

УДК 541.186

## ВРАЩАТЕЛЬНАЯ ДИНАМИКА СИСТЕМЫ ИЗ ДВУХ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ\*

© 2015 г. Смирнов Л.А.<sup>1,2</sup>, Крюков А.К.<sup>1</sup>, Кадина Е.Ю.<sup>1</sup>,  
Губина Е.В.<sup>1</sup>, Осипов Г.В.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
Нижний Новгород, Российская Федерация

<sup>2</sup>Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, Российская Федерация

smirnov.lev.al@gmail.com, alkryukov@gmail.com

Поступила в редакцию 16.09.2015

Исследованы особенности динамики двух нелинейно связанных маятников. При наличии затухания и постоянного внешнего воздействия в такой системе кроме состояний равновесия может существовать синфазный вращательный предельный цикл. С помощью прямого численного моделирования показано, что при определенных значениях параметра, характеризующего связь между маятниками, этот синфазный предельный цикл становится неустойчивым. Для малой диссипации построена асимптотическая теория, объясняющая причины потери устойчивости синфазного предельного движения. Найдены аналитические выражения для границ зоны этой неустойчивости. Численными расчетами установлено, что существует интервал значений силы связи, внутри которого в рассматриваемой системе, помимо устойчивого синфазного предельного цикла, имеются также два (устойчивый и неустойчивый) несинфазных предельных цикла. Другими словами, для нелинейно связанных маятников продемонстрировано наличие бистабильности их предельных периодических движений. Подробно проанализированы бифуркации, приводящие к возникновению и исчезновению несинфазных режимов вращения.

*Ключевые слова:* маятник, коллективная динамика, синфазный режим, параметрическая неустойчивость.

### Введение

Система из двух связанных маятников является одной из базовых моделей в различных областях физики. Она адекватно описывает не только механические объекты, но и разнообразные процессы в электрических цепях, полупроводниковых структурах, молекулярной биологии и т.д. [1–3]. В частности, такая модель применяется для анализа систем фазовой синхронизации [4]. Помимо этого она часто используется при теоретическом рассмотрении связанных джозефсоновских контактов [5–10] и гранулированных сверхпроводников [11].

\* Выполнено при поддержке Минобрнауки РФ (соглашение №02.В.49.21.0003 между Министерством образования и науки РФ и ННГУ им. Н.И. Лобачевского, п. 2) и РНФ (проект 14-12-00811, п. 3).

Особую роль аналогия с маятниками играет, когда речь идет об изучении вращательных колебаний оснований молекул ДНК [3] и о формировании так называемых открытых состояний [12–14], являющихся важным и необходимым элементом функционирования такой молекулы [15].

Имея представление о поведении двух связанных нелинейных осцилляторов, можно сделать обобщение на цепочки маятников типа и продвинуться в понимании их динамических свойств, интерес к которым вызван большим количеством физических приложений, где применима модель Френкеля – Конторовой или ее модификации [2, 16, 17]. Кроме приведенных выше примеров, можно еще выделить цепочки взаимодействующих спинов в ферромагнетиках [18–20] и скручивание цепочек в полимерных кристаллах [21–23].

### 1. Постановка задачи

Рассмотрим два маятника с равными массами, которые упруго связаны между собой с помощью пружины и совершают индивидуальные движения в присутствии силы тяжести строго в плоскостях, перпендикулярных линии подвеса (рис. 1). Движение этих маятников описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка [24]:

$$\frac{d^2\varphi_1}{dt^2} + \lambda \frac{d\varphi_1}{dt} + \sin \varphi_1 = \gamma + g \sin(\varphi_2 - \varphi_1), \quad (1)$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dt^2} + \lambda \frac{d\varphi_2}{dt} + \sin \varphi_2 = \gamma + g \sin(\varphi_1 - \varphi_2), \quad |\varphi_1 - \varphi_2| \leq \pi. \quad (2)$$

Здесь  $\lambda$  – коэффициент затухания, ответственный за все имеющиеся диссипативные процессы.

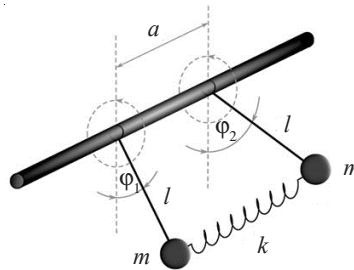


Рис. 1

Положение маятников характеризуется углами отклонения от вертикальной оси  $\varphi_1, \varphi_2$ . Постоянное внешнее воздействие на каждый из маятников учтено посредством параметра  $\gamma$ , а параметр  $g$  характеризует силу нелинейной связи между маятниками.

В рассматриваемом случае несложно найти состояния равновесия, приравняв нулю первые и вторые производные функций  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  по времени  $t$ . В зависимости от соотношений между  $\gamma$  и  $g$  у системы (1), (2) имеются от шести до нуля состояний равновесия. Такие состояния (если они есть) являются или устойчивыми фокусами (узлами), или седлами. Однако в ряде ситуаций два связанных маятника демонстрируют необычное поведение. Отметим, что когда в любой момент времени координаты  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  совпадают друг с другом, то есть  $\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi(t)$ , связанные маятни-

ки движутся синфазно и их динамика описывается одним уравнением находящегося под действием постоянной внешней силы нелинейного осциллятора с затуханием:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \lambda \frac{d\varphi}{dt} + \sin \varphi = \gamma. \quad (3)$$

Поведение такого осциллятора хорошо изучено [25, 26].

На рис. 2 показана плоскость параметров  $\lambda, \gamma$ . Она разбита на три области S, B и R прямой  $\gamma = 1$  и бифуркционной кривой T, которую часто называют кривой Трикоми [25–27].

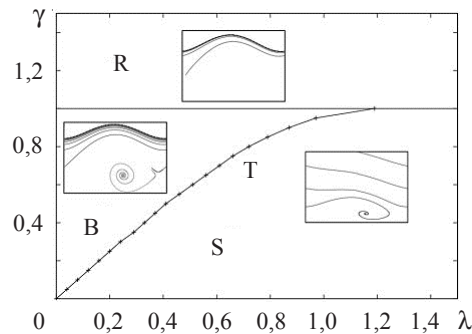


Рис. 2

Области соответствуют различным структурно устойчивым фазовым портретам системы, подчиняющейся уравнению (3). Для значений параметров  $\lambda, \gamma$  из области S у нелинейного осциллятора имеются только два состояния равновесия (на цилиндре), а именно седло и фокус (или узел). Для значений параметров  $\lambda, \gamma$  из области B устойчивый предельный цикл сосуществует с устойчивым фокусом (или узлом), область притяжения которого ограничивается устойчивыми сепаратрисами седла. При значениях параметров  $\lambda, \gamma$  из полуплоскости R состояния равновесия отсутствуют и осциллятор всегда стремится выйти на предельное периодическое движение, являющееся единственным аттрактором.

Таким образом, при определенных соотношениях между  $\lambda$  и  $\gamma$  в четырехмерном фазовом пространстве  $\varphi_1, \dot{\varphi}_1, \varphi_2, \dot{\varphi}_2$  заведомо существует синфазный предельный цикл [28, 29].

## 2. Параметрическая неустойчивость синфазного режима вращения двух связанных маятников

Проанализируем подробно случай малой диссипации, когда коэффициент затухания  $\lambda \ll 1$ . Предположим также, что характеризующее внешнюю силу значение  $\gamma$  лежит на плоскости  $\lambda, \gamma$  достаточно далеко от кривой Трикоми, то есть будем считать, что величина  $\gamma$  близка к единице. В этой ситуации удастся построить формализованную асимптотическую теорию, объясняющую причины возникновения наблюдаемой при прямом численном моделировании системы уравнений (1), (2) неустойчивости синфазного предельного режима вращения двух связанных маятников. Аналитический подход основан на наличии в задаче малого параметра  $\epsilon$ , пропорционального квадрату коэффициента затухания  $\lambda$ . Как показывают числен-

ные расчеты, область применимости полученных результатов достигает значений  $\lambda \sim 0,5$ .

Перейдем от координат маятников  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  к полусумме и полуразности координат:

$$\eta = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}, \quad \xi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}. \quad (4)$$

Для удобства дальнейших выкладок введем новое безразмерное время

$$\tau = \frac{\gamma t}{\lambda}. \quad (5)$$

В итоге исходная система уравнений (1), (2) преобразуется к виду

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + \epsilon\kappa\gamma \frac{d\eta}{d\tau} + \epsilon\kappa \sin \eta \cos \xi = \epsilon\kappa\gamma, \quad (6)$$

$$\frac{d^2\xi}{d\tau^2} + \epsilon\kappa\gamma \frac{d\xi}{d\tau} + \epsilon\kappa \sin \xi \cos \eta = -\epsilon\kappa\gamma \sin 2\xi. \quad (7)$$

Здесь величина  $\lambda^2/\gamma^2$  представлена в виде сомножителей  $\epsilon \ll 1$  и  $\kappa$ :

$$\frac{\lambda^2}{\gamma^2} = \epsilon\kappa. \quad (8)$$

Для  $\lambda$  и  $\gamma$  из интересующих нас диапазонов значений параметров рассматриваемой системы при синфазном движении двух связанных маятников ( $\xi(\tau) = 0$ ) существует вращательный предельный цикл [28, 29]. Для того чтобы исследовать устойчивость такого синфазного режима вращения двух маятников, считаем, что между ними имеется отличная от нуля малая расстройка  $\xi(\tau)$ , которая остается в течение продолжительного временного отрезка (на протяжении нескольких периодов вращения) малой величиной, не превосходящей по порядку  $\epsilon$ . Другими словами, предполагаем, что

$$\xi(\tau) = \epsilon\xi_0(\tau) + o(\epsilon^2), \quad (9)$$

где  $o(\epsilon^2)$  обозначает члены, имеющие порядок  $\epsilon^2$  и выше.

Функцию  $\eta(\tau)$  представляем в виде суммы двух слагаемых:

$$\eta(\tau) = \phi(\tau) + \psi(\tau). \quad (10)$$

Слагаемое  $\phi(\tau)$  характеризует синфазный вращательный предельный цикл, который устойчив в отсутствие связанных с  $\epsilon(\tau)$  возмущений и удовлетворяет уравнению движения:

$$\frac{d^2\phi}{d\tau^2} + \epsilon\kappa\gamma \frac{d\phi}{d\tau} + \epsilon\kappa \sin \phi = \epsilon\kappa\gamma. \quad (11)$$

Слагаемое  $\psi(\tau)$  описывает процесс постепенного (в течение нескольких оборотов маятников) установления предельного периодического движения, то есть выход на вращательный предельный цикл из расположенной вблизи него произвольной точки фазового пространства, а также влияние расстройки  $\xi(\tau)$  на  $\eta(\tau)$ . Из соотношений (6), (10) и (11) следует, что имеет место уравнение

$$\frac{d^2\psi}{d\tau^2} + \varepsilon\kappa\gamma \frac{d\psi}{d\tau} + \varepsilon\kappa \cos \xi \cos \phi \sin \psi + \varepsilon\kappa(\cos \xi \cos \psi - 1) \sin \phi = 0. \quad (12)$$

При наличии малого параметра  $\varepsilon$  в синфазном вращательном предельном цикле, то есть периодическом на цилиндре решении уравнения (11), в  $\phi(\tau)$  можно выделить основную монотонно растущую во времени часть и малые поправки к ней:

$$\phi(\tau) = (\tau - \tau_0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon^j \phi_j(\tau). \quad (13)$$

Здесь постоянная  $\tau_0 = \text{const}$  определяется начальными условиями, а каждый член  $\phi_i(\tau)$  ( $i = 1, 2, \dots$ ) асимптотического по  $\varepsilon$  ряда представляет собой ограниченную периодически изменяющуюся функцию переменной  $\tau$ . Нетрудно показать, что

$$\phi_1(\tau) = \varepsilon\kappa \sin(\tau - \tau_0) = \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \sin\left(\frac{\gamma}{\lambda} t - \tau_0\right). \quad (14)$$

Рассматриваемая система достаточно долго находится вблизи синфазного вращательного предельного цикла, поэтому решение уравнения (12) формально можно искать в виде следующего асимптотического по  $\varepsilon$  разложения:

$$\psi(\tau) = \varepsilon^{1/2} \psi_0(\varepsilon\tau) \left[ 1 + \sum_{j=1}^{+\infty} \varepsilon^{(j+1)/2} \psi_j(\tau) \right], \quad (15)$$

где общий множитель  $\psi_0(\varepsilon\tau)$  является медленной функцией нового времени  $\tau$ . Приравняв друг другу слагаемые одного порядка малости, получаем, что

$$\psi_1(\tau) = \varepsilon\kappa \cos(\tau - \tau_0) = \frac{\lambda^2}{\gamma^2} \cos\left(\frac{\gamma}{\lambda} t - \tau_0\right). \quad (16)$$

Принимая во внимание медленность изменения функции  $\psi_0(\varepsilon\tau)$  и используя процедуру усреднения, находим, что

$$\psi_0(\varepsilon\tau) = \Psi_0 \exp(-\varepsilon\kappa\gamma\tau) = \Psi_0 \exp(-\lambda t), \quad (17)$$

где  $\Psi_0 = \text{const}$  – постоянная величина, которая, как и  $\tau_0$ , определяется начальными условиями. Из (15) и (17) видно, что возмущения, описываемые с помощью  $\psi(\tau)$ , затухают на временах порядка  $\lambda^{-1}$ . Другими словами, для интересующих нас процессов с длительностью, превышающей  $\lambda^{-1}$ , слагаемое  $\psi(\tau)$  в соотношении (10) можно не учитывать. При этом основное влияние на поведение расстройки  $\xi(\tau)$  между координатами  $\phi_1(\tau)$  и  $\phi_2(\tau)$  будет оказывать явным образом выделенная в их полусумме  $\eta(\tau)$  функция  $\phi(\tau)$ , непосредственно характеризующая только синфазный вращательный предельный цикл.

Предположим, что с момента начала движения двух связанных маятников прошло достаточное количество времени ( $\Delta t \sim \lambda^{-1}$ ). Учитывая в уравнении (7) основные значимые в иерархии по малому параметру  $\varepsilon$  члены, для расстройки  $\xi(\tau)$  получаем уравнение, которое можно воспринимать как уравнение с периодически меняющимися коэффициентами. Естественно предположить, что при изменении величины  $g$ , ответственной за связь между двумя маятниками, в поведении функции  $\xi(\tau)$  возможно проявление эффектов параметрической неустойчивости [30].

Действительно, рассмотрим такие  $g$ , для которых частота  $\omega_p = 1$  синфазного вращательного предельного цикла слабо отличается от удвоенной частоты

$$\omega_0 = \sqrt{2\varepsilon\kappa g} = \sqrt{2g} \frac{\lambda}{\gamma} \quad (18)$$

собственных линейных осцилляций функции  $\xi(\tau)$ , то есть разность  $\omega_p - 2\omega_0$  является малой величиной порядка  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon\Omega = \omega_p - 2\omega_0 = 1 - 2\sqrt{2\varepsilon\kappa g} = 1 - 2\sqrt{2g} \frac{\lambda}{\gamma}, \quad (19)$$

где  $\Omega \sim 1$ . Фактически это окрестность первой зоны предполагаемой параметрической неустойчивости [30]. Нас интересуют достаточно большие значения  $g$ , и можно считать, что выполняется условие  $g^{-1} \sim \varepsilon$ .

Будем искать решение уравнения (7) в виде (9), где основное слагаемое  $\xi_0(\tau)$  представим как

$$\xi_0(\tau) = \text{Re}[\Xi(\varepsilon\tau) \exp(i(\tau - \tau_0)/2)], \quad (20)$$

где  $\Xi(\varepsilon\tau)$  – комплексная амплитуда, плавно изменяющаяся во времени  $\tau$ . Приравняем друг другу члены одного порядка малости и, воспользовавшись медленностью функции  $\Xi(\varepsilon\tau)$ , усредним полученное соотношение по периоду предельного синфазного вращения двух маятников. В итоге придем к следующему укороченному уравнению для  $\Xi(\varepsilon\tau)$ :

$$\frac{d\Xi}{d\tau} = -\frac{\varepsilon}{2}(\kappa\gamma + i\Omega)\Xi + i\frac{\varepsilon}{2}\kappa\Xi^*, \quad (21)$$

где  $\Xi^*(\varepsilon\tau)$  комплексно-сопряженная величина по отношению к  $\Xi(\varepsilon\tau)$ .

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$\Xi \propto \exp(p_{1,2}\tau) = \exp\left(\frac{\gamma}{\lambda} p_1 t\right), \quad (22)$$

где показатели экспонент соответственно равны

$$p_{1,2} = \frac{\varepsilon}{2} \left( -\kappa\gamma \pm \sqrt{\kappa^2 - \Omega^2} \right) = \frac{1}{2\gamma^2} \left( -\lambda^2\gamma \pm \sqrt{\lambda^4 - \gamma^2(\gamma - 2\sqrt{2g}\lambda)^2} \right). \quad (23)$$

Из выражений (23) следует, что  $p_1$  является действительной положительной величиной, когда параметр связи  $g$  лежит в интервале  $g_1 < g < g_2$ , где

$$g_{1,2} = \frac{1}{8} \left( \frac{\gamma}{\lambda} \mp \frac{\lambda}{\gamma} \sqrt{1 - \gamma^2} \right)^2. \quad (24)$$

Это означает, что расстройка  $\xi(\tau)$  экспоненциально нарастает во времени с инкрементом  $p_1$  на начальном этапе, то есть развивается своеобразная параметрическая неустойчивость до тех пор, пока ее не остановят нелинейные эффекты, которые не были учтены. Максимально быстрый рост возмущений  $\xi(\tau)$  с показателем

$$p_{1\max} = \frac{\lambda^2}{2\gamma^2} (1 - \gamma) \quad (25)$$

происходит при значении  $g_* = \gamma^2/(8\lambda^2)$ , соответствующем центральной точке интервала  $g_1 < g < g_2$ . Особо отметим, что, согласно выражениям (24) и (25), параметрическая неустойчивость возможна только тогда, когда  $\gamma < 1$ . Данный вывод полностью согласуется с численными расчетами, выполненными в рамках уравнений (1), (2).

### 3. Рождение несинфазных вращательных предельных циклов. Возникновение бистабильности предельных режимов вращения двух связанных маятников

На рис. 3 наглядно продемонстрировано, как развивается параметрическая неустойчивость в случае, когда коэффициент затухания  $\lambda = 0,16$ , вращательный момент  $\gamma = 0,99$ , а параметр связи  $g = 4,775$  лежит внутри интервала значений  $g_1 \approx 4,750 < g < g_2 \approx 4,820$ . При численном моделировании в качестве начальных условий случайным образом выбирались координаты точки  $\varphi_{10}, \dot{\varphi}_{10}, \varphi_{20}, \dot{\varphi}_{20}$ , лежащей близко к синфазному предельному циклу в фазовом пространстве рассматриваемой системы. В частности, для изображенной на рис. 3 ситуации имеем:  $\varphi_{10} = -6,699 \cdot 10^{-4}$ ,  $\dot{\varphi}_{10} = 6,194$ ,  $\varphi_{20} = 3,168 \cdot 10^{-3}$ ,  $\dot{\varphi}_{20} = 6,195$ . При этом начальные значения расстройек между координатами двух маятников и их производными малы:  $\xi_0 = -1,919 \cdot 10^{-3}$  и  $\dot{\xi}_0 = -4,809 \cdot 10^{-4}$ .

На рис. 3 показано: *a* – осциллограммы обобщенных скоростей  $\dot{\varphi}_1(t)$  (сплошная кривая синего цвета) и  $\dot{\varphi}_2(t)$  (пунктирная кривая красного цвета); *б* – осциллограмма расстройки  $\xi(t)$ . Из рисунка видно, что на промежутке времени  $0 \leq t \leq 21$  функции  $\dot{\varphi}_1(t)$  и  $\dot{\varphi}_2(t)$  практически совпадают друг с другом. Они выходят на режим колебаний, которые происходят вблизи значения  $\omega_s = \gamma/\lambda = 6,188$ , то есть у  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  есть монотонный рост со скоростью  $\omega_s$ , совпадающей с визуальной частотой квазипериодических изменений. Это означает, что пока расстройка  $\xi(t)$  настолько мала, что почти не оказывает влияние на динамику системы, и постепенно (за  $\Delta t \sim \lambda^{-1} = 6,25$ ) устанавливается предельное почти синфазное вращение двух маятников с периодом  $T_s = 2\pi\lambda/\gamma \approx 1,015$ .

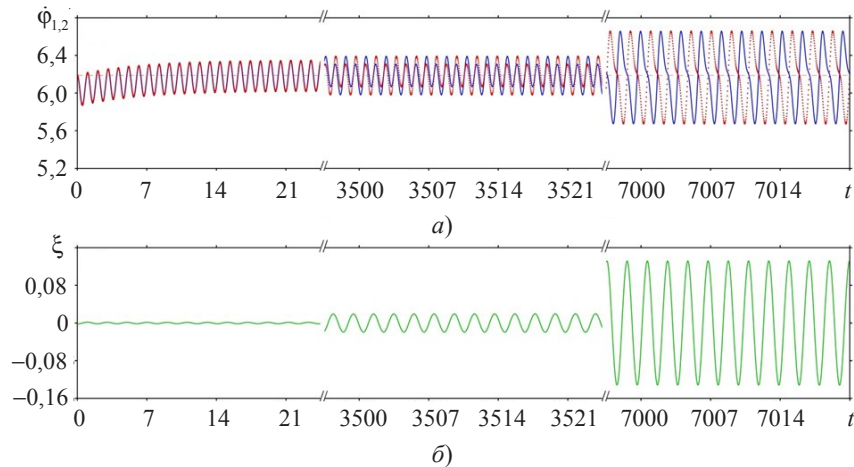


Рис. 3

На втором этапе, когда  $3500 \leq t \leq 3521$ , уже заметна несинфазность в движении двух маятников из-за развития параметрической неустойчивости их предельного синфазного режима вращения. Графики функций  $\dot{\varphi}_1(t)$  и  $\dot{\varphi}_2(t)$  уже значительно разошлись, так как стал существенным вклад расстройки  $\xi(t)$ , экспоненциально растущей с инкрементом  $\gamma p_1/\lambda = 0,738 \cdot 10^{-3}$ . Период изменения  $\dot{\varphi}_1(t)$  и  $\dot{\varphi}_2(t)$  увеличился в два раза и начал совпадать с периодом колебаний переменной  $\xi(t)$ . Отметим, что на этой стадии также проявляются нелинейные эффекты. Их влияние прежде всего приводит к замедлению роста амплитуды колебаний расстройки  $\xi(t)$ .

С течением времени нелинейные эффекты становятся настолько значительными, что полностью останавливают развитие параметрической неустойчивости, тем самым стабилизируя протекающие процессы. Движение маятников выходит на новое предельное вращение, в котором координаты  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  меняются уже несинфазно. Другими словами, когда параметр связи  $g$  становится равным  $g_1$ , при превышении которого развивается описанная выше параметрическая неустойчивость, в системе двух связанных маятников возникает еще один предельный цикл, характеризующийся несинфазным вращением с частотой повторения  $\omega_d$ , в два раза меньшей частоты  $\omega_s$ . Можно сказать, что происходит своеобразная бифуркация удвоения периода, так как период  $T_d$  установившегося несинфазного предельного цикла в два раза больше, чем период  $T_s$  синфазного вращательного предельного цикла, вблизи которого были выбраны начальные значения. Такая динамика обусловлена тем, что нарастающая из-за развития параметрической неустойчивости расстройка  $\xi(t)$  колеблется с частотой  $\omega_d$  согласно условию синфазности.

Численное моделирование поведения системы выполнено в рамках уравнений (1), (2) при  $\lambda = 0,16$ ,  $\gamma = 0,99$  и  $g = 4,775$ .

На рис. 4 приведена бифуркационная диаграмма, полученная путем прямого численного моделирования системы уравнений (1), (2). На ней показана амплитуда установившихся в результате всех переходных процессов колебаний расстройки  $\xi(t)$ . Сплошная горизонтальная линия синего цвета соответствует устойчивому состоянию с  $\xi_{\max} = 0$ , то есть тому, что синфазный вращательный предельный цикл притягивает к себе расположенные вблизи траектории в фазовом пространстве. Однако, как видно из рис. 4, горизонтальная сплошная линия терпит разрыв. Согласно численным расчетам, выполненным в рамках системы уравнений (1), (2), синфазный предельный цикл становится неустойчивым, что на бифуркационной диаграмме изображено с помощью пунктирного отрезка синего цвета. Этот отрезок на рис. 4 практически весь лежит внутри затемненной области в интервале  $g_1 < g < g_2$ . Как показано в ходе асимптотического рассмотрения, именно при значениях параметра связи  $g$  из этого интервала развивается параметрическая неустойчивость синфазного предельного цикла. Совпадение с хорошей степенью точности численных и аналитических результатов свидетельствует о справедливости развитых в п. 2 теоретических представлений.

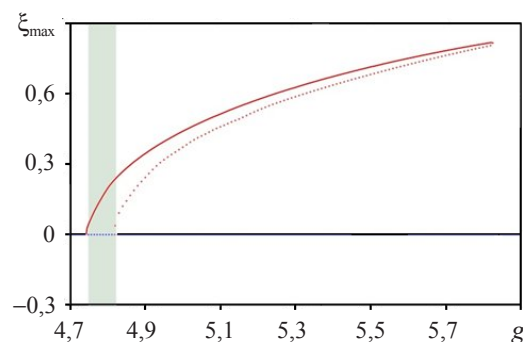


Рис. 4

Сплошная кривая красного цвета на рис. 4 соответствует устойчивому предельному вращению с отличной от нуля расстройкой  $\xi(t)$ . Видно, что данная кривая берет свое начало из точки с абсциссой  $g \approx g_1$  (там, где синфазное вращение ста-



новится неустойчивым), продолжается в затемненной области параметрической неустойчивости, а затем выходит достаточно далеко за ее границы, то есть за точку  $g \approx g_2$ . Таким образом, при  $g_2 \leq g \leq g_3$  ( $g_3 \approx 5,828$  для выбранных значений параметров  $\lambda = 0,16$  и  $\gamma = 0,996$ ) одновременно сосуществуют два устойчивых вращательных предельных цикла, один из которых можно охарактеризовать синфазным движением двух маятников, а второй – несинфазным. Возникает своеобразная бистабильность вращательных предельных циклов в рассматриваемой системе, описываемой уравнениями (1), (2).

Как показывают численные расчеты, помимо устойчивых предельных режимов вращения в диапазоне  $g_2 \leq g \leq g_3$  есть еще и неустойчивый несинфазный вращательный предельный цикл, период которого совпадает с  $T_d$ , а значит, в два раза превосходит  $T_s$ . Этот неустойчивый цикл, отмеченный на рис. 4 пунктирной кривой красного цвета, рождается из неустойчивого синфазного предельного периодического движения в окрестности точки  $g \approx g_2$  в результате субкритической бифуркации удвоения периода. При  $g = g_3$  устойчивый и неустойчивый вращательные предельные циклы сливаются друг с другом, что приводит к их исчезновению путем седлоузловой бифуркации. В итоге приведенная на рис. 4 бифуркационная диаграмма имеет гистерезисный характер.

На рис. 5 представлены проекции на плоскостях  $\phi_1, \dot{\phi}_1$  и  $\phi_2, \dot{\phi}_1$  фазовых траекторий, соответствующих вращательным предельным циклам при различных значениях силы связи  $g$ :  $a$  и  $b$  при  $g = 4,7$ ;  $v$  и  $z$  при  $g = 4,8$ ;  $d$  и  $e$  при  $g = 4,9$ . Когда  $g = 4,7$ , у маятников существует лишь синфазный вращательный предельный цикл, показанный на фрагментах рис. 5а, б сплошными линиями синего цвета. Видно, что на первом из них образ такого движения не отличается от привычного изображения вращательного предельного цикла одного нелинейного маятника (см. [26, 30], а также п. 2 настоящей статьи). В плоскости  $\dot{\phi}_2, \dot{\phi}_1$  проекция рассматриваемой фазовой траектории представляет собой отрезок, так как  $\dot{\phi}_1(t)$  и  $\dot{\phi}_2(t)$  – периодические функции, которые совпадают друг с другом во все моменты времени  $t$ .

На рис. 5в, з синфазный предельный режим вращения, который при  $g = 4,8$  становится неустойчивым, отмечен штриховыми линиями синего цвета. Здесь же сплошными кривыми красного цвета изображены проекции устойчивого несинфазного вращательного предельного цикла. В плоскости  $\dot{\phi}_2, \dot{\phi}_1$ , его образ похож на наклонную восьмерку. Каждой из петель этой кривой соответствует проход по штрихованному отрезку от начала до конца и обратно, то есть один период  $T_s$  синфазного предельного цикла. В свою очередь, чтобы обойти восьмерку полностью, требуется время  $T_d = 2T_s$ . Другими словами, возникновение замкнутой восьмерки на фазовой плоскости  $\dot{\phi}_2, \dot{\phi}_1$ , является наглядной иллюстрацией бифуркации удвоения периода, которая происходит в результате параметрической неустойчивости синфазного предельного цикла (см. п. 3).

Рисунки 5д, е демонстрируют, как располагаются друг относительно друга три предельных вращательных цикла, сосуществующих вместе в системе двух связанных маятников при  $g = 4,9$ . Синхронный вращательный предельный цикл, вновь ставший устойчивым и показанный сплошными линиями синего цвета, не изменил своего положения по сравнению с ситуациями, изображенными на рис. 5а, б, в, з. Амплитуда колебаний устойчивого несинфазного режима вращения, отмеченного сплошными кривыми красного цвета, выросла. Это привело к тому, что увеличилась длина восьмерки, являющейся проекцией его фазовой траектории на плос-

кость  $\dot{\phi}_2, \dot{\phi}_1$ . Центр наклонной восьмерки сместился к краю отрезка, соответствующего синфазному вращательному предельному циклу. На рис. 5д, е штриховыми линиями показано неустойчивое несинфазное предельное периодическое движение. Видно, что амплитуда колебаний такого движения меньше, чем в случае устойчивого несинфазного предельного вращения. Однако центры восьмерок устойчивого и неустойчивого несинфазных вращательных предельных циклов совпадают.

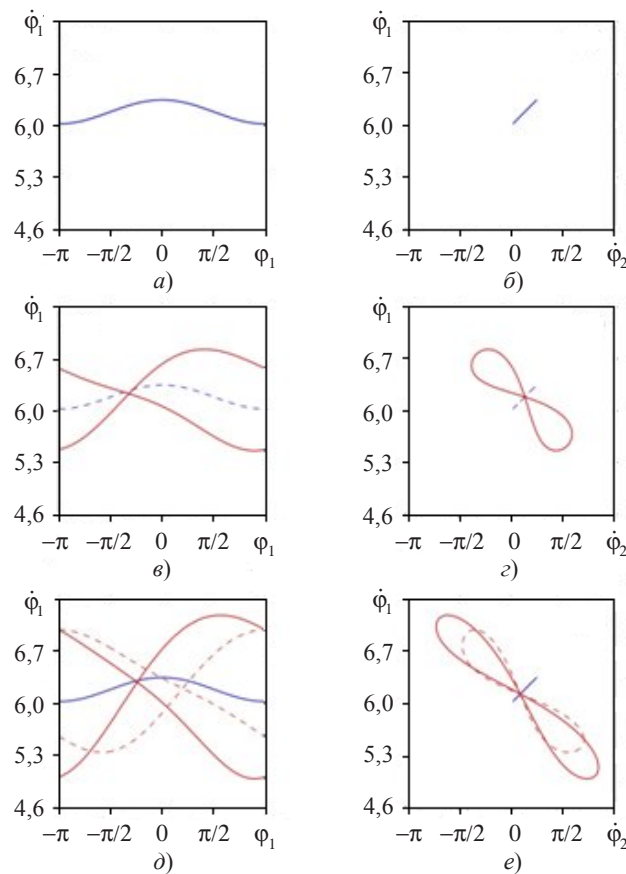


Рис. 5

При увеличении параметра связи  $g$  фазовые траектории этих циклов все ближе подходят друг к другу. Когда параметр связи  $g$  становится равным критическому значению  $g_3$ , они сливаются. При этом общий центр их проекций на плоскость  $\dot{\phi}_2, \dot{\phi}_1$ , в виде восьмерок подойдет к концу отрезка, соответствующему синфазному вращательному предельному циклу на рис. 5б.

### Заключение

Исследована вращательная динамика двух нелинейно связанных идентичных маятников, совместное поведение которых описывается системой уравнений (1), (2). С помощью прямого численного моделирования и аналитического исследования показано, что когда ответственная за постоянное внешнее воздействие безразмерная величина  $\gamma$  меньше единицы, при определенных значениях параметра  $g$ , характеризующего связь между маятниками, синфазный вращательный предельный

цикл становится неустойчивым. Найдены аналитические выражения для границ зоны  $g_1 < g < g_2$  этой неустойчивости. Численные расчеты показали, что в рассматриваемой системе происходит рождение несинфазных вращательных предельных циклов в окрестностях точек  $g = g_1$  и  $g = g_2$ . При первой бифуркации, когда  $g \approx g_1$ , возникает устойчивое несинфазное предельное периодическое движение, а синфазный вращательный предельный цикл теряет свою устойчивость. Вблизи  $g = g_2$  происходит вторая бифуркация, в ходе которой формируется неустойчивый несинфазный вращательный предельный цикл, а синфазный предельный режим вращения становится устойчивым. Другими словами, для двух нелинейно связанных маятников продемонстрировано наличие бистабильности их предельных периодических движений. С дальнейшим ростом параметра связи  $g$  (при критическом значении  $g = g_3$ , которое устанавливается только численно) происходит слияние и полное исчезновение несинфазных вращательных предельных циклов.

#### Список литературы

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, 2001. 411 p.
2. Braun O., Kivshar Yu.S. *The Frenkel-Kontorova model: concepts, methods and applications*. Berlin: Springer, 2004. 491 p.
3. Yakushevich L. V. *Nonlinear physics of DNA*. 2nd ed. Wiley-Vch, 2004. 207 p.
4. Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D. *Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization network*. Singapore: World Scientific, 1994. 256 p.
5. Leeman C., Lereh P., Racine G.A., Martinoli P. Vortex dynamics and phase transitions in a two-dimensional array of Josephson junctions. *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 56, No 12. P. 1291–1294.
6. Ryu S., Yu W., Stroud D. Dynamics of an underdamped Josephson-junction ladder. *Phys. Rev. E*. 1996. V. 53, No 3. P. 2190–2195.
7. Kim B. J., Kim S., Lee S.J. Defect motions and smearing of Shapiro steps in Josephson-junction ladders under magnetic frustration. *Phys. Rev. B*. 1995. V. 51, No 13. P. 8462–8466.
8. Kim J., Choe W.G., Kim S., Lee H.J. Dynamics of Josephson-junction ladders. *Phys. Rev. B*. 1994. V. 49, No 1. P. 459–464.
9. Denniston C., Tang C. Phases of Josephson-junction ladders. *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75, No 21. P. 3930–3933.
10. Qian M., Weng J.-Z. Transitions in two sinusoidally coupled Josephson-junction rotators. *Annals of Physics*. 2008. V. 323. P. 1956–1962.
11. Fishman R. S., Stroud D. Role of long-range Coulomb interactions in granular superconductors. *Phys. Rev. B*. 1988. V. 38, No 1. P. 290–296.
12. Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J. Mechanical analog of the DNA base pair oscillations. *Dynamical systems. Theory and applications*. Eds. by J. Awrejcewicz et al. Lodz: Left Grupa, 2009. P. 879–886.
13. Якушевич Л.В. Биомеханика ДНК: вращательные колебания оснований. *Компьютерные исследования и моделирование*. 2011. Т. 3, №3. С. 319–328.
14. Аврејцевич Я., Млынарска С., Якушевич Л.В. О нелинейных колебаниях пар оснований ДНК. *Прикладная математика и механика*. 2013. Т. 77, №4. С. 1–11.
15. Krueger A., Protozanova E., Frank-Kamenetskii M. Sequence-dependent basepair opening in DNA double helix. *Biophys. J.* 2006. V. 90. P. 3091–3099.
16. Takeno S., Peyrard M. Nonlinear modes in coupled rotator models. *Physica D*. 1996. V. 92. P. 140–163.
17. Zhang F. Kink shape modes and resonant dynamics in sine-lattices. *Physica D*. 1997. V. 110. P. 51–61.
18. Kosterlitz J.M., Thouless D.J. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *J. Phys. C: Solid State Phys.* 1973. V. 6. P. 1181–1203.

19. Antoni M., Ruffo S. Clustering and relaxation in Hamiltonian long-range dynamics. *Phys. Rev. E*. 1995. V. 52, No 3. P. 2361–2374.
20. Wang X.Y., Taylor P.L. Devil's staircase, critical thickness, and propagating fingers in antiferroelectric liquid crystals. *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76, No 4. P. 640–643.
21. Fillaux F., Carlile C.J. Inelastic-neutron-scattering study of methyl tunneling and the quantum sine-Gordon breather in isotopic mixtures of 4-methyl-pyridine at low temperature. *Phys. Rev. B*. 1990. V. 42, No 10. P. 5990–6006.
22. Fillaux F., Carlile C.J., Kearley G.J. Inelastic-neutron-scattering study at low temperature of the quantum sine-Gordon breather in 4-methyl-pyridine with partially deuterated methyl groups. *Phys. Rev. B*. 1991. V. 44, No 22. P. 12280–12293.
23. Zhang F., Collins M.A., Kivshar Yu.S. Kinks and conformational defects in nonlinear chains. *Phys. Rev. E*. 1995. V. 51, No 4. P. 3774–3777.
24. Goldstein G. *Classical Mechanics*. 3rd ed. Addison-Wesley, 2001. 149 p.
25. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. *Теория колебаний*. М.: Наука, 1981. 568 с.
26. Belykh V.N., Pedersen N.F., Soerensen O.H. Shunted-Josephson-junction model. I. The autonomous case. *Phys. Rev. B*. 1977. V. 16, No 11. P. 4853–4859.
27. Tricomi F. Integrazioni di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze*. 1933. V. 2, No 1. P. 1–20.
28. Барбашин Е.А., Табуева В.А. *Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством*. М.: Наука, 1969. 300 с.
29. Шалфеев В.Д., Матросов В.В. *Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации*. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та, 2013. 366 с.
30. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Механика*. 5-е изд. М.: Физматлит, 2004. 224 с.

#### References

1. Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J. *Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, 2001. 411 p.
2. Braun O., Kivshar Yu.S. *The Frenkel-Kontorova model: concepts, methods and applications*. Berlin: Springer, 2004. 491 p.
3. Yakushevich L. V. *Nonlinear physics of DNA*. 2nd ed. Wiley-Vch, 2004. 207 p.
4. Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D. *Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization network*. Singapore: World Scientific, 1994. 256 p.
5. Leeman C., Lereh P., Racine G.A., Martinoli P. Vortex dynamics and phase transitions in a two-dimensional array of Josephson junctions. *Phys. Rev. Lett.* 1986. V. 56, No 12. P. 1291–1294.
6. Ryu S., Yu W., Stroud D. Dynamics of an underdamped Josephson-junction ladder. *Phys. Rev. E*. 1996. V. 53, No 3. P. 2190–2195.
7. Kim B. J., Kim S., Lee S.J. Defect motions and smearing of Shapiro steps in Josephson-junction ladders under magnetic frustration. *Phys. Rev. B*. 1995. V. 51, No 13. P. 8462–8466.
8. Kim J., Choe W.G., Kim S., Lee H.J. Dynamics of Josephson-junction ladders. *Phys. Rev. B*. 1994. V. 49, No 1. P. 459–464.
9. Denniston C., Tang C. Phases of Josephson-junction ladders. *Phys. Rev. Lett.* 1995. V. 75, No 21. P. 3930–3933.
10. Qjan M., Weng J.-Z. Transitions in two sinusoidally coupled Josephson-junction rotators. *Annals of Physics*. 2008. V. 323. P. 1956–1962.
11. Fishman R. S., Stroud D. Role of long-range Coulomb interactions in granular superconductors. *Phys. Rev. B*. 1988. V. 38, No 1. P. 290–296.
12. Yakushevich L.V., Gapa S., Awrejcewicz J. Mechanical analog of the DNA base pair oscillations. *Dynamical systems. Theory and applications*. Eds. by J. Awrejcewicz et al. Lodz: Left Grupa, 2009. P. 879–886.
13. Yakushevich L.V. *Biomechanika DNK: vraschatelnye kolebaniya osnovaniy. Kompyuternye issledovaniya i modelirovanie*. 2011. T. 3, №3. S. 319–328.
14. Awrejcewicz J., Mlynarska S., Yakushevich L.V. O nelineynyh kolebaniyah par osnovaniy DNK. *Prikladnaya matematika i mehanika*. 2013. T. 77, № 4. S. 1–11.

15. Krueger A., Protozanova E., Frank-Kamenetskii M. Sequence-dependent basepair opening in DNA double helix. *Biophys. J.* 2006. V. 90. P. 3091–3099.
16. Takeno S., Peyrard M. Nonlinear modes in coupled rotator models. *Physica D.* 1996. V. 92. P. 140–163.
17. Zhang F. Kink shape modes and resonant dynamics in sine-lattices. *Physica D.* 1997. V. 110. P. 51–61.
18. Kosterlitz J.M., Thouless D.J. Ordering, metastability and phase transitions in two-dimensional systems. *J. Phys. C: Solid State Phys.* 1973. V. 6. P. 1181–1203.
19. Antoni M., Ruffo S. Clustering and relaxation in Hamiltonian long-range dynamics. *Phys. Rev. E.* 1995. V. 52, No 3. P. 2361–2374.
20. Wang X.Y., Taylor P.L. Devil's staircase, critical thickness, and propagating fingers in antiferroelectric liquid crystals. *Phys. Rev. Lett.* 1996. V. 76, No 4. P. 640–643.
21. Fillaux F., Carlile C.J. Inelastic-neutron-scattering study of methyl tunneling and the quantum sine-Gordon breather in isotopic mixtures of 4-methyl-pyridine at low temperature. *Phys. Rev. B.* 1990. V. 42, No 10. P. 5990–6006.
22. Fillaux F., Carlile C.J., Kearley G.J. Inelastic-neutron-scattering study at low temperature of the quantum sine-Gordon breather in 4-methyl-pyridine with partially deuterated methyl groups. *Phys. Rev. B.* 1991. V. 44, No 22. P. 12280–12293.
23. Zhang F., Collins M.A., Kivshar Yu.S. Kinks and conformational defects in nonlinear chains. *Phys. Rev. E.* 1995. V. 51, No 4. P. 3774–3777.
24. Goldstein G. *Classical Mechanics*. 3rd ed. Addison-Wesley, 2001. 149 p.
25. Andronov A.A., Vitt A.A., Haykin S.E. *Teoriya kolebaniy*. M.: Nauka, 1981. 568 s.
26. Belykh V.N., Pedersen N.F., Soerensen O.H. Shunted-Josephson-junction model. I. The autonomous case. *Phys. Rev. B.* 1977. V. 16, No 11. P. 4853–4859.
27. Tricomi F. Integrazioni di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze.* 1933. V. 2, No 1. P. 1–20.
28. Barbashin E.A., Tabueva V.A. *Dinamicheskie sistemy s tsilindricheskimi fazovymi prostranstvom*. M.: Nauka, 1969. 300 s.
29. Shalfeev V.D., Matrosov V.V. *Nelineynaya dinamika sistem fazovoy sinhronizatsii*. N. Novgorod: Izd-vo Nizhegorod. un-ta, 2013. 366 s.
30. Landau L.D., Lifshits E.M. *Mekhanika*. 5-e izd. M.: Fizmatlit, 2004. 224 s.

## ROTATIONAL DYNAMICS IN A PAIR OF COUPLED PENDULUMS

Smirnov L.A.<sup>1,2</sup>, Kryukov A.K.<sup>1</sup>, Kadina E.Yu.<sup>1</sup>, Gubina E.V.<sup>1</sup>, Osipov G.V.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation

<sup>2</sup>Institute of Applied Physics of the Russian Academy of Sciences,  
Nizhni Novgorod, Russian Federation

It is considered collective dynamics of two non-linearly coupled pendulums in the presence of dissipation and constant external torque applied to each element. It has in-phase periodic rotation in addition to stable steady state. Numerical experiments demonstrate that the in-phase motion becomes unstable at certain coupling strength values. It is proposed an asymptotic theory which provides explanation of in-phase motion instability at the limit of low dissipation. Analytic equations for the bifurcation coupling values are found. Numerical modeling also indicates that there is a coupling strength range characterized by existence of a pair (stable and unstable) non in-phase rotation cycles. In other words, we demonstrate periodical motions bi-stability in a pair of non-linearly coupled pendulums. It is also investigated bifurcations corresponding to non in-phase rotation motions origination and dissolution.

*Keywords:* pendulum, collective dynamics, in-phase regime, parametric instability.