

УДК 539.3

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИИ УПРУГИХ ВОЛН В КОМПОЗИТАХ НА ОСНОВЕ ДВУХСКОРОСТНОЙ МОДЕЛИ

К.В. Кукуджанов

Москва

В работе [1] на основе теории многоскоростных моделей сплошной среды построена модель двухфазного композита, состоящего из упругих волокон или слоев, между которыми находится неупругая вязкопластическая матрица. Рассмотрены различные варианты упаковки волокон и слоев и получена полная система уравнений динамики, учитывающая вязкопластическое взаимодействие матрицы и включений. В частном случае из них следуют уравнения для упругого композита.

На основе этих уравнений в настоящей работе приводятся результаты исследования распространения гармонических волн в упругих композитах. Получены дисперсионные кривые при различной ориентации волокон или слоев композита. Дано сравнение с экспериментальными результатами, подтверждающими преимущества подхода, принятого в [1].

1. Введение

Толчком к развитию различных континуальных моделей динамики композитов послужила неспособность теории эффективных модулей описывать дисперсию плоских волн, которая является важной интегральной характеристикой материала, играющей определяющую роль в распространении нестационарных волн в композите.

Чтобы учесть неоднородность композита, в ряде работ композит рассматривался как смесь упругих сред [2–4]. Формулировка основных законов для композитов смеси не встречает принципиальных трудностей, чего нельзя сказать о законе взаимодействия между компонентами смеси и определяющих соотношениях для них. После того как установлен общий вид определяющих соотношений для компонентов смеси и законов взаимодействия между ними, не противоречащих термодинамике и принципу материальной объективности [1], встает задача о конкретизации этих выражений и об определении входящих в них механических констант смеси. Эта задача представляет собой основную трудность. Существует две возможности ее решения: аналитическое на основе микромоделного анализа, использующего знания микроструктуры материала и индивидуальных характеристик его компонент, и феноменологическое, основанное на использовании экспериментальных данных.

Основные исследования относятся к исследованию дисперсионных уравнений задач одномерного распространения волн в упругих композитах для различных моделей. Неоднородные модели многоскоростных смесей в случае неупругого деформирования композитов в литературе практически отсутствуют. Учет неоднородности структуры, например, в двумерных задачах по распространению неупругих

волн в композитах, представляет значительный интерес. Что касается теории эффективных характеристик, то она пренебрегает влиянием неоднородности материала на процесс распространения волн. Однако ее существенным преимуществом является то, что в этом случае приходится решать обычную систему уравнений механики сплошных сред. Это значительно упрощает задачу по сравнению с двухскоростной моделью смеси.

Для того чтобы понять, насколько точно предложенная в [1] двухскоростная модель воспроизводит реальную дисперсию в композитах, в настоящей работе приводится исследование распространения гармонических волн в упругих композитах на основе этой модели. Получены дисперсионные кривые и приведено сравнение этих кривых для плоских гармонических волн с имеющимися в литературе аналитическими и экспериментальными результатами. Приведен обзор результатов работ, посвященных этому вопросу.

2. Основные уравнения

Полная система уравнений движения двухфазной смеси в случае упругих деформаций волокон и упруговязкопластической деформации матрицы приводится в [1]. Считаем композит упругим, тогда полная система упрощается и принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}(\rho_1 + \rho_{12})\dot{v}_i^{(1)} &= \sigma_{ij,j}^{(1)} + K(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) + \rho_{12}\dot{v}_i^{(2)}, \\(\rho_2 + \rho_{12})\dot{v}_i^{(2)} &= \sigma_{ij,j}^{(2)} + K(u_i^{(2)} - u_i^{(1)}) + \rho_{12}\dot{v}_i^{(1)}, \\ \dot{u}_i^{(\alpha)} &= v_i^{(\alpha)}, \\ \dot{\sigma}_{ij,j}^{(\alpha)} &= L_{ijkl}^{(\alpha)} \frac{v_{k,l}^{(\alpha)} + v_{l,k}^{(\alpha)}}{2}, \quad i, j = 1, 2, 3,\end{aligned}\tag{1}$$

где ρ_α – плотность, $\mathbf{u}^{(\alpha)} = (u_i^\alpha)$ – вектор перемещений, $\mathbf{v}^{(\alpha)} = (v_i^\alpha)$ – вектор скоростей, $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$ – тензор напряжений α компонента смеси, $L^{(\alpha)}$ – матрица упругих модулей, $\alpha = f, m$ (индекс f относится к волокну, а m – к матрице). Все механические константы смеси $\rho_\alpha, L^{(\alpha)}, \rho_{12}, K$ – определяются в явном виде по известным характеристикам компонентов волокнистого или слоистого композитов в [1].

Рассмотрим решение системы уравнений (1) вида бегущей гармонической волны:

$$u_i^{(\alpha)} = A_i^{(\alpha)} e^{ik(n_i x_i - ct)},\tag{2}$$

где k – волновое число, c – фазовая скорость, $A_i^{(\alpha)}$ – амплитуда волны, \mathbf{n} – единичная нормаль в направлении распространения. Условием существования нетривиального решения вида (2) является выполнение дисперсионного соотношения, связывающего c и k . Для плоских волн, распространяющихся в главных направлениях, то есть вдоль осей симметрии материала, это дисперсионное соотношение можно записать в виде:

$$\begin{aligned}[\rho_1 \rho_2 + (\rho_1 + \rho_2) \rho_{12}] k^2 c^4 - [\rho_2 l_1 + \rho_1 l_2 + \rho_{12} (l_1 + l_2)] c^2 k^2 + \\ + [l_1 l_2 k^2 + (l_1 + l_2) K] - \rho_{12} K c^2 = 0,\end{aligned}\tag{3}$$

входящие в него величины l_α принимают определенные значения для каждого типа композита. В случае композитов с трансверсальной изотропией для продольных, поперечных вертикально поляризованных и горизонтально поляризованных волн, распространяющихся в плоскости изотропии материала (направление x , для слоистого и волокнистого композитов), соответственно имеем $l_\alpha = c_{11}^{(\alpha)}, c_{66}^{(\alpha)}, c_{44}^{(\alpha)}$. Для продольных и поперечных волн вдоль оси изотропии (ось x_3) соответственно имеем $l_\alpha = c_{33}^{(\alpha)}, c_{66}^{(\alpha)}$, где c_{ij} – упругие модули композита. Согласно (3), каждому значению волнового числа k реально соответствуют два значения скорости $c(k)$. На плоскости k – c они образуют две спектральные дисперсионные кривые. Первой (главной) моде соответствует конечная скорость распространения, а второй моде – бесконечная при $k \rightarrow 0$.

3. Сравнение результатов

Рассмотрим слоистый композит с изотропными слоями, параметры которых даны в табл. 1. В приводимых ниже таблицах α – фаза (f – волокно, m – матрица); η_α – объемное содержание α -й фазы; λ и μ – упругие постоянные Ламе; h_α – характерный размер представительного объема V , на котором происходит существенное изменение макровеличин; ρ_α – плотность. Теоретические дисперсионные кривые главной моды для волн, распространяющихся перпендикулярно и параллельно к слоям, приведены в [6] и сравниваются там с дисперсионными кривыми, полученными по теории эффективных жесткостей первого порядка. Аналогичные дисперсионные кривые для второй моды приведены в работе [7], там же приводятся теоретические кривые двух мод для волн, распространяющихся под углом к слоям.

Таблица 1

α	η_α	$\lambda^{(\alpha)}$, ГПа	$\mu^{(\alpha)}$, ГПа	ρ_α , г/см ³
f	0,8	150	100	3
m	0,2	2,33	1	1

На рис. 1,а представлены точные теоретические и полученные по рассматриваемой модели дисперсионные кривые для первой и второй моды для продольных и поперечных горизонтально поляризованных волн, распространяющихся в главных

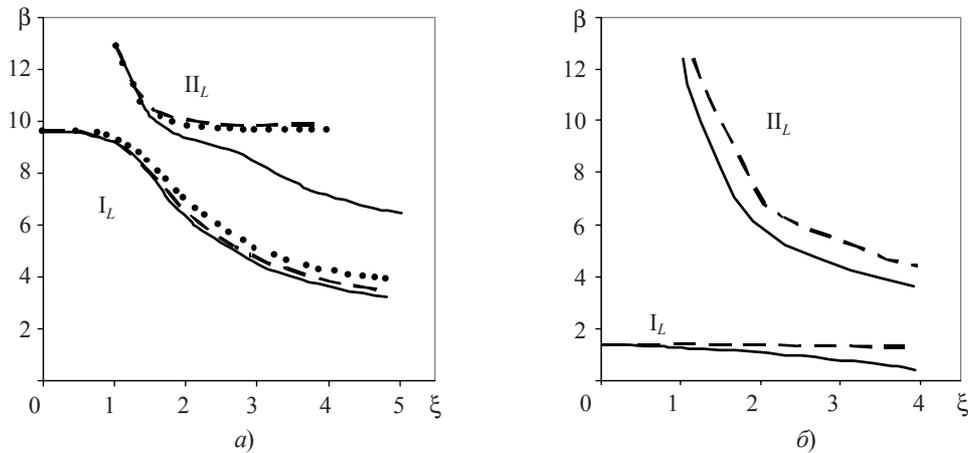


Рис. 1

направлениях вдоль слоев. На рис. 1,б показаны дисперсионные кривые в безразмерных координатах для продольных и поперечных горизонтально поляризованных волн по нормали к слоям. По оси абсцисс откладывается безразмерное волновое число $\xi = 2h_f k$, а по оси ординат – безразмерная фазовая скорость $\beta = c/(\mu_m/\rho_m)^{1/2}$. На этих рисунках для сравнения приведены результаты расчета по другим моделям. Здесь и на остальных рисунках кривые, полученные по точной трехмерной теории, показаны сплошной линией; по модели смесей – точками; по предлагаемой модели – пунктирной линией; I_L – кривые первой моды продольных волн; Π_L – кривые второй моды продольных волн. Из рис. 1а, б следует, что предлагаемая модель достаточно хорошо воспроизводит точные дисперсионные кривые.

Очень хорошее согласие получено между моделью и точными результатами для продольных и поперечных волн вдоль слоев (см. рис. 1,а). Несколько хуже согласие для волн, распространяющихся по нормали к слоям, где качественно хорошо воспроизводится только вторая мода (см. рис. 1,б). Воспроизводство главной моды для волн, нормальных к слоям, ухудшается в случае большой концентрации армирующих волокон, для умеренных концентраций $\eta_f < 0,5$ согласие между моделью и теорией становится хорошим (рис. 2,а).

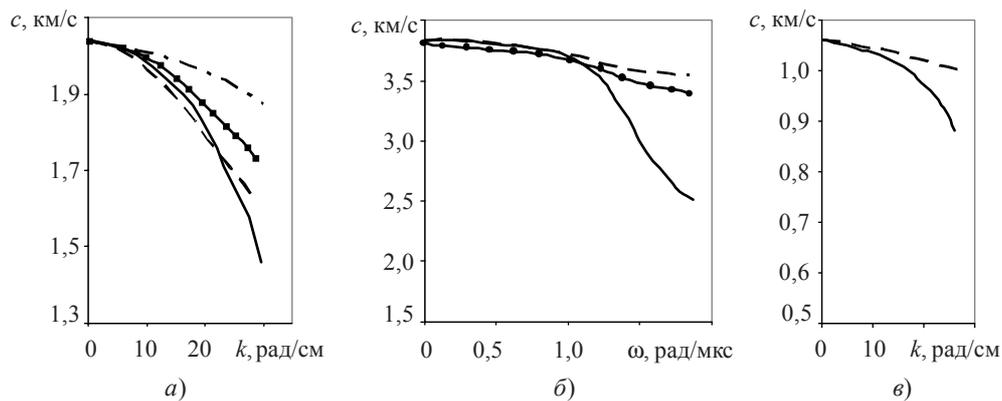


Рис. 2

На рис. 2,а приводится сравнение главной моды, полученной по предлагаемой модели, с точной кривой [8] для продольных волн, распространяющихся перпендикулярно к слоям в композите нержавеющая сталь–ПММА [9], свойства которого приведены в табл. 2.

Таблица 2

α	η_α	$\lambda^{(\alpha)}$, ГПа	$\mu^{(\alpha)}$, ГПа	ρ_α , г/см ³	h_α , мм
<i>f</i>	0,242	110,0	7,9	7,9	0,125
<i>m</i>	0,758	8,9	0,0	1,15	0,392

Аналогичное сравнение проведено соответственно для главных мод продольных и поперечных волн, распространяющихся по нормали к слоям в композите: нержавеющая сталь–EPON828, свойства которого даны в табл. 3.

Таблица 3

α	η_α	$\lambda^{(\alpha)}$, ГПа	$\mu^{(\alpha)}$, ГПа	ρ_α , г/см ³	h_α , мм
<i>f</i>	0,242	110,0	7,9	7,9	0,125
<i>m</i>	0,758	3,34	2,52	1,2	0,392

Рассмотрим распространение продольных волн вдоль волокон кварц-фенольного однонаправленного волокнистого композита, характеристики компонент которого даны в табл. 4.

Таблица 4

α	η_α	$\lambda^{(\alpha)}$, ГПа	$\mu^{(\alpha)}$, ГПа	ρ_α , г/см ³	r_α , мм
f	0,272	32,7	10,6	1,85	0,508
m	0,728	7,58	3,03	1,29	0,975

На рис. 2,б приведено сравнение дисперсионных кривых, полученных для главной моды по предложенной модели, и точного решения задачи теории упругости для рассматриваемого композита [10]. Для длин волн, превышающих характерный размер неоднородности, согласие между ними хорошее, но с уменьшением длины волны оно заметно ухудшается. Аналогичный результат был получен в работе [10] (см. рис. 2,б), где отмечается, что это расхождение является следствием нереального соотношения между геометрическими и механическими характеристиками компонентов рассматриваемого материала. Действительно, с уменьшением размера неоднородности согласие между моделью и реальной ситуацией значительно улучшается.

4. Сравнение с экспериментом

На рис. 2,в представлено сравнение между экспериментальными данными [11] и расчетами по предлагаемой модели для первой моды продольных волн, распространяющихся вдоль волокон бор-эпоксидного волокнистого композита. Характеристики его компонентов даны в табл. 5. Согласие с экспериментом при умеренных частотах очень хорошее и несколько хуже при высоких.

Таблица 5

α	η_α	$E^{(\alpha)}$, ГПа	$\nu^{(\alpha)}$, ГПа	ρ_α , г/см ³	r_α , мм
f	0,54	379,2	0,18	2,68	0,1016
m	0,46	0,5	0,40	1,26	0,138

Сравнение дисперсионных кривых с экспериментальными данными для волокнистого вольфрам-алюминиевого композита [12], характеристики которого даны в табл. 6, представлено на рис. 3,а.

Таблица 6

α	η_α	$E^{(\alpha)}$, ГПа	$\nu^{(\alpha)}$, ГПа	ρ_α , г/см ³	h_α , мм
f	0,221	400,0	0,28	19,19	0,0625
m	0,789	71,0	0,34	2,44	0,158

На рис. 3,а дисперсионные кривые первой и второй мод для продольных волн, распространяющихся по нормали к слоям, сравниваются с результатами экспериментов с ультразвуком. Видно, что и для этого композита согласие с экспериментом вполне хорошее не только для первой, но и второй моды. Экспериментальные данные показаны кружками, теоретические кривые – сплошной линией.

Сравнение главной моды для продольных волн, распространяющихся перпендикулярно слоям волокон, с данными эксперимента [12] для композита алюминевая матрица–вольфрамовые волокна представлено на рис. 3,б. Экспериментальные дан-

ные показаны квадратами, предлагаемая модель – сплошной линией, модель решеток – штрихпунктиром. Характеристики компонентов композита даны в табл. 7.

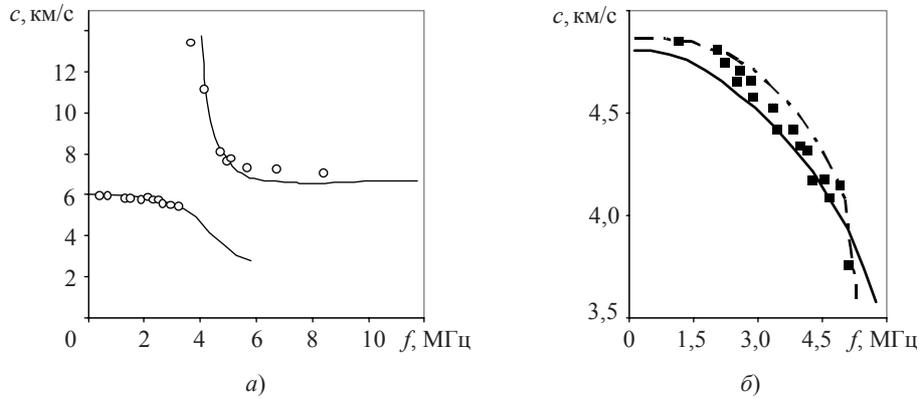


Рис. 3

Таблица 7

α	η_α	$E^{(\alpha)}$, ГПа	$\nu^{(\alpha)}$, ГПа	ρ_α , г/см ³	r_α , мм
f	0,022	400,0	0,28	19,19	0,0625
m	0,978	71,0	0,345	2,70	0,424

Сравнение дисперсионных кривых, полученных по модели, с экспериментальными данными [13] для главной моды продольных волн в направлении слоев волокон представлено на рис. 4. На рис. 4,а приведены дисперсионные кривые для композита, состоящего из углеродных волокон, заключенных в фенольную матрицу. Характеристики компонентов представлены в табл. 8. Рис. 4,б соответствует композиту борные волокна–фенольная матрица, его характеристики представлены в табл. 9.

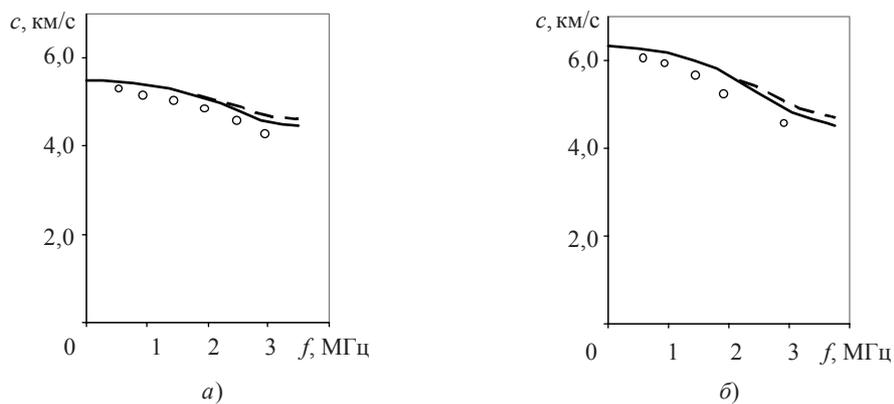


Рис. 4

Таблица 8

α	η_α	$\lambda^{(\alpha)}$, ГПа	$\mu^{(\alpha)}$, ГПа	ρ_α , г/см ³	h_α , мм
f	0,104	75,6	75,6	1,47	0,032
m	0,896	11,4	6,62	1,42	0,279

Таблица 9

α	η_α	$\lambda^{(\alpha)}$, ГПа	$\mu^{(\alpha)}$, ГПа	ρ_α , г/см ³	h_α , мм
f	0,166	80,6	95,1	2,37	0,052
m	0,834	11,4	6,62	1,42	0,260

Сравнение с результатами других моделей показывает, что предлагаемая модель двухскоростной смеси по точности воспроизводства спектральных кривых превосходит теорию эффективных жесткостей первого порядка [6] и теорию смесей [10, 14] и не уступает теории смесей [15], теориям взаимодействующей среды первого порядка [9] и решеток [12]. Что касается теории эффективных жесткостей второго порядка, то получаемые по ней результаты для волн по нормали к слоям оказываются точнее. Однако при этом необходимо заметить, что в теориях смесей [7] и решеток [12] требуется знание в явной форме точных дисперсионных кривых для композита, а они неизвестны, например, для волокнистых композитов. Теория взаимодействующей среды первого порядка [9] (как и теория решеток) получена только для одномерного движения по нормали к слоям и ее, по-видимому, невозможно обобщить на неупругий случай. У двумерной теории взаимодействующей среды тот же недостаток, что и у теории эффективных жесткостей второго порядка: полная система уравнений чрезвычайно громоздка и неудобна для решения краевых задач.

Таким образом, рассмотрев широкий круг слоистых и волокнистых материалов и сравнив для них расчетные дисперсионные кривые с точными и экспериментальными данными, можно заключить, что предлагаемая модель двухскоростной смеси для умеренных концентраций волокон хорошо количественно описывает дисперсию упругих гармонических волн, распространяющихся в материале в произвольном направлении.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 03–01–00701).

Литература

1. Кукуджанов, К.В. Двухскоростная модель упруговязкопластического деформирования композитных материалов / К.В. Кукуджанов // Изв. РАН. МТТ. – 2001. – №5. – С. 74–87.
2. Bedford, A. Multi-continuum theory for composite elastic materials / A. Bedford, M. Stren // Acta Mech. – 1972. – V.14. – P. 85–102.
3. McNiven, H.D. A mathematical model for the linear dynamic behavior of two phase periodic materials / H.D. McNiven, Y. Mengi // Int. J. Solids Struct. – 1979. – V.15. – P. 271–280.
4. Tiersten, H.F. A theory of composites modeled as interpreting solid continue / H.F. Tiersten, M. Jahanmir // Arch. Rat. Mech. Anal. – 1977. – V. 65. – P. 153–192.
5. Кукуджанов, К.В. Динамическое деформирование и разрушение неупругих слоистых композитов / К.В. Кукуджанов // Изв. РАН. МТТ. – 1997. – № 4. – С. 87–98.
6. Сан. Континуальная теории слоистой среды / Сан, Ахенбах, Герман // Тр. америк. о-ва инж. механиков. Прикл. механика (рус. пер.). – 1968. – Т. 35, №3. – С. 38–47.
7. McNiven, H.D. A mixed theory for elastic laminated composites / H.D. McNiven, Y. Mengi // Int. J. Solids Struct. – 1979. – V. 15. – P. 281–302.
8. Рытов, С.М. Акустические свойства мелкослоистой среды / С.М. Рытов // Акустический журнал. – 1956. – Т. 2, №1. – С. 68–80.
9. Хегемайер. Континуальная теория распространения волн в слоистых композиционных материалах. 1. Распространение волн по нормали к слоям / Хегемайер, Найфех // Тр. америк. о-ва инж. механиков. Прикл. механика (рус. пер.). – 1973. – Т. 40, №2. – С. 189–197.
10. Heigemier, G.A. A continuum mixture theory of wave propagation in laminated and fiber-reinforced composites / G.A. Heigemier, G.A. Gurtman, A.H. Hiyfeh // Int. J. Solids Struct. – 1973. – V. 9. – P. 395–414.

11. *Тошер*. Экспериментальное исследование дисперсии волн в волокнистом композиционном материале / Тошер, Гузельсу // Тр. америк. о-ва инж. механиков. Прикл. механика (рус. пер.). – 1972. – №1. – С. 97–102.

12. *Драмхелер*. Решеточная модель композиционного материала для исследования распространения волн напряжения / Драмхелер, Сазерленд // Тр. америк. о-ва инж. механиков. Прикл. механика (рус. пер.). – 1973. – Т. 40, №1. – С. 157–164.

13. *Уитмер*. Экспериментальное изучение распространение диспергирующего импульса в слоистых композитах и сравнение результатов с теорией / Уитмер, Пик // Тр. америк. о-ва инж. механиков. Прикл. механика (рус. пер.). – 1969. – №3. – С. 108–115.

14. *Stern, M.* Wave propagation in elastic laminates using multi-continuum theory / M. Stern, A. Bedford // Acta Mech. – 1972. – V. 15. – P. 21–38.

15. *McNiven, H.D.* Propagation of transient waves in elastic laminated composites / H.D. McNiven, Y. Mengi // Int. J. Solids Struct. – 1979. – V. 15. – P. 303–318.

16. *Heigemier, G.A.* Finite-amplitude elastic-plastic wave propagation in laminate / G.A. Heigemier, G.A. Gurtman // Int. J. Appl. Phys. – 1974. – V. 45. – P. 4254–4262.

[26.07.2005]