9) имеют вид:

$$F_q^C(\omega,p,s) = \int_0^\infty F_q(\omega,x_2,s)\cos px_2 dx_2 = \frac{1}{1+p^2}\sum_{j=1}^3 B_{qj}(\omega,s) f_j^{FL}(s) \quad (q = 1, 3),$$

$$F_2^S(\omega,p,s) = \int_0^\infty F_2(\omega,x_2,s)\sin px_2 dx_2 = \frac{p}{1+p^2}\sum_{j=1}^3 B_{2j}(\omega,s) f_j^{FL}(s).$$

В результате получаем следующую систему уравнений:

$$k_1 U_1^C - i\omega p C_{21} U_2^S + i\omega\alpha_{11} H^C = F_1^C, \quad i\omega p C_{21} U_1^C + k_2 U_2^S - \alpha_{22} p H^C = F_2^S,$$

$$-i\omega k_4 U_1^C - p k_5 U_2^S + k_3 H^C = F_3^C,$$

где

$$k_\alpha(\omega,p,s) = \kappa_\alpha(\omega,s) + C_{\alpha 2} p^2 \quad (\alpha = 1, 2), \quad k_3(\omega,p,s) = \kappa_3(\omega,s) + D_{22} p^2,$$

$$k_4(\omega,p) = \omega^2\Lambda_{11} + p^2\Lambda_{21}, \quad k_5(\omega,p) = p^2\Lambda_{22} + \omega^2\Lambda_{12}.$$

Так как решения U_1^C, U_2^S, H^C этой системы являются линейными комбинациями функций f_m^{FL}, то, согласно (7), (8), таковыми будут и функции u_i^{FL} и η^{FL}. Следовательно, равенства (4) с учетом свойств преобразований Лапласа и Фурье записываются так:

$$u_1^{FLC} = \sum_{m=1}^3 G_{1m}^{FLC} f_m^{FL}, \quad u_2^{FLS} = \sum_{m=1}^3 G_{2m}^{FLS} f_m^{FL}, \quad \eta^{FLC} = \sum_{m=1}^3 G_{3m}^{FLC} f_m^{FL},$$

где

$$G_{lm}^{FLC}(\omega,p,s) = \frac{P_{lm}(\omega,p,s)}{P(\omega,p,s)} \quad (l = 1, 3), \quad G_{2m}^{FLS}(\omega,p,s) = \frac{P_{2m}(\omega,p,s)}{P(\omega,p,s)},$$

$$P(\omega,p,s) = k_3(k_1k_2 - C_{21}^2\omega^2p^2) + k_4\omega^2(\alpha_{22}C_{21}p^2 - \alpha_{11}k_2) + k_5p^2(C_{21}\alpha_{11}\omega^2 - \alpha_{22}k_1),$$

$$P_{11}(\omega,p,s) = -C_{12}(k_2k_3 - \alpha_{22}k_5p^2), \quad P_{13}(\omega,p,s) = -i\omega D_{22}(\alpha_{22}C_{21}p^2 - \alpha_{11}k_2),$$

$$P_{12}(\omega,p,s) = -i\omega[k_5p^2(\alpha_{11} - \alpha_{22}C_{12}) - \alpha_{11}k_5k_2 - C_{21}k_3p^2 + k_3k_2\gamma_3],$$

$$P_{21}(\omega,p,s) = iC_{12}\omega p(C_{21}k_3 - \alpha_{22}k_4), \quad P_{23}(\omega,p,s) = D_{22}p(\alpha_{22}k_1 - \alpha_{11}C_{21}\omega^2),$$

$$P_{22}(\omega,p,s) = p[\omega^2\gamma_3(C_{21}k_3 - \alpha_{22}k_4) + \omega^2\alpha_{11}(C_{21}k_5 - k_4) + k_1(k_3 - \alpha_{22}k_5)],$$

$$P_{31}(\omega,p,s) = -i\omega C_{12}(k_4k_2 - C_{21}k_5p^2), \quad P_{33}(\omega,p,s) = -D_{22}(C_{21}^2\omega^2p^2 - k_1k_2),$$

$$P_{32}(\omega,p,s) = -C_{12}\omega^2(k_4k_2 - C_{21}k_5p^2) - (C_{21}k_4\omega^2 - k_5k_1)(p^2 - k_2).$$

3. Определение оригиналов функций влияния

Поскольку функции G_{qm}^{FLC} и G_{2m}^{FLS} являются правильными рациональными дробями аргумента s, то переход в пространство оригиналов по Лапласу достаточно просто осуществляется с помощью вычетов. В реальных материалах $\alpha_{\alpha\alpha}\Lambda_{\beta\beta} \ll D_{\gamma\gamma} < 1$. С учетом этого неравенства с помощью критерия Рауса – Гурвица можно показать, что многочлен $P(\omega, p, s)$ имеет нули с отрицательной действительной частью: $s_1 = \bar{s}_2 = \alpha_1 + i\beta_1,\, s_4 = \bar{s}_5 = \alpha_2 + i\beta_2,\, \alpha_r < 0\ (r = 1, 2),\, s_3 < 0,\, s_3 \in \Re$, где i – мнимая единица. Следовательно, функции G_{qm}^{FC} и G_{2m}^{FS} имеют вид:

$$
\begin{gathered}
G_{qm}^{FC}(\omega, p, \tau) = \sum_{r=1}^{2} \mathrm{e}^{\alpha_r \tau}\left(A_{qm}^{(r1)} \cos\beta_r \tau - A_{qm}^{(r2)} \sin\beta_r \tau\right) + A_{qm}^{(3)} \mathrm{e}^{s_{3n}\tau} \quad (q = 1, 3), \\
G_{2m}^{FS}(\omega, p, \tau) = \sum_{r=1}^{2} \mathrm{e}^{\alpha_r \tau}\left(A_{2m}^{(r1)} \cos\beta_r \tau - A_{2m}^{(r2)} \sin\beta_r \tau\right) + A_{2m}^{(3)} \mathrm{e}^{s_{3n}\tau},
\end{gathered} \tag{10}
$$

где

$$
A_{im}^{(r1)} = 2\,\mathrm{Re}\frac{P_{im}(\omega, p, s_r)}{P'(\omega, p, s_r)}, \quad A_{im}^{(r2)} = 2\,\mathrm{Im}\frac{P_{im}(\omega, p, s_r)}{P'(\omega, p, s_r)}, \quad A_{im}^{(3)} = \frac{P_{im}(\omega, p, s_3)}{P'(\omega, p, s_3)} \quad \left(i = \overline{1, 3}\right).
$$

Штрих означает производную по параметру s.

Оригиналы синус- и косинус-преобразований запишем в виде интегралов:

$$
\begin{gathered}
G_{qm}^{F}(\omega, x_2, \tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty G_{qm}^{FC}(\omega, p, \tau)\cos px_2 dp, \quad q = 1, 3, \\
G_{2m}^{F}(\omega, x_2, \tau) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty G_{2m}^{FS}(\omega, p, \tau)\sin px_2 dp.
\end{gathered} \tag{11}
$$

Функции G_{3m}^{FC} $(m = 2, 3)$ в интегралах (11) при $\tau = 0$ имеют разрыв первого рода [4]. Это связано с асимптотикой их изображений по Лапласу при $s \to \infty$:

$$
G_{32}^{FLC}(\omega, p, s) \sim -k_5 s^{-1}, \quad G_{33}^{FLC}(\omega, p, s) \sim D_{22} s^{-1}.
$$

Для выделения этой особенности представляем изображения так:

$$
G_{3m}^{FL}(\omega, x_2, s) = S_{3m}^{FL}(\omega, x_2, s) + R_{3m}^{FL}(\omega, x_2, \tau),
$$

$$
\begin{Bmatrix} S_{3m}^{FL}(\omega, x_2, s) \\ R_{3m}^{FL}(\omega, x_2, s) \end{Bmatrix} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \begin{Bmatrix} S_{3m}^{FLC}(\omega, p, s) \\ R_{3m}^{FLC}(\omega, p, s) \end{Bmatrix} \cos px_2 dp,
$$

где

$$
S_{32}^{FLC}(\omega, p, s) = -\frac{k_5(\omega, p)}{k_3(\omega, p, s)}, \quad S_{33}^{FLC}(\omega, p, s) = \frac{D_{22}}{k_3(\omega, p, s)},
$$

$$
R_{32}^{FLC}(\omega, p, s) = \frac{T_{32}(\omega, p, s)}{k_3(\omega, p, s)P(\omega, p, s)}, \quad R_{33}^{FLC}(\omega, p, s) = \frac{T_{33}(\omega, p, s)}{k_3(\omega, p, s)P(\omega, p, s)},
$$

$$
T_{32}(\omega, p, s) = k_3(\omega, p, s)P_{32}(\omega, p, s) + k_5(\omega, p)P(\omega, p, s),
$$

$$
T_{33}(\omega, p, s) = k_3(\omega, p, s)P_{33}(\omega, p, s) - D_{22}P(\omega, p, s).
$$

Оригиналы преобразования Лапласа, а также синус- и косинус-преобразования для функций $S_{3m}^{FLC}(\omega, p, s)$ имеют вид [4]:

$$S_{32}^{F}(\omega, x_2, \tau) = -\sqrt{\frac{1}{\pi D_{22}\tau}}\left(\Lambda_{12}\omega^2 + \Lambda_{22}\frac{2D_{22}\tau - x_2}{4(D_{22}\tau)^2}\right)\mathrm{e}^{-\left(D_{11}\omega^2\tau + x_2^2/(4D_{22}\tau)\right)},$$

$$S_{33}^{F}(\omega, x_2, \tau) = \sqrt{\frac{D_{22}}{\pi\tau}}\mathrm{e}^{-\left(D_{11}\omega^2\tau + x_2^2/(4D_{22}\tau)\right)}.$$

Обращение преобразования Лапласа коэффициентов $R_{3m}^{FLC}(\omega, s)$ как рациональных функций проводится аналогично (11) с учетом того, что появляется дополнительный полюс $s_6 = -(D_{11}\omega^2 + D_{22}p^2)$.

Для обращения преобразований Фурье удобнее сначала найти свертки (5) по времени с функциями (10). Далее оригиналы трансформант Фурье находятся по формулам (звездочка обозначает свертку по времени):

$$\Phi(x_1, x_2, \tau) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{i\omega x_1}d\omega\int_{0}^{\infty}\begin{Bmatrix} G_{qm}^{FC} \\ G_{qm}^{FS}\end{Bmatrix} * f_m^F\begin{Bmatrix}\cos px_2 \\ \sin px_2\end{Bmatrix}dp, \qquad (12)$$

где Φ – одна из искомых функций u_i, η.

Интеграл (12) находится численно с помощью квадратурных формул.

4. Примеры

В качестве модели анизотропной среды рассмотрим осредненную (гомогенизированную) среду из чередующихся слоев алюминия и меди. Эффективные модули такой среды могут быть найдены, в частности, с помощью асимптотической процедуры осреднения [5, 6]:

$$C_{1111} = 1{,}40\cdot10^{11}\ \text{Н/м}^2,\ C_{2222} = 1{,}236\cdot10^{11}\,\text{Н/м}^2,$$

$$C_{1212} = 3{,}14\cdot10^{10}\,\text{Н/м}^2,\ C_{1122} = 1{,}03\cdot10^{11}\,\text{Н/м}^2,$$

$$T_0 = 773\ \text{К},\quad \rho = 5815\ \text{кг/м}^3,\quad \alpha_{11} = 2{,}93\cdot10^6,\quad \alpha_{22} = 2{,}69\cdot10^6,$$

$$D_{11} = 7{,}36\cdot10^{-6}\ \text{м}^2/\text{с},\quad D_{22} = 7{,}30\cdot10^{-6}\ \text{м}^2/\text{с},\quad L = 1\ \text{м}.$$

Предполагается, что правые части граничных условий имеют вид:

$$f_1(x_1, \tau) = f_2(x_1, \tau) \equiv 0,\quad f_3(x_1, \tau) = \mathrm{e}^{-\varepsilon x_1^2}H(\tau),$$

$$f_3^F(\omega, \tau) = f(\omega)H(\tau),\quad f(\omega) = (\pi/\varepsilon)^{1/2}\mathrm{e}^{-\omega^2/(4\varepsilon)},\quad \varepsilon = 0{,}01.$$

Тогда, вычисляя свертки по времени в (5), получаем, что образы Фурье для перемещений и приращения концентрации определяются равенствами [7]:

$$u_1^F(\omega, x_2, \tau) = f(\omega)\int_0^{\infty}\left[\sum_{r=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}A_{13}^{(rn)}I_n(\alpha_r, \beta_r, \tau) + A_{13}^{(3)}I_3(s_3, \tau)\right]\cos px_2dp,$$

$$u_2^F(\omega, x_2, \tau) = f(\omega)\int_0^{\infty}\left[\sum_{r=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}A_{23}^{(rn)}I_n(\alpha_r, \beta_r, \tau) + A_{23}^{(3)}I_3(s_3, \tau)\right]\sin px_2dp,$$

$$\eta^F(\omega, x_2, \tau) = \frac{1}{\delta\omega^2}\mathrm{e}^{-\delta\omega^2 x_2}f(\omega) - \frac{\omega}{2}\sqrt{\delta}\left[\Psi_1(\omega, x_2, \tau) + \Psi_2(\omega, x_2, \tau)\right]f(\omega) +$$

$$+ f(\omega)\int\limits_0^\infty \sum_{r=1}^{2}\sum_{n=1}^{2}(-1)^{n+1}A_{33}^{(rn)}I_n(\alpha_r,\beta_r,\tau)\cos px_2dp +$$

$$+ f(\omega)\int\limits_0^\infty [A_{33}^{(3)}I_3(s_3,\tau) + A_{33}^{(4)}I_3(-D_{11}\omega^2 + D_{22}p^2,\tau)]\cos px_2dp, \quad \delta = \frac{D_{11}}{D_{22}},$$

где

$$I_1(\alpha,\beta,\tau) = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}[\mathrm{e}^{\alpha\tau}(\beta\sin\beta\tau + \alpha\cos\beta\tau) - \alpha],$$

$$I_2(\alpha,\beta,\tau) = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}[\mathrm{e}^{\alpha\tau}(\alpha\sin\beta\tau - \beta\cos\beta\tau) + \beta], \quad I_3(\alpha,\tau) = \frac{\mathrm{e}^{\alpha\tau}-1}{\alpha},$$

$$\Psi_{1,2}(\omega,x_2,\tau) = \mathrm{e}^{\mp\sqrt{(D_{11}/D_{22})}\omega x_2}\ \mathrm{Erfc}\left(\sqrt{D_{11}\tau}\omega \mp \frac{x_2}{2\sqrt{\tau D_{22}}}\right).$$

Оригиналы этих выражений находятся численно с помощью алгоритма, изложенного в конце п. 3. Результаты вычислений продемонстрированы на рис. 1–3.

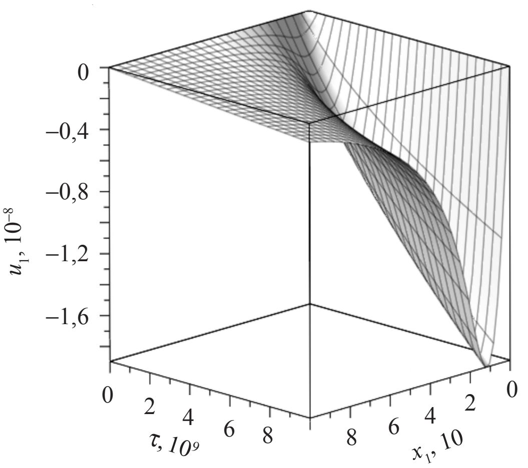

Рис. 1. Зависимость перемещения u_1 от x_1 и τ при $x_2 = 0{,}5$

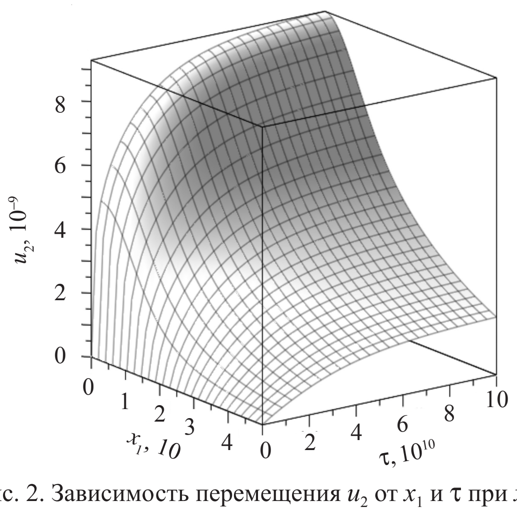

Рис. 2. Зависимость перемещения u_2 от x_1 и τ при $x_2 = 0{,}5$

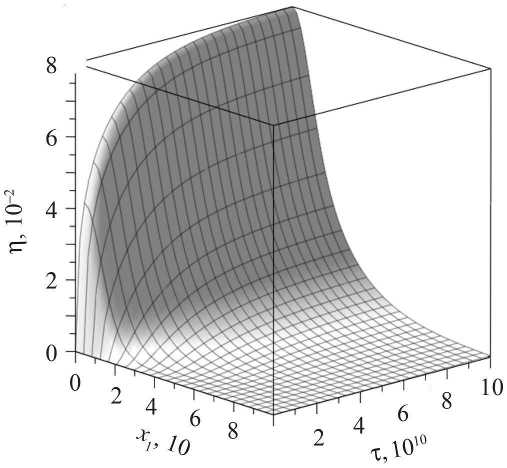

Рис. 3. Зависимость приращения концентрации η от x_1 и τ при $x_2 = 0{,}5$

Расчеты проводились для $N_y = 100$ точек разбиения при обращении синус- и косинус-преобразований Фурье, $N_x = 50$ точек разбиения для вычисления обратного преобразования Фурье. Отметим, что при уменьшении вдвое шага разбиения графики практически совпадают.

Список литературы

1. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Dynamic processes in thermoelectromagnetoelastic and thermoelastodiffusive media. *Encyclopedia of Thermal Stress. Vol. 2, C-D*. Dordrecht–Heidelberg–New-York–London: Springer reference, 2014. P. 1064–1071.

2. Еремеев В.С. *Диффузия и напряжения*. М.: Энергоатомиздат, 1984. 182 с.

3. Князева А.Г. *Введение в локально-равновесную термодинамику физико-химических превращений в деформируемых средах.* Томск: Томский госуниверситет, 1996. 146 с.

4. Земсков А.В., Тарлаковский Д.В. Двумерная нестационарная задача упругой диффузии для изотропной однокомпонентной полуплоскости. *Ученые записки Казанского университета. Серия Физико-математические науки*. 2015. Т. 157. Кн. 4. С. 103–111.

5. Моргунов Б.И. *Математический анализ физико-механических процессов*. М.: МИЭМ, 1995. 151 с.

6. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Method of averaging in problems of thermoelasticity of composite materials. *Encyclopedia of Thermal Stress. Vol. 6, L-M*. Dordrecht–Heidelberg–New-York–London: Springer reference, 2014. P. 2982–2990.

7. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И. *Интегралы и ряды. Т. 1. Элементарные функции.* М.: Наука, 1981. 797 с.

References

1. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Dynamic processes in thermoelectromagnetoelastic and thermoelastodiffusive media. *Encyclopedia of Thermal Stress. Vol. 2, C-D*. Dordrecht–Heidelberg–New-York–London: Springer reference, 2014. P. 1064–1071.

2. Eremeev V.S. *Diffuziya i napriazheniya*. M.: Energoatomizdat. 1984. 182 s.

3. Knyazeva A.G. *Vvedenie v lokal'no-ravnovesnuyu termodinamiku fiziko-khimicheskikh prevrascheniy v deformiruemykh sredakh*. Tomsk: Tomskiy gosuniversitet, 1996. 146 s.

4. Zemskov A.V., Tarlakovskii D.V. Dvumernaia nestatsionarnaia zadacha uprugoi diffuzii dlya izotropnoy odnokomponentnoy poluploskosti. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta. Seriya Fiziko-matematicheskie nauki.* 2015. T. 157. Kn. 4. S. 103–111.

5. Morgunov B.I. *Matematicheskiy analiz fiziko-mekhanicheskikh protsessov*. M.: MIEM, 1995. 151 s.

6. Tarlakovskii D.V., Vestyak V.A., Zemskov A.V. Method of averaging in problems of thermoelasticity of composite materials. *Encyclopedia of Thermal Stress. Vol. 6, L-M*. Dordrecht–Heidelberg–New-York–London: Springer reference, 2014. P. 2982–2990.

7. Prudnikov A.P., Brychkov Iu.A., Marichev O.I. *Integraly i ryady. T. 1. Elementarnye funktsii.* M.: Nauka, 1981. 797 s.

TWO-DIMENSIONAL UNSTEADY PROBLEM OF ELASTICITY WITH DIFFUSION FOR ORTHOTROPIC ONE-COMPONENT HALF-PLANE

Vestyak A.V.[1], Zemskov A.V.[1], Tarlakovskii D.V.[2]

[1]*Moscow Aviation Institute (MAI), Moscow, Russian Federation*
[2]*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University*, *Moscow, Russian Federation*

The two-dimensional unsteady state problem for elastic orthotropic half-plane with diffusion effect is investigated. In order to solve the problem, the local-equilibrium model of mechanical diffusion is used. This model consists of a system of equations, which describe law of motion and mass transfer. The problem is found with help of Laplace and Fourier transformations. The inverse Laplace transformation is reduced to the calculation of the originals of rational functions and performed analytically. For inverse Fourier transformation is used quadrature formulas.

Keywords: mechanical diffusion, diffusion with elasticity, unsteady state problems, half-plane, Laplace transform, Fourier transform.