

УДК 534.014

К ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ НЕАВТОНОМНЫХ ВИБРАЦИОННЫХ СИСТЕМ С ТРЕНИЕМ НАСЛЕДСТВЕННОГО ТИПА*

© 2015 г.

Зайцев М.В., Метрикин В.С.

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Российская Федерация*

v.s.metrikin@mail.ru

Поступила в редакцию 19.07.2015

С использованием метода точечных отображений и разработанного программного продукта на платформе Java изучается динамика вибрационной системы, представляющей собой прикрепленное с помощью пружины к неподвижной преграде тело, на которое воздействует внешняя периодическая сила. Тело располагается на шероховатой ленте, движущейся по периодическому закону. Динамическая модель такой системы – это система с переменной структурой. При составлении математической модели используется гипотеза А.Ю. Ишлинского и И.В. Крагельского о том, что коэффициент трения относительного покоя не является постоянной величиной, а представляет собой монотонно возрастающую функцию времени относительного покоя тела. Бифуркационный подход изучения динамики позволил выявить основные перестройки периодических и стохастических режимов движения в зависимости от параметров системы (амплитуда и частота периодического воздействия на тело и ленту, формы функциональной зависимости, описывающей изменение величины коэффициента трения относительного покоя, и другие параметры). Приводятся результаты численных экспериментов, демонстрирующих существование в рассматриваемой динамической модели сложных периодических режимов движения (циклы n -кратных неподвижных точек точечного отображения), а также существование хаотических движений (процесс удвоения периода).

Ключевые слова: математическая модель, точечные отображения, бифуркационная диаграмма, трение наследственного типа, хаос.

Введение

Гипотеза А.Ю. Ишлинского и И.В. Крагельского о том, что коэффициент трения относительного покоя при движении двух трущихся тел не является постоянной величиной, а зависит от времени их «предыдущего» совместного движения с одинаковыми скоростями [1], привлекла внимание ученых, занимающихся исследованием систем с трением [2–4]. В этих работах показано, что в таких системах, в

* Выполнено при финансовой поддержке ФЦП «Исследования и разработки по приоритетным направлениям развития научно-технологического комплекса России на 2014–2020 годы», соглашение №14.578.21.0036.

отличие от систем с постоянным коэффициентом трения относительного покоя, существуют сколь угодно сложные периодические и стохастические режимы движения.

Динамические вибрационные системы, схема которых совпадает со схемами, изученными в работах [2–4], рассматривались и зарубежными учеными [5–7], однако в них не была использована гипотеза А.Ю. Ишлинского и И.В. Крагельского, а использовалась классическая модель трения покоя. В настоящей статье модель трения покоя выбрана в соответствии с указанной гипотезой.

1. Математическая модель

Исследуемая физическая система представляет собой тело массой m , находящееся на шероховатой ленте, движущейся с изменяющейся по периодическому закону скоростью $V(t)$. Тело прикреплено пружиной с жесткостью k к неподвижной опоре (рис. 1а).

На тело действует сила трения и периодическая по времени сила $f(t)$. При движении двух шероховатых тел, находящихся в контакте, необходимо учитывать два вида сил трения: силу трения скольжения и силу трения относительного покоя f_n . Предполагается, что коэффициент трения скольжения f_* является постоянной величиной, а коэффициент трения относительного покоя, согласно гипотезе А.Ю. Ишлинского и И.В. Крагельского, есть непрерывная монотонно возрастающая функция времени относительного покоя тела и ленты t_k (сила трения с «памятью»), см. рис. 1б. В качестве математической модели сил трения выбрано трение Кулона – Амонтона.

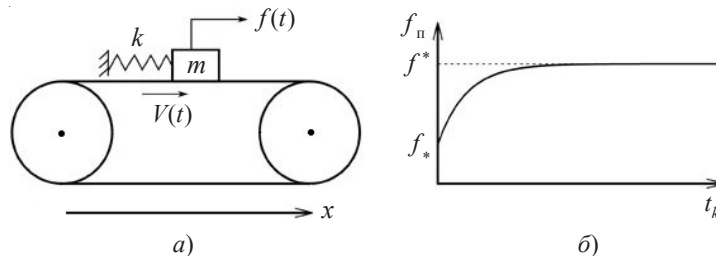


Рис. 1

Математическую модель рассматриваемой системы можно записать в виде

$$m\ddot{x} = f(t) - kx - f_*P \operatorname{sign}(\dot{x} - V(t)), \quad \dot{x} \neq V(t), \quad (1)$$

$$|kx - f(t) + m\dot{V}(t)| \leq f_n(t_k)P, \quad \dot{x} = V(t), \quad (2)$$

где P – вес тела; уравнение (1) описывает закон движения тела с учетом коэффициента трения скольжения f_* со скоростью, отличной от скорости ленты, а неравенство (2) устанавливает соотношение сил, при выполнении которого происходит движение тела со скоростью, равной скорости ленты. Отметим, что при постоянной $V(t)$ и $f(t) = 0$ математическая модель (1), (2) совпадает с соответствующими уравнениями работы [4], а при постоянной $V(t)$ и $f(t) \neq 0$ – с уравнениями работы [8].

После введения безразмерных времени $\tau = t\omega_0$, переменной $\xi = xk/(f_*P)$ и параметров $\omega_0 = \sqrt{k/m}$, $\theta(\tau) = V\sqrt{km}/(f_*P)$ система (1), (2) примет вид:

$$\ddot{\xi} + \xi = F(\tau) - \text{sign}(\dot{\xi} - \theta(\tau)), \quad \dot{\xi} \neq \theta(\tau), \quad (3)$$

$$|\xi - F(\tau) + \dot{\theta}(\tau)| \leq 1 + \varepsilon(\tau_k), \quad \dot{\xi} = \theta(\tau), \quad (4)$$

где $\varepsilon(\tau_k) = (f_{\text{п}}(\tau_k) - f_*)/f_*$ – безразмерная характеристика коэффициента трения относительного покоя, $F(\tau) = f(\tau/\omega_0)/(f_*P)$ – безразмерная внешняя сила.

2. Структура фазового пространства

Так как система неавтономна и описывается дифференциальным уравнением второго порядка с переменной структурой, то ее состоянием является тройка $\{\xi, \dot{\xi}, \tau\}$, а фазовое пространство соответственно трехмерное. Оно поверхностью $\Pi(\dot{\xi} = \theta)$ разделено на два полупространства $\Phi_1(\xi, \dot{\xi} > \theta, \tau)$ и $\Phi_2(\xi, \dot{\xi} < \theta, \tau)$, поведение фазовых траекторий в которых описывается соответственно уравнениями

$$\ddot{\xi} + \xi = F(\tau) - 1, \quad \dot{\xi} > \theta(\tau), \quad (5)$$

$$\ddot{\xi} + \xi = F(\tau) + 1, \quad \dot{\xi} < \theta(\tau). \quad (6)$$

Можно показать, что на поверхности Π существует область скользящих движений [7] Π_c , ограниченная кривыми Γ_1 и Γ_2 :

$$\Gamma_1 : \begin{cases} \xi = 1 + F(\tau) - \dot{\theta}(\tau), \\ \dot{\xi} = \theta(\tau), \end{cases} \quad (7)$$

$$\Gamma_2 : \begin{cases} \xi = -1 + F(\tau) - \dot{\theta}(\tau), \\ \dot{\xi} = \theta(\tau). \end{cases} \quad (8)$$

При попадании изображающей точки в область Π_c ее движение будет изменяться по закону

$$\xi(\tau) = \int_{\tau_{\text{п}}}^{\tau} \theta(\eta) d\eta + \xi_{\text{п}}, \quad (9)$$

где $\{\xi_{\text{п}}, \tau_{\text{п}}\} \in \Pi_c, \tau \geq \tau_{\text{п}}$.

Качественный вид поведения фазовых траекторий в фазовом пространстве системы, включая участки, когда скорости ленты и тела равны – длительные относительные «остановки» (ДОО), – при переменной внешней силе приведен на рис. 2.

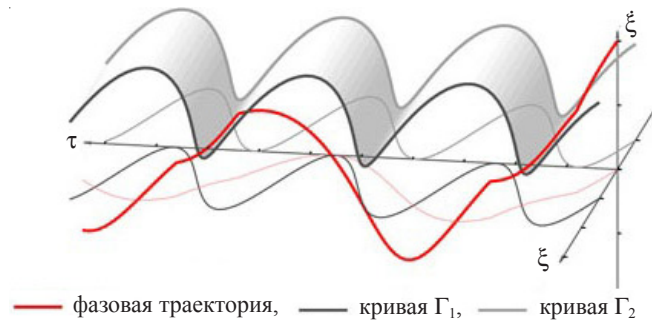


Рис. 2

Серая полоса на рисунке – область Π_c , находящаяся между кривыми Γ_1 и Γ_2 ,

каждая из которых имеет спиралевидную пространственную форму. Оттенок области обозначает положение соответствующей области по координате ξ , светлые области выше темных. Более тонкие линии обозначают проекции соответствующих кривых на плоскость $\{\xi, \tau\}$.

3. Функция последования

При изучении динамики системы (1), (2) выбраны следующие формы скорости ленты $\theta(\tau) = A \cos(\Omega\tau) + B$ и внешней силы $F(\tau) = M \cos(\Phi\tau)$.

Безразмерная функциональная зависимость коэффициента трения относительного покоя $\varepsilon(\tau_k)$ принималась в виде монотонно возрастающей кусочно-непрерывной функции

$$\varepsilon(\tau_k) = \begin{cases} \tau_k, & \tau_k \leq \varepsilon_*, \\ \varepsilon_*, & \tau_k \geq \varepsilon_*, \end{cases} \quad (10)$$

где $\varepsilon_* = (f^* - f_*) / f_* \geq 0$.

Исходя из того, что уравнения (5), (6) линейны, их общие решения будут записываться, как известно, в виде

$$\begin{cases} \xi_i(\tau) = C_{2i-1} \cos \tau + C_{2i} \sin \tau + (-1)^i + \xi_F(\tau), \\ \dot{\xi}_i(\tau) = -C_{2i-1} \sin \tau + C_{2i} \cos \tau + \dot{\xi}_F(\tau), \\ (-1)^i \dot{\xi}_i < (-1)^i \theta(\tau), \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (11)$$

$$\xi_F(\tau) = \frac{M}{1 - \Phi^2} \cos \Phi\tau.$$

Пусть $M_i(\tau_i, \xi_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$, – последовательность точек на поверхности Π , не принадлежащая области скользящих движений, определяемая уравнением (5) для $i = 2k < n$, $k = 1, 2, \dots$, и уравнением (6) для $i = 2m + 1 < n$, $m = 0, 1, \dots$, причем координатами начальной точки M_0 являются $\tau = \tau_0$, $\xi = 1 + \varepsilon(\tau_{k,c})$, $\dot{\xi} = \theta(\tau_0)$. Тогда найдется такое n , что следующая за M_n точка $M_{n+1}(\tau_n, \xi_n)$ будет обязательно принадлежать области скользящих движений Π_c , а ее движение подчиняться уравнению (9) до тех пор, пока выполняется соотношение (4). Обозначим через T_+ точечное преобразование точек $M_{2k+1} \rightarrow M_{2k+2}$, $k = 0, 1, 2, \dots < n$, а через T_- – преобразование точек $M_{2m} \rightarrow M_{2m+1}$, $m = 1, 2, \dots < n$. Очевидно, что изображающая точка $M_{n+1}(\tau_n, \xi_n)$ попадет на область скользящих движений после n преобразований вида $T_j(j, l, n) = l$, $j = 0, 1, \dots, n$. Тогда уравнения, связывающие переменные движения изображающей точки в области скользящих движений до «плавающей границы» в двух последующих моментах времени $\tau_{k,c}$, $\tau_{k+1,c}$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} (-1)^i + (-1)^i \varepsilon(\tau_{k+1,c}) + F(\tau_{k+1,c}) &= \frac{A}{\Omega} (\sin(\Omega\tau_{k+1,c}) - \sin(\Omega\tau_n)) - A\Omega \sin(\Omega\tau_{k+1,c}) + \\ &+ B(\tau_{k+1,c} - \tau_n) + \xi_n(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_k, \tau_{k,c}), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (12)$$

Вводя в рассмотрение функции

$$\psi(\tau) = -\varepsilon(\tau) + \frac{A}{\Omega} (\sin(\Omega\tau) - \sin(\Omega\tau_n)) - A\Omega \sin(\Omega\tau) + B(\tau - \tau_n) - F(\tau_{k+1,c}), \quad (13)$$

$$\phi(\tau) = 1 - (-1)^j \xi_n(\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_n, \tau), \quad j = 1, 2, \dots, \quad 2(j-1) < \varepsilon(\tau) < 2j, \quad (14)$$

можно записать связь между двумя последовательными временами τ_k, τ_{k+1} совместного движения тела с лентой (ДОО) в виде

$$\psi(\tau_{k+1}) = \phi(\tau_k). \quad (15)$$

При $\theta(\tau) \equiv \theta = \text{const}$ и $F(\tau) \equiv 0$ функции $\psi(\tau)$ и $\phi(\tau)$ выглядят следующим образом [4]:

$$\psi(\tau) = \varepsilon(\tau) + \theta \cdot (\tau - \tau_n), \quad (16)$$

$$\phi(\tau) = 1 - (-1)^j [\varepsilon(\tau) - 2j + 1], \quad 2(j-1) < \varepsilon(\tau) < 2j. \quad (17)$$

Здесь j – количество точек $M_j \notin \Pi_c$. Установлено [4], что в системе с таким видом функций могут существовать периодические движения с произвольным числом длительных остановок.

Так как изображающая точка почти всегда попадает в область скользящих движений, динамику системы можно исследовать с помощью изучения свойств точечного отображения границы Γ_1 (Γ_2) в себя [9, 10] либо свойств числовой последовательности, элементы которой равны временам $\tau_k, k = 1, 2, 3, \dots$ ДОО, как показано на рис. 3, где стрелками в плоскости Π_c обозначены траектории изображающей точки при ДОО.

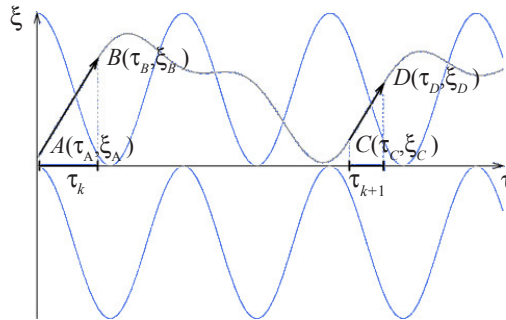


Рис. 3

4. Результаты численных расчетов

Для исследования динамики рассматриваемой системы с использованием функции последования разработан программный продукт на платформе Java, позволяющий при различных значениях параметров системы производить расчеты и построение в трехмерном фазовом пространстве фазовых траекторий, функции последования, бифуркационных диаграмм и др.

При расчетах все переменные и параметры представлены форматом чисел с плавающей точкой двойной точности. Построение фазовых траекторий производится по кускам, определяемым как участки траектории с определенным, отличным от соседних кусков, законом движения. Кусков бывает три вида: находящиеся в области скользящих движений Π ($\dot{\xi} = \theta$), над ней ($\dot{\xi} \geq \theta$) и под ней ($\dot{\xi} \leq \theta$). Каждый кусок вычисляется из начальной точки последовательным приращением времени конечной точки до тех пор, пока конечная точка не окажется в области с другим законом движения. После этого конечная точка текущего куска и соответствен-

но начальная точка следующего определяется методом половинного деления. Новые участки траектории вычисляются до тех пор, пока время τ или число участков в области скользящих движений (по выбору пользователя) не превысит заданный пользователем предел.

Для построения бифуркационных диаграмм определяется набор значений варьируемого параметра, затем для каждого такого значения варьируемого параметра вычисляется своя траектория с общей заданной начальной точкой и общими ограничениями размера траектории (числом участков совместного движения и конечным временем τ). Из рассчитанных для каждой траектории времен совместного движения тела с лентой берется заданное число (обычно 30) последних и используется для построения графика.

На рис. 4 и 5 приведены примеры численных расчетов, полученных указанным выше образом. Так, на рис. 4 приведены бифуркационные диаграммы по частоте Ω функциональной зависимости скорости ленты при $\theta(\tau) = 0,1 \cos(\Omega\tau) + 1$, $F(\tau) = M \cos(2\tau)$, $\epsilon_* = 3$. Отдельные диаграммы различаются значениями амплитуды внешней силы M , которые составляют соответственно 0 (рис. 4а); 0,01 (рис. 4б); 0,02 (рис. 4в); 0,04 (рис. 4г). Рисунок 4 наглядно демонстрирует известный процесс удвоения периода Фейгенбаума и рождение хаоса [11].

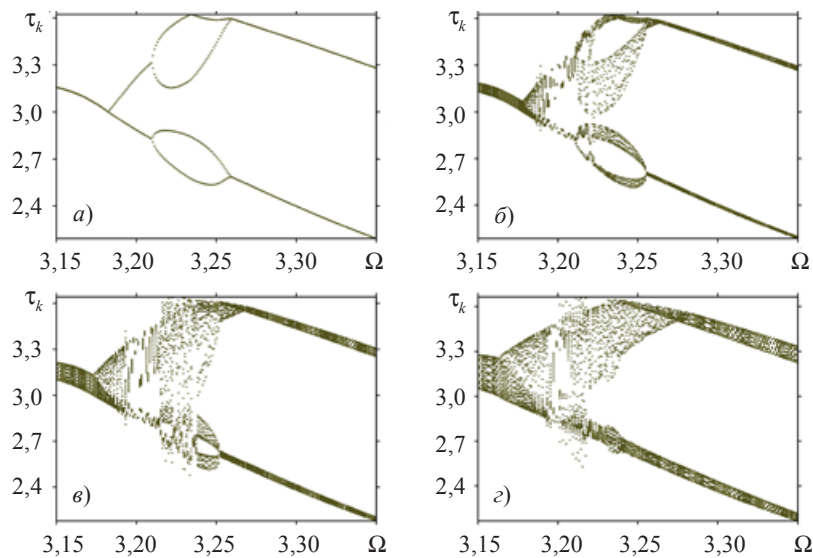


Рис. 4

На рис. 5 приведены отрывки осциллограмм (рис. 5а, б, в) и диаграмма Ламе-рея (рис. 5г) для различных траекторий с бифуркационной диаграммы на рис. 4а. На осциллограммах штриховой линией приведена траектория движения ленты $\theta(\tau)$, а сплошной линией – траектория движения тела $\xi(\tau)$. Значения частоты Ω , взятые для осциллограмм (рис. 5а, б, в), соответственно равны 3,15; 3,20; 3,23. Осциллограммы демонстрируют периодические движения с одной, двумя и четырьмя длительными остановками. Это наглядно следует из рис. 5а, б, в, когда штриховые и сплошные траектории совпадают (происходит совместное движение тела и ленты с равными скоростями). Так, из рис. 5а видно, что циклически повторяющаяся форма траектории изображающей точки содержит один участок совпадения кривых

$\theta(\tau)$ и $\xi(\tau)$, что соответствует периодическому движению тела с одним промежутком движения с одинаковыми скоростями тела и ленты. На рис. 5б таких участков уже два, с «высоким» и «низким» пиком, что соответствует периодическому режиму движения тела с двумя промежутками движения с одинаковыми скоростями тела и ленты. Рисунок 5в демонстрирует периодические режимы движения тела с четырьмя промежутками движения с одинаковыми скоростями тела и ленты.

Диаграмма Ламерея (рис. 5г) построена для значений параметров, равных значениям, выбранным для построения осциллограммы на рис. 5в. Из этого рисунка видно, что в данном случае существует четырехкратный цикл (четыре устойчивые неподвижные точки функции последования).

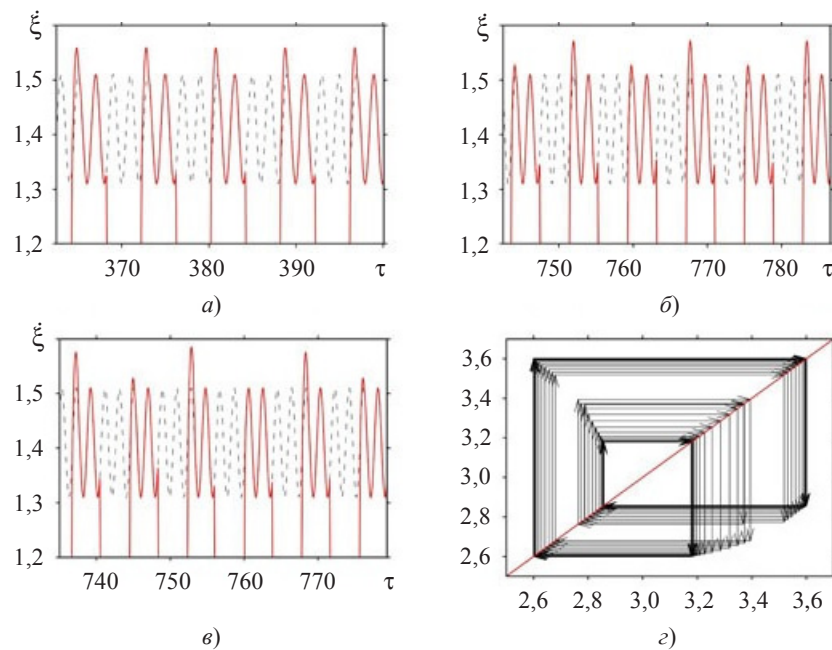


Рис. 5

Как видно из рис. 4 и 5, в зависимости от значений параметров система может демонстрировать различные типы движений, включая хаос.

Заключение

В статье приведены результаты исследования динамики неавтономной системы с переменной структурой с учетом сил трения наследственного типа, полученные численно-аналитическими методами с применением математического аппарата точечных отображений поверхностей Пуанкаре. Установлено, что бифуркационный подход позволил выявить основные перестройки периодических и стохастических режимов движения в зависимости от параметров системы.

Список литературы

1. Ишлинский А.Ю., Крагельский И.В. О скачках при трении. *Журнал технической физики*. 1944. Е. 14. Вып. 4/5. С. 276–282.
2. Каценевский Л.Я. Стохастические автоколебания при сухом трении. *Инженерно-*

физический журнал. 1984. Т. 47, №1. С. 143–147.

3. Ветюков М.М., Доброславский С.В., Нагаев Р.Ф. Автоколебания в системе с характеристикой сухого трения наследственного типа. *Изв. АН СССР. МТТ*. 1990. №1. С. 23–28.

4. Метрикин В.С., Нагаев Р.Ф., Степанова В.В. Периодические и стохастические автоколебания в системе с сухим трением наследственного типа. *ПММ*. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 859–864.

5. Leine R.I., van Campen D.H., De Kraker A. Stick-slip vibrations induced by alternate friction models. *Nonlinear Dynamics*. 1998. **16**. P. 41–54.

6. Leine R.I., van Campen D.H., De Kraker A. Approximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure. *Nonlinear Dynamics*. 1999. **19**. P. 157–169.

7. Leine R.I., van Campen D.H. Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems. *Archive of Applied Mechanics*. 2002. **72**. P. 138–146.

8. Зайцев М.В., Метрикин В.С. К теории неавтономной динамической системы с трением наследственного типа. *Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского*. 2012. №3(1). С. 141–146.

9. Фейгин М.И. *Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями*. М.: Наука, 1994. 285 с.

10. Неймарк Ю.И. *Метод точечных отображений в теории нелинейных колебаний*. М.: Наука, 1972. 471 с.

11. Шустер Г. *Детерминированный хаос*. М.: Мир, 1988. 237 с.

References

1. Ishlinskiy A. Yu., Kragel'skiy I.V. O skachkakh pri trenii. *Zhurnal tekhnicheskoy fiziki*. 1944. E. 14. Вып. 4/5. S. 276–282.

2. Kashchenevskiy L. Ya. Stokhasticheskie avtokolebaniya pri sukhom trenii. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*. 1984. Т. 47, №1. S. 143–147.

3. Vetyukov M.M., Dobroslavskiy S.V., Nagaev R.F. Avtokolebaniya v sisteme s kharakteristikoy sukhogo treniya nasledstvennogo tipa. *Izv. AN SSSR. MTT*. 1990. №1. С. 23–28.

4. Metrikin V.S., Nagaev R.F., Stepanova V.V. Periodicheskie i stokhasticheskie avtokolebaniya v sisteme s sukhim treniem nasledstvennogo tipa. *PMM*. 1996. Т. 60. Вып. 5. S. 859–864.

5. Leine R.I., van Campen D.H., De Kraker A. Stick-slip vibrations induced by alternate friction models. *Nonlinear Dynamics*. 1998. **16**. P. 41–54.

6. Leine R.I., van Campen D.H., De Kraker A. Approximate analysis of dry-friction-induced stick-slip vibrations by a smoothing procedure. *Nonlinear Dynamics*. 1999. **19**. P. 157–169.

7. Leine R.I., van Campen D.H. Discontinuous fold bifurcations in mechanical systems. *Archive of Applied Mechanics*. 2002. **72**. P. 138–146.

8. Zaytsev M.V., Metrikin V.S. K teorii neavtonomnoy dinamicheskoy sistemy s treniem nasledstvennogo tipa. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N.I. Lobachevskogo*. 2012. №3(1). S. 141–146.

9. Feygin M.I. *Vynuzhdennye kolebaniya sistem s razryvnymi nelineynostyami*. М.: Nauka, 1994. 285 с.

10. Neymark Yu.I. *Metod tochechnykh otobrazheniy v teorii nelineynykh kolebaniy*. М.: Nauka, 1972. 471 с.

11. Shuster G. *Determinirovannyi khaos*. М.: Mir, 1988. 237 с.

TO THE THEORY OF NONAUTONOMOUS OSCILLATORS WITH TIME-DEPENDENT DRY FRICTION

Zaitsev M.V., Metrikin V.S.

Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod, Russian Federation

The dynamics of an oscillator are analyzed numerically using Poincare maps and an algorithm implemented in Java. The oscillator consists of a body, that is attached to inertial space by a spring.

A periodic force is acting on the body. The body rides on a belt with dry friction. The belt moves with periodically changing velocity. The mathematical model of the oscillator uses the hypothesis of A. Yu. Ishlinsky and I. V. Kragelsky, according to which the coefficient of static friction is not constant, but is a continuous monotonically increasing function of the time of stationary contact (stick motion of the body and the belt). The dynamics of the oscillator are analyzed using Poincaré maps to find shifts between periodic and chaotic motions with the change of the model parameters. Numerical results are presented, which show that there are complex periodic motions (cycles with multiple fixed points of the Poincaré map) and chaotic motions.

Keywords: mathematical model, Poincaré map, bifurcation diagram, time-dependent static friction, chaos.