

УДК 534.1

**ОЦЕНКА РЕЗОНАНСОПАСНЫХ ГАРМОНИК
ПРИ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГОЙ НАПРАВЛЯЮЩЕЙ
С ДВИЖУЩИМСЯ ПО НЕЙ ДВУХОПОРНЫМ ОБЪЕКТОМ***

© 2015 г.

**Герасимов С.И.^{1,2}, Ерофеев В.И.^{2,3}
Камчатный В.Г.¹, Каныгин И.И.¹**

¹*Саровский физико-технический институт НИЯУ МИФИ,
Саров, Российская Федерация*

²*Институт проблем машиностроения РАН, Нижний Новгород,
Российская Федерация*

³*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Российская Федерация*

erf04@mts-nn.ru

Поступила в редакцию 02.09.2015

Проведен анализ резонанса для системы упругая направляющая – движущийся двухопорный объект. Динамическое поведение направляющей моделируется балкой, совершающей изгибно-крутильные колебания, а двухопорный объект представлен двумя осцилляторами, соединенными абсолютно жесткой связью. Показано, что в рассматриваемой системе резонансное увеличение амплитуд колебаний возможно в следующих случаях: при сближении частот изменения внешних сил с частотами свободных колебаний двухопорного объекта, зависящими от упруго-инерционных характеристик объекта и динамической жесткости направляющей в движущемся контакте; при сближении частот изменения внешних сил с частотами свободных колебаний направляющей, возбуждаемых движущимся объектом и зависящих от жесткостных и инерционно-массовых параметров направляющей, расстояния между опорами движущегося объекта и скорости его движения; при определенных сочетаниях скорости движения объекта и частоты изменения контактных сил, вызывающих резонансное увеличение податливости направляющей. В качестве мер борьбы с резонансными явлениями предложено: исключение резонансоопасных гармоник путем дополнительной юстировки начальной непрямолинейности рельсовых направляющих; подбор жесткости опор ступени ракетного поезда для ухода от резонансоопасных частот.

Ключевые слова: упругая направляющая, изгибно-крутильные колебания, движущийся двухопорный объект, резонанс.

При проведении работ на ракетном треке иногда возникали случаи аномального движения ступеней ракетного поезда по направляющим трека, которые сопровождались сильными поперечными возмущениями ступеней и повреждениями на-

* Выполнено при финансовой поддержке РФФ (грант № 14-19-01637).

правляющих [1]. Причиной аномального движения ступеней ракетного поезда в числе прочих мог быть и резонанс при взаимодействии движущегося объекта с упругой направляющей [2, 3].

В общем случае внешние силы, действующие на двухопорный объект и направляющую, можно представить суммой сил, каждая из которых меняется по гармоническому закону. В спектре смещений вынужденных колебаний направляющей при этом будут присутствовать только такие составляющие, у которых частоты равны соответствующим частотам составляющих внешней силы. Однако вследствие резонансных свойств системы амплитудные спектры смещений двухопорного объекта и направляющей могут сильно отличаться от амплитудного спектра составляющих внешних сил [4].

Рассмотрим плоское поперечное движение двухопорного объекта массой m с моментом инерции I_y , перемещающегося вдоль упругой направляющей с постоянной скоростью V_x . Двухопорный объект представляет собой два осциллятора, соединенных абсолютно жесткой связью. Расстояние между опорами объекта равно L_s , отрезки R_1 и R_2 определяют положение центра масс. Жесткость упругих опор объекта обозначим через c .

Схема двухопорного объекта и направляющей приведена на рис. 1.

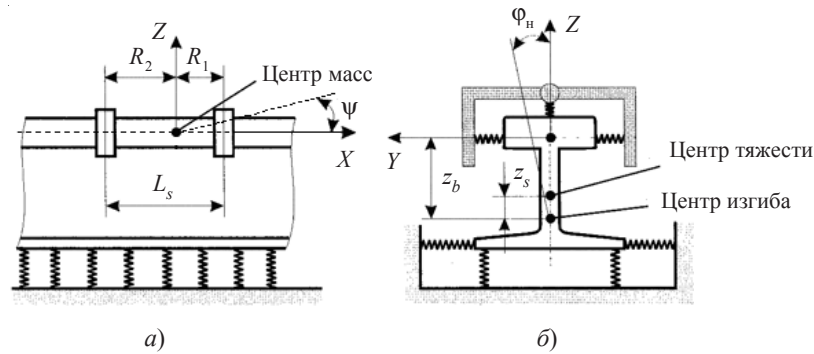


Рис. 1. Схемы двухопорного объекта (а) и направляющей (б)

В качестве направляющей используется однородная балка модели Бернулли–Эйлера [5, 6] на сплошном упругом основании. Погонная масса направляющей равна \bar{m} , погонный момент инерции \bar{I}_p . Жесткости направляющей: изгибная – EI_y , секториальная – EI_φ , крутильная – GI_κ . Жесткости упругого основания в направлении оси Z и угла φ равны H_z и H_φ . Поперечное сечение направляющей имеет одну ось симметрии. Расстояние между центром тяжести сечения и его центром изгиба равно z_s . При приложении нагрузки к головке направляющей в направлении оси Z на расстоянии z_b от центра изгиба направляющая совершает изгибно-крутильные колебания. Аэродинамические силы ввиду их малости по сравнению с контактными силами из рассмотрения исключаются.

Уравнения малых колебаний рассматриваемой системы имеют вид [7]:

$$\left. \begin{aligned} EI_y z_{nq}^{IV} + \bar{m} \ddot{z}_{nq} + y_s \bar{m} \ddot{\varphi}_{nq} + H_z z_{nq} &= -\delta(x_q - V_x t) P_{zq}, \\ EI_\varphi \varphi_{nq}^{IV} - GI_\kappa \varphi_{nq}'' + \bar{I}_p \ddot{\varphi}_{nq} + z_s \bar{m} \ddot{z}_{nq} + H_\varphi \varphi_{nq} &= -\delta(x_q - V_x t) z_b P_{zq}, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} m_c \ddot{z}_c &= P_{z1} + P_{z2}, \\ J_y \ddot{\psi}_c &= -R_1 P_{z1} + R_2 P_{z2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где z_c и Ψ_c – поперечные линейные и угловые перемещения объекта; q – номер опоры двухопорного объекта; δ – дельта-функция Дирака.

Уравнения (1) описывают изгибно-крутильные колебания направляющей, уравнения (2) – плоские колебания двухопорного объекта.

Для дальнейшего анализа удобно ввести движущуюся со скоростью V_x систему отсчета, в которой $s_q = x_q - V_x t$.

В этой системе отсчета уравнения изгибно-крутильных колебаний направляющей (1) примут вид

$$\begin{aligned} & EI_y z_{nq}^{IV} + \bar{m}(\ddot{z}_{nq} - 2V_x \dot{z}'_{nq} + V_x^2 z''_{nq}) + \\ & + z_s \bar{m}(\ddot{\varphi}_{nq} - 2V_x \dot{\varphi}'_{nq} + V_x^2 \varphi''_{nq}) + H_z z_{nq} = -\delta(s) P_{zq}, \\ & EI_\varphi \varphi_{nq}^{IV} - GI_\kappa \varphi''_{nq} + \bar{I}_p(\ddot{\varphi}_{nq} - 2V_x \dot{\varphi}'_{nq} + V_x^2 \varphi''_{nq}) + \\ & + z_s \bar{m}(\ddot{z}_{nq} - 2V_x \dot{z}'_{nq} + V_x^2 z''_{nq}) + H_\varphi \varphi_{nq} = -\delta(s) z_b P_{zq}, \end{aligned} \quad (3)$$

Контактные силы в уравнениях систем (2) и (3) при движении объекта по прямоймолинейной направляющей определяются выражениями

$$\begin{aligned} P_{z1} &= -c[z_c - R_1 \Psi - (z_{n1} + z_b \varphi_{n1})], \\ P_{z2} &= -c[z_c + R_2 \Psi - (z_{n2} + z_b \varphi_{n2})], \end{aligned} \quad (4)$$

Используя подход, предложенный в [8], можно, применяя преобразования Фурье по переменным s, t в соответствии со схемой

$$\begin{aligned} \{\tilde{z}_n(s, \Omega), \tilde{\varphi}_n(s, \Omega)\} &= \int_0^\infty \{z_n(s, t), \varphi_n(s, t)\} e^{-i\Omega t} dt, \\ \{\tilde{\tilde{z}}_n(\kappa, \Omega), \tilde{\tilde{\varphi}}_n(\kappa, \Omega)\} &= \int_{-\infty}^\infty \{\tilde{z}_n(s, \Omega), \tilde{\varphi}_n(s, \Omega)\} e^{-i\kappa s} ds, \end{aligned} \quad (5)$$

перейти от системы дифференциальных уравнений в частных производных (3) к системе алгебраических уравнений относительно $\tilde{\tilde{z}}_n(\kappa, \Omega), \tilde{\tilde{\varphi}}_n(\kappa, \Omega)$, исключая из которой поочередно $\tilde{\tilde{\varphi}}_n(\kappa, \Omega)$ и $\tilde{\tilde{z}}_n(\kappa, \Omega)$, получим

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{z}}_{nq}(\kappa, \Omega) D_z(\kappa, \Omega) &= P_{zq}, \\ \tilde{\tilde{\varphi}}_{nq}(\kappa, \Omega) D_\varphi(\kappa, \Omega) &= P_{zq}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} D_z(\kappa, \Omega) &= \frac{A(\kappa, \Omega) B(\kappa, \Omega) - z_s^2 \bar{m}^2 (\Omega - V_x \kappa)^4}{A(\kappa, \Omega) + z_b z_s \bar{m} (\Omega - V_x \kappa)^2}, \\ D_\varphi(\kappa, \Omega) &= \frac{A(\kappa, \Omega) B(\kappa, \Omega) - z_s^2 \bar{m} (\Omega - V_x \kappa)^4}{z_b B(\kappa, \Omega) + z_s \bar{m} (\Omega - V_x \kappa)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A(\kappa, \Omega) &= EI_y \kappa^4 + GI_\kappa \kappa^2 - \bar{I}_p (\Omega - V_x \kappa)^2 + H_\varphi, \\ B(\kappa, \Omega) &= EI_y \kappa^4 - \bar{m} (\Omega - V_x \kappa)^2 + H_z. \end{aligned} \quad (8)$$

Применив обратное преобразование Фурье по волновому числу κ к уравнениям (6) и прямое преобразование Фурье по переменной t к уравнениям (2) и полагая

в полученных уравнениях $s = 0$, приведем к уравнениям, описывающим колебания двухпорного объекта, движущегося по совершающей изгибно-крутильные колебания направляющей:

$$\begin{aligned}
\tilde{z}_{n1}(0, \Omega)\chi_z(\Omega, V_x) &= c[\tilde{z}_c(\Omega) - R_1\tilde{\psi}(\Omega) - \tilde{z}_{n1}(0, \Omega) - z_b\tilde{\varphi}_{n1}(0, \Omega)], \\
\tilde{\varphi}_{n1}(0, \Omega)\chi_\varphi(\Omega, V_x) &= c[\tilde{z}_c(\Omega) - R_1\tilde{\psi}(\Omega) - \tilde{z}_{n1}(0, \Omega) - z_b\tilde{\varphi}_{n1}(0, \Omega)], \\
\tilde{z}_{n2}(0, \Omega)\chi_z(\Omega, V_x) &= c[\tilde{z}_c(\Omega) + R_2\tilde{\psi}(\Omega) - \tilde{z}_{n2}(0, \Omega) - z_b\tilde{\varphi}_{n2}(0, \Omega)], \\
\tilde{\varphi}_{n2}(0, \Omega)\chi_\varphi(\Omega, V_x) &= c[\tilde{z}_c(\Omega) + R_2\tilde{\psi}(\Omega) - \tilde{z}_{n2}(0, \Omega) - z_b\tilde{\varphi}_{n2}(0, \Omega)], \\
-m\Omega^2\tilde{z}_c(\Omega) &= -c[2\tilde{z}_c(\Omega) - (R_1 - R_2)\tilde{\psi}(\Omega) - \tilde{z}_{n1}(0, \Omega) - \tilde{z}_{n2}(0, \Omega) - \\
&\quad - z_b(\tilde{\varphi}_{n1}(0, \Omega) + \tilde{\varphi}_{n2}(0, \Omega))], \\
-J_y\Omega^2\tilde{\psi}(\Omega) &= c[(R_1 - R_2)\tilde{z}_c(\Omega) - (R_1^2 + R_2^2)\tilde{\psi}(\Omega) + R_1\tilde{z}_{n1}(0, \Omega) - R_2\tilde{z}_{n2}(0, \Omega) + \\
&\quad + z_b(R_1\tilde{\varphi}_{n1}(0, \Omega) - R_2\tilde{\varphi}_{n2}(0, \Omega))],
\end{aligned} \tag{9}$$

где динамическая жесткость направляющей в движущемся контакте в направлении оси Z и угла φ определяется выражениями

$$\begin{aligned}
\chi_z(\Omega, V_x) &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{D_z(\kappa, \Omega)} \right]^{-1}, \\
\chi_\varphi(\Omega, V_x) &= \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\kappa}{D_\varphi(\kappa, \Omega)} \right]^{-1}.
\end{aligned} \tag{11}$$

Подынтегральные функции в выражениях (11) для $\chi_z(\Omega, V_x)$ и $\chi_\varphi(\Omega, V_x)$ представляют собой дроби, в знаменателе которых стоит полином восьмой степени, корни которого являются простыми полюсами. В этом случае, согласно теории вычетов [9], результат вычисления интегралов может быть записан в виде:

$$\begin{aligned}
\chi_z(\Omega, V_x) &= \left\{ i \sum_{j=1}^8 \frac{A(\kappa, \Omega) + z_b z_s \bar{m} (\Omega - V_x \kappa)^2}{\frac{d}{d\kappa} [A(\kappa, \Omega) B(\kappa, \Omega) - z_s^2 \bar{m}^2 (\Omega - V_x \kappa)^4]} \Bigg|_{\kappa=\kappa_j} \right\}^{-1}, \\
\chi_\varphi(\Omega, V_x) &= \left\{ i \sum_{j=1}^8 \frac{z_b B(\kappa, \Omega) + z_s \bar{m} (\Omega - V_x \kappa)^2}{\frac{d}{d\kappa} [A(\kappa, \Omega) B(\kappa, \Omega) - z_s^2 \bar{m}^2 (\Omega - V_x \kappa)^4]} \Bigg|_{\kappa=\kappa_j} \right\}^{-1},
\end{aligned} \tag{12}$$

где κ_j – корни уравнения

$$A(\kappa, \Omega) B(\kappa, \Omega) - z_s^2 \bar{m}^2 (\Omega - V_x \kappa)^4 = 0, \tag{13}$$

лежащие в верхней полуплоскости комплексного переменного κ .

Динамическая жесткость направляющей в движущемся контакте является ком-

плекснозначной функцией скорости движения контакта и частоты возмущения. Действительная составляющая динамической жесткости представляет упруго-инерционные свойства реакции направляющей, а мнимая – вязкостные [8]. При определении частот свободных колебаний объекта, движущегося по колеблющейся направляющей, физический смысл имеют только действительные части динамической жесткости $\text{Re}\chi_z(\Omega, V_x)$ и $\text{Re}\chi_\phi(\Omega, V_x)$.

Исключая из систем уравнений (9) и (10) $\tilde{z}_{\text{нq}}(0, \Omega)$ и $\tilde{\varphi}_{\text{нq}}(0, \Omega)$, получим

$$\begin{aligned} (c_{11} - \Omega^2)\tilde{z}_c(\Omega) + c_{12}\tilde{\psi}(\Omega) &= 0, \\ c_{21}\tilde{z}_c(\Omega) + (c_{22} - \Omega^2)\tilde{\psi}(\Omega) &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где

$$\begin{aligned} c_{11} &= K_\chi \frac{2c}{m_c}, \quad c_{12} = -K_\chi \frac{R_1 - R_2}{m_c} c, \\ c_{21} &= K_\chi \frac{R_1 - R_2}{J_y} c, \quad c_{22} = K_\chi \frac{R_1^2 + R_2^2}{J_y} c, \\ K_\chi &= \frac{\text{Re}\chi_\phi \text{Re}\chi_z}{\text{Re}\chi_\phi \text{Re}\chi_z + c(\text{Re}\chi_\phi + z_b \text{Re}\chi_z)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Частоты свободных колебаний двухопорного объекта, движущегося по упругой направляющей, можно определить из характеристического уравнения системы (14), которое имеет вид

$$\Omega^4 - (c_{11} + c_{12})\Omega^2 + c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0. \quad (16)$$

Два первых корня уравнения (16) определяются соотношением

$$\Omega_{1,2} = \sqrt{\frac{c_{11} + c_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c_{11} + c_{22}}{2}\right)^2 - (c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12})}}. \quad (17)$$

При движении двухопорного объекта по направляющей, имеющей отклонения от прямолинейности, контактные силы в уравнениях систем (2) и (3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} P_{z1} &= -c[z_c - R_1\psi - (z_{\text{н1}} + z_b\phi_{\text{н1}}) - z_{s1}], \\ P_{z2} &= -c[z_c - R_2\psi - (z_{\text{н2}} + z_b\phi_{\text{н2}}) - z_{s2}], \end{aligned} \quad (18)$$

Поперечные координаты направляющей, обусловленные ее начальными неровностями, под опорами движущегося объекта определяются соотношениями

$$\begin{aligned} z_{s1} &= z_s(x_c), \\ z_{s2} &= z_s(x_c - L_s), \end{aligned} \quad (19)$$

где z_{s1}, z_{s2} – поперечные координаты направляющей, обусловленные ее начальными неровностями, под опорами движущегося объекта; $x_c = V_x t$ – продольная координата передней опоры объекта.

Зависимость начальных неровностей направляющей $z_{s(x)}$ представим в виде ряда Фурье, учитывая при этом, что $x = V_x t$:

$$z_{s(x)} = Q_0 + \sum_{n=1}^N Q_n e^{i\Omega_n t}, \quad (20)$$

где $\Omega_{pn} = 2\pi n V_x / L$; $Q_n = a_n - ib_n$; a_n, b_n – коэффициенты Фурье; L – длина анализируемого участка; N – число учитываемых членов разложения.

Рациональным выбором начала отсчета можно обеспечить $Q_0 = 0$.

Проделав с уравнениями систем (2) и (3) те же действия, что и ранее, но принимая при этом во внимание, что P_{z1} и P_{z2} определяются выражениями (18), с учетом соотношений (20) получим

$$\left. \begin{aligned} \ddot{z}_c + c_{11}z_c + c_{12}\Psi &= \frac{cK_\chi}{m_c} \sum_{n=1}^N Q_n e^{i\Omega_{pn}t} (1 + e^{i\Omega_{pn}\Delta t}), \\ \ddot{\Psi} + c_{21}z_c + c_{22}\Psi &= \frac{cK_\chi}{J_y} \sum_{n=1}^N Q_n e^{i\Omega_{pn}t} (R_1 - R_2 e^{i\Omega_{pn}\Delta t}), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где $\Delta t = L_s / V_x$.

Принцип суперпозиции позволяет рассматривать действие на движущийся объект каждой из гармоник начальных неровностей направляющей в отдельности.

Решение системы (21) представим в виде

$$\left. \begin{aligned} z_{cn} &= A_{zn} e^{i\Omega_{pn}t}, \\ \Psi_n &= A_{\Psi n} e^{i\Omega_{pn}t}. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Подставив решение (22) в уравнения системы (21), будем иметь

$$\left. \begin{aligned} (c_{11} - \Omega_{pn}^2)A_{zn} + c_{12}A_{\Psi n} &= cK_\chi Q_n (1 + e^{i\Omega_{pn}\Delta t}) e^{i\Omega_{pn}t}, \\ c_{12}A_{zn} + (c_{22} - \Omega_{pn}^2)A_{\Psi n} &= -cK_\chi Q_n (R_1 - R_2 e^{i\Omega_{pn}\Delta t}) e^{i\Omega_{pn}t}. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Решая полученную систему алгебраических уравнений относительно A_{zn} и $A_{\Psi n}$, получим

$$\begin{aligned} A_{zn} &= c \frac{J_y (c_{22} - \Omega_{pn}^2) (1 + e^{i\Omega_{pn}\Delta t}) + m_c c_{12} (R_1 - R_2 e^{i\Omega_{pn}\Delta t})}{m_c J_y [(c_{11} - \Omega_{pn}^2) (c_{22} - \Omega_{pn}^2) - c_{12} c_{21}]} Q_n, \\ A_{\Psi n} &= -c \frac{m_c (c_{11} - \Omega_{pn}^2) (R_1 - R_2 e^{i\Omega_{pn}\Delta t}) + J_y c_{21} (1 + e^{i\Omega_{pn}\Delta t})}{m_c J_y [(c_{11} - \Omega_{pn}^2) (c_{22} - \Omega_{pn}^2) - c_{12} c_{21}]} Q_n. \end{aligned} \quad (24)$$

Используя решение (22), можно показать, что

$$\begin{aligned} P_{z1} &= \frac{\sum_{n=1}^N \Omega_{pn}^2 (J_y A_{\Psi n} - m_c R_2 A_{zn}) e^{i\Omega_{pn}t}}{R_1 + R_2}, \\ P_{z2} &= \frac{\sum_{n=1}^N \Omega_{pn}^2 (J_y A_{\Psi n} + m_c R_1 A_{zn}) e^{i\Omega_{pn}t}}{R_1 + R_2}. \end{aligned} \quad (25)$$

Рассмотрим движение направляющей под действием контактных сил (25). При этом необходимо иметь в виду, что силы, действующие на направляющую, по величине равны контактным силам P_{z1} и P_{z2} , но противоположно направлены, то есть имеют знак минус. Изгибно-крутильные колебания направляющей в неподвижной системе координат описываются системой уравнений [7]

$$\left. \begin{aligned} EI_y z_H^{IV} + \bar{m} \ddot{z}_H + H_z z_H + z_s \bar{m} \ddot{\phi}_H &= 0, \\ EI_\phi \phi_H^{IV} - GI_k \phi_H'' + \bar{I}_p \ddot{\phi}_H + H_\phi \phi_H + z_s \bar{m} \ddot{z}_H &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Представим решение системы в виде

$$z_H = U_z(x)S(t), \quad \varphi_H = U_\varphi(x)S(t). \quad (27)$$

Принимая во внимание, что для изгибно-крутильных колебаний $U_\varphi/U_z = \text{const}$, то есть

$$\frac{U_z^{IV}}{U_z} = \frac{U_\varphi^{IV}}{U_\varphi}, \quad \frac{U_z''}{U_z} = \frac{U_\varphi''}{U_\varphi}, \quad \frac{U_z'}{U_z} = \frac{U_\varphi'}{U_\varphi},$$

и разделяя переменные, преобразуем систему (26) к виду

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\ddot{S}}{S} &= \omega^2, \\ \frac{D_z \bar{I}_p + D_z \bar{m}}{2\bar{m}(\bar{I}_p - z_s^2 \bar{m})} \pm \sqrt{\left(\frac{D_z \bar{I}_p + D_z \bar{m}}{2\bar{m}(\bar{I}_p - z_s^2 \bar{m})} \right)^2 - \frac{D_z D_\varphi}{\bar{m}(\bar{I}_p - z_s^2 \bar{m})}} &= \omega^2, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где

$$D_z = \frac{EI_y U_z^{IV} + H_z U_z}{U_z}, \quad D_\varphi = \frac{EI_\varphi U_z^{IV} - GI_\kappa U_z'' + H_\varphi U_z}{U_z}. \quad (29)$$

В системе координат, движущейся вместе с объектом со скоростью V_x , для которой

$$\begin{aligned} s &= x - V_x t, \quad \ddot{z}_H = \ddot{S}(t)U_z(s) - 2V_x \dot{S}(t)U_z'(s) + V_x^2 S(t)U_z''(s), \\ \ddot{\varphi}_H &= \ddot{S}(t)U_\varphi(s) - 2V_x \dot{S}(t)U_\varphi'(s) + V_x^2 S(t)U_\varphi''(s) \end{aligned}$$

и производные по x равны производным по s , первое уравнение системы (28) примет вид

$$\frac{\ddot{S}U_z - 2V_x \dot{S}U_z' + V_x^2 S U_z''}{S U_z} = \omega^2. \quad (30)$$

Для анализа вынужденных колебаний направляющей используем метод разложения внешних сил по собственным формам колебаний [10]. Уравнение (30) запишем отдельно для колебаний в направлении оси Z и угла φ :

$$\begin{aligned} \ddot{S}_{zn} - 2V_x \frac{U_z'}{U_z} \dot{S}_{zn} + \left(V_x^2 \frac{U_z''}{U_z} + \omega^2 \right) S_{zn} &= -\frac{\bar{P}_{zn}}{M_{zn}} e^{i\Omega_{pn} t}, \\ \ddot{S}_{\varphi n} - 2V_x \frac{U_\varphi'}{U_\varphi} \dot{S}_{\varphi n} + \left(V_x^2 \frac{U_\varphi''}{U_\varphi} + \omega^2 \right) S_{\varphi n} &= -\frac{\bar{P}_{\varphi n}}{M_{\varphi n}} e^{i\Omega_{pn} t}. \end{aligned} \quad (31)$$

Работа приложенных к системе сил на перемещениях, отвечающих форме колебаний, равна работе приведенной силы на перемещении точки приведения, равном единице [6], а приведенная масса равна массе балки, кинетическая энергия которой равна максимальной кинетической энергии, переносимой через точку приведения при проходе через последнюю половины длины волны соответствующей формы колебаний. Исходя из этого, приведенные силы \bar{P}_{zn} , $\bar{P}_{\varphi n}$ и приведенные массы \bar{M}_{zn} , $\bar{M}_{\varphi n}$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\bar{P}_{zn} &= P_{z1}U_{zn}(s_1) + P_{z2}U_{zn}(s_2), \\ \bar{P}_{\varphi n} &= z_b(P_{z1}U_{\varphi n}(s_1) + P_{z2}U_{\varphi n}(s_2)),\end{aligned}\quad (32)$$

$$\begin{aligned}\bar{M}_{zn} &= \bar{m} \int_0^{L_n} U_{zn}^2(s) ds, \\ \bar{M}_{\varphi n} &= \bar{I}_p \int_0^{L_n} U_{\varphi n}^2(s) ds,\end{aligned}\quad (33)$$

где L_n – половина длины волны соответствующей формы колебаний.

Собственные формы изгибно-крутильных колебаний определяются соотношениями [11]:

$$\begin{aligned}U_{zj} &= C_{zj} e^{-iK_{zj}s}, \\ U_{\varphi j} &= \beta_j C_{zj} e^{-iK_{zj}s},\end{aligned}\quad (34)$$

где K_{zj} определяются как корни уравнения

$$\bar{m}(\bar{I}_p - z_s^2 \bar{m})\omega^4 - (D_z \bar{I}_p + D_\varphi \bar{m})\omega^2 + D_z D_\varphi = 0 \quad (35)$$

с учетом кинематического инварианта [3]

$$\omega = \Omega + K_z V_x, \quad (36)$$

а постоянные C_{zj} находятся из условий сопряжения на движущихся границах [11].

В качестве решения системы (31) примем

$$\left. \begin{aligned}S_{zn} &= B_{zn} e^{i\Omega_{pn}t}, \\ S_{\varphi n} &= B_{\varphi n} e^{i\Omega_{pn}t}.\end{aligned} \right\} \quad (37)$$

Подставим в уравнения системы (31) решения (37) и соотношения для собственных форм колебаний направляющей (34) и из полученных алгебраических уравнений определим амплитуды колебаний направляющей

$$\begin{aligned}B_{z nj} &= \frac{\bar{P}_{z nj}}{\bar{M}_{z nj}} \frac{1}{\omega_j^2 - (\Omega_{pn} + K_{zj} V_x)^2}, \\ B_{\varphi nj} &= \frac{\bar{P}_{\varphi nj}}{\bar{M}_{\varphi nj}} \frac{1}{\omega_j^2 - (\Omega_{pn} + K_{zj} V_x)^2}.\end{aligned}\quad (38)$$

Колебания головки направляющей, контактирующей с опорами движущегося объекта, определяются выражением $z_r = z_n + z_b \varphi_n$. Принимая во внимание, что $U_{\varphi j} = \beta_j U_{zj}$, запишем соотношение для амплитуд колебаний головки направляющей

$$B_{r nj} = \frac{(\bar{I}_p + z_s^2 \bar{m}) U_{z nj}(s) P_{z1} U_{z nj}(s_1) + P_{z2} U_{z nj}(s_2)}{\bar{I}_p \int_0^{L_{nj}} U_{zj}^2(s) ds} \frac{1}{\omega_j^2 - (\Omega_{pn} - K_{z nj} V_x)^2}. \quad (39)$$

Рассмотрим, при каких условиях возможен резонанс в системе упругая направляющая – движущийся двухопорный объект.

Амплитуды колебаний двухопорного объекта A_{zn} и $A_{\varphi n}$ определяются выражениями (24). При равенстве нулю знаменателя в системе имеет место резонанс. Из условия $(C_{11} - \Omega_{pn}^2)(C_{22} - \Omega_{pn}^2) - C_{12}C_{21} = 0$ можно получить

$$\Omega_{pn} = \sqrt{\frac{C_{11} + C_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{C_{11} + C_{22}}{2}\right)^2 - (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})}}. \quad (40)$$

Правая часть выражения (40) представляет собой частоты свободных колебаний движущегося объекта, зависящие от упруго-инерционных характеристик движущегося объекта и динамической жесткости направляющей в движущемся контакте, определяемой соотношениями (12). То есть при сближении частот свободных колебаний движущегося объекта с частотами воздействия, обусловленными неровностями направляющей, происходит резонансное увеличение амплитуд колебаний A_{zn} и $A_{\psi n}$.

При равенстве нулю числителей выражений (24) имеет место явление антирезонанса. Частоты антирезонанса определяются выражениями

$$\begin{aligned} \Omega_{a1} &= \sqrt{C_{22} - C_{21} \frac{1 + e^{i\Omega_{pn}\Delta t}}{R_1 - R_2 e^{i\Omega_{pn}\Delta t}}}, \\ \Omega_{a2} &= \sqrt{C_{11} + C_{21} \frac{1 + e^{i\Omega_{pn}\Delta t}}{R_1 - R_2 e^{i\Omega_{pn}\Delta t}}}. \end{aligned} \quad (41)$$

Если частота воздействия, обусловленная неровностями направляющей, равна Ω_{a1} , то нулю равны перемещения движущегося объекта в направлении оси Z ; если частота равна Ω_{a2} , то отсутствуют угловые колебания в направлении угла Ψ .

Часть направляющей, ограниченная опорами движущегося объекта, является резонатором [3], поэтому наиболее устойчивыми из возбуждаемых в направляющей движущимся объектом волн будут волны, длины которых равны L_s (если контактные силы направлены в одну сторону) или $2L_s$ (если контактные силы направлены в противоположные стороны). Последнее позволяет определить частоту свободных колебаний направляющей второго уравнения системы (28) с учетом соотношений (34):

$$\begin{aligned} \omega_{1,2}^* &= \sqrt{\frac{D_z(K_{z1}^*) + D_\varphi(K_{z1}^*)}{2\bar{m}(\bar{I}_p - z_s^2\bar{m})} \pm \sqrt{\left(\frac{D_z(K_{z1}^*) + D_\varphi(K_{z1}^*)}{2\bar{m}(\bar{I}_p - z_s^2\bar{m})}\right)^2 - \frac{D_z(K_{z1}^*)D_\varphi(K_{z1}^*)}{\bar{m}(\bar{I}_p - z_s^2\bar{m})}}, \\ \omega_{3,4}^* &= \sqrt{\frac{D_z(K_{z2}^*) + D_\varphi(K_{z2}^*)}{2\bar{m}(\bar{I}_p - z_s^2\bar{m})} \pm \sqrt{\left(\frac{D_z(K_{z2}^*) + D_\varphi(K_{z2}^*)}{2\bar{m}(\bar{I}_p - z_s^2\bar{m})}\right)^2 - \frac{D_z(K_{z2}^*)D_\varphi(K_{z2}^*)}{\bar{m}(\bar{I}_p - z_s^2\bar{m})}}, \end{aligned} \quad (42)$$

где

$$K_{z1}^* = \frac{2\pi}{L_s} \text{ и } K_{z2}^* = \frac{\pi}{L_s}.$$

В связанной с движущимся объектом системе координат частоты колебаний направляющей запишем в виде

$$\begin{aligned} \Omega_{1,2}^* &= \omega_{1,2}^* - K_{z1}^* V_x, \\ \Omega_{3,4}^* &= \omega_{3,4}^* - K_{z2}^* V_x. \end{aligned} \quad (43)$$

Анализируя выражение (39), определяющее величины амплитуд колебаний головки направляющей, можно видеть, что резонансное увеличение амплитуд будет иметь место при стремлении к нулю знаменателя, который с учетом соотношений (36) и (43) запишем в виде

$$\Omega_k^{*2} - \Omega_{pn}^2 + 2\Omega_k^* V_x K_{z\kappa j} - 2\Omega_{pn} V_x K_{z\eta j} = 0. \quad (44)$$

В выражении (44) $K_{z\kappa j}$ и $K_{z\eta j}$ определяются как корни уравнения (35) при частоте Ω , равной Ω_k^* и Ω_{pn} соответственно. Очевидно, что знаменатель стремится к нулю при сближении частот свободных колебаний направляющей Ω_k^* и частот вынужденных колебаний Ω_{pn} , обусловленных неровностями направляющей.

Силы P_{z1} и P_{z2} , входящие в числитель выражения (39), зависят от амплитуд колебаний движущегося объекта A_{zn} и $A_{\psi n}$, которые, как было показано выше, возрастают при сближении частот свободных колебаний движущегося объекта и частот воздействия, обусловленных неровностями направляющей.

В числителе выражения (39) присутствуют собственные формы колебаний направляющей $U_{z\kappa j}(s)$. Однако в связанной с движущимся объектом системе координат целесообразнее рассматривать

$$U_{z\kappa}(s) = \sum_{j=1}^4 U_{z\kappa j}(s) = \sum_{j=1}^4 C_{z\kappa j} e^{-iK_{z\kappa j} s}, \quad (45)$$

где величина амплитуд $C_{z\kappa j}$ определяется из условий сопряжения на движущихся границах.

Аналитическую зависимость $U_{z\kappa}(\Omega, V_x)$ получить не представляется возможным. Поэтому предлагается рассмотреть результаты численных расчетов, проведенных по зависимости (45) при $s = 0$. На рис. 2 приведена зависимость $U_z(\Omega)$ для различных скоростей движения объекта.

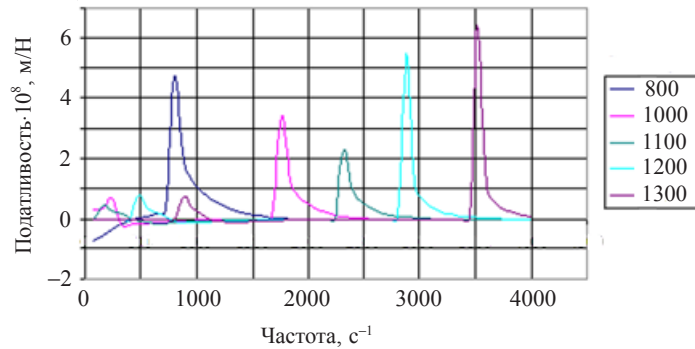


Рис. 2. Зависимость динамической податливости направляющей U_z от частоты изменения нагрузки и скорости движения объекта

Из анализа зависимостей, представленных на рис. 2, следует, что существуют частоты изменения нагрузки и скорости движения объекта, при которых наблюдается резонансное увеличение податливости направляющей U_z .

Таким образом, при движении двухопорного объекта по упругой направляющей возможно резонансное увеличение амплитуд колебаний направляющей и движущегося объекта в следующих случаях:

– при сближении частот изменения внешних сил с частотами свободных колебаний двухопорного объекта, зависящих от упруго-инерционных характеристик объекта и динамической жесткости направляющей в движущемся контакте;

– при сближении частот изменения внешних сил с частотами свободных колебаний направляющей, формируемых движущимся объектом и зависящих от жесткостных и инерционно-массовых параметров направляющей, расстояния между опорами движущегося объекта и скорости его движения;

– при определенных сочетаниях скорости движения объекта и частоты изменения контактных сил, вызывающих резонансное увеличение податливости направляющей.

Полученные выводы можно проверить с помощью численных расчетов взаимодействия ступени ракетного поезда с рельсовыми направляющими, имеющими отклонения от прямолинейности.

Однако при этом необходимо иметь в виду, что приведенные математические выкладки справедливы для линейных систем. Реальная система движущаяся ступень ракетного поезда – рельсовая направляющая обладает существенными нелинейностями, обусловленными наличием зазоров между рабочими поверхностями опорных башмаков ступени и рельсовыми направляющими и условиями на скользящем контакте (в результате фрикционного нагрева меняются механические свойства материала башмака и происходит унос материала с его поверхностей). Поэтому можно говорить лишь о качественном сравнении полученных выводов с результатами численных расчетов движения ступени ракетного поезда по направляющим, имеющим отклонения от прямолинейности.

Полученные выводы относительно причин возникновения резонансов позволяют определить меры борьбы с ними:

– исключение резонансоопасных гармоник путем дополнительной юстировки начальной непрямолинейности рельсовых направляющих;

– подбор жесткости опор ступени ракетного поезда для ухода от резонансоопасных частот.

Список литературы

1. Бутова С.В., Герасимов С.И., Ерофеев В.И., Камчатный В.Г. Устойчивость движения высокоскоростных объектов по направляющим ракетного трека. *Проблемы машиностроения и надежности машин*. 2015. №1. С. 3–8.

2. Метрикин А.В. Резонанс в системе упругая направляющая – движущийся осциллятор. *Акустический журнал*. 1994. Т. 40, №6. С. 974–978.

3. Весницкий А.И. *Избранные труды по механике*. Отв. ред. В.И. Ерофеев, Е.Е. Лисенкова. Н. Новгород: ИД «Наш дом», 2010. 248 с.

4. Иориш Ю.И. *Виброметрия*. М.: ГНТИ машиностроительной литературы, 1963. 774 с.

5. Артоболевский И.И., Бобровницкий Ю.И., Генкин М.Д. *Введение в акустическую динамику машин*. М.: Наука, 1979. 296 с.

6. Ерофеев В.И., Кажаяев В.В., Семерикова Н.П. *Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность*. М.: Физматлит, 2002. 208 с.

7. Филиппов А.П. *Колебания деформируемых систем*. М.: Машиностроение, 1970. 734 с.

8. Веричев С.Н., Метрикин А.В. Динамическая жесткость балки в движущемся контакте. *Прикладная механика и техническая физика*. 2000. Т. 41, №6. С. 170–177.

9. Привалов И.И. *Введение в теорию функций комплексного переменного*. М.: Наука, 1984. 432 с.

10. Моссаковский В.И., Макаренко А.Г., Никитин П.И. и др. *Прочность ракетных конструкций*. Под ред. В.И. Моссаковского. М.: Высшая школа, 1990. 360 с.

11. Камчатный В.Г. Особенности динамики взаимодействия высокоскоростных объектов с рельсовой направляющей. *Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения*. Сб. докл. науч. конф. Волжского регионального центра РАН. Саров: Изд-во РФЯЦ – ВНИИЭФ, 2000. С. 202–209.

References

1. Butova S.V., Gerasimov S.I., Erofeev V.I., Kamchatny V.G. Ustoychivost' dvizheniya vysokoskorostnykh ob'ektov po napravlyayushchim raketnogo treka. *Problemy mashinostroeniya i nadezhnosti mashin*. 2015. №1. S. 3–8.
2. Metrikin A.V. Rezonans v sisteme uprugaya napravlyayushchaya – dvizhushchiysya ostsilyator. *Akusticheskiy zhurnal*. 1994. T. 40, №6. S. 974–978.
3. Vesnitskiy A.I. *Izbrannye trudy po mekhanike*. Otv. red. V.I. Erofeev, E.E. Lisenkova. N. Novgorod: ID “Nash dom”, 2010. 248 s.
4. Iorish Yu.I. *Vibrometriya*. M.: GNTI mashinostroitel'noy literatury, 1963. 774 s.
5. Artobolevskiy I.I., Bobrovnikskiy Yu.I., Genkin M.D. *Vvedenie v akusticheskuyu dinamiku mashin*. M.: Nauka, 1979. 296 s.
6. Erofeev V.I., Kazhaev V.V., Semerikova N.P. *Volny v sterzhnyakh. Dispersiya. Dissipatsiya. Nelineynost'*. M.: Fizmatlit, 2002. 208 s.
7. Filippov A.P. *Kolebaniya deformiruemyykh sistem*. M.: Mashinostroenie, 1970. 734 s.
8. Verichev S.N., Metrikin A.V. Dinamicheskaya zhestkost' balki v dvizhushchemsya kontakte. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*. 2000. T. 41, №6. S. 170–177.
9. Privalov I.I. *Vvedenie v teoriyu funktsiy kompleksnogo peremennogo*. M.: Nauka, 1984. 432 s.
10. Mossakovskiy V.I., Makarenkov A.G., Nikitin P.I. i dr. *Prochnost' raketnykh konstruksiy*. Pod red. V.I. Mossakovskogo. M.: Vysshaya shkola, 1990. 360 s.
11. Kamchatny V.G. Osobennosti dinamiki vzaimodeystviya vysokoskorostnykh ob'ektov s rel'sovoy napravlyayushchey. *Sovremennye metody proektirovaniya i otrabotki raketno-artillerijskogo vooruzheniya*. Sb. dokl. nauch. konf. Volzhskogo regional'nogo tsentra RARAN. Sarov: Izd-vo RFYaTs – VNIIEF, 2000. С. 202–209.

ESTIMATION OF RESONANCE- DANGEROUS HARMONICS ARISING IN A VIBRATING ELASTIC GUIDE ALONG WHICH AN OBJECT WITH TWO SUPPORTS MOVES

Gerasimov S.I.^{1,2}, Erofeev V.I.^{2,3}, Kamchatny V.G.¹, Kanygin I.I.¹

¹*Sarov Physics and Technical Institute of National Research Nuclear University MEPhI,
Sarov, Russian Federation*

²*Mechanical Engineering Research Institute of RAS,
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

³*Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation*

The analysis of resonance in the system "an elastic guide – a moving object with two supports" has been executed. The dynamic behavior of the guide is modeled by a beam performing flexural-torsional vibrations, and an object with two supports represents two oscillators coupled by absolutely rigid connection. It is shown that in the system the resonant increase of vibration amplitudes is possible in the following cases: when the frequencies of variation of the external forces are close to the frequencies of free oscillations of an object with two supports, which depend on the elastic-inertial characteristics of the object and the dynamic stiffness of the guide in the moving contact; if the frequencies of variation of external forces are close to the frequencies of free oscillations of the guide, which are generated by a moving object and depend on the stiffness and inertial-mass parameters of the guide and the distance between the supports of the moving object and its velocity;

for certain combinations of the speed of the object movement and the frequency of variation of the contact forces causing the resonant increase of the guide compliance. The following measures are offered against resonant phenomena: elimination of resonance-dangerous harmonics from the initial misalignment of railway guides by their additional adjustment; choice of stiffness of supports of a rocket train stage in order to evade resonance-dangerous frequencies.

Keywords: elastic guide, flexural-torsional vibrations, a moving object with two supports, resonance.