

УДК 539.3

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБА ГУСТО ПЕРФОРИРОВАННЫХ ПЛАСТИН*

© 2015 г.

**Антипов А.А.¹, Жестков М.Н.²,
Иванов В.А.³, Фролова И.А.³**

¹*Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
Саров, Российская Федерация*

²*Научно-исследовательский институт механики
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Российская Федерация*

³*Чувашский государственный университет им. И.Н. Ульянова,
Чебоксары, Российская Федерация*

mzhestkov@rambler.ru

Поступила в редакцию 01.09.2015

Описан метод расчета густо перфорированных пластин в условиях чистого изгиба. Задача решена на основе теории пластин с использованием конструктивно-ортотропной модели. Параметры ортотропного материала в виде коэффициентов снижения жесткости определялись из решения задачи деформирования циклически повторяющегося элемента конструкции (структурного элемента) на растяжение и сдвиг с различной степенью перфорации (пористости). Исследование структурного элемента проводилось методами механики сплошной среды, теории оболочек и пластин типа Тимошенко. Получены коэффициенты снижения жесткости при различных значениях пористости и определена граница применимости теории пластин для подобных задач. Проведено сравнение численно полученных результатов с аналитическими оценками Э.И. Григolloка и Л.А. Фильштинского. Верификация численно полученных параметров ортотропии проведена на основе решения задачи изгиба пластины, перфорированной одним рядом отверстий. Показано, что использование конечных элементов конструктивно-ортотропной оболочки с параметрами, определенными из решения трехмерной задачи растяжения и сдвига структурного элемента, правомерно в задачах изгиба для длинных волн.

Выполнены исследования распределения напряжений в области отверстий густо перфорированных пластин при различных толщинах и значениях пористости в геометрически линейной и геометрически нелинейной постановках. Получены значения коэффициента концентрации напряжений в зависимости от пористости и толщины пластины при растяжении и изгибе.

Ключевые слова: густо перфорированная пластина, ортотропный материал, метод конечного элемента, чистый изгиб, коэффициент концентрации напряжения.

* Выполнено при поддержке РФФ (проект № 15-19-10039), раздел «Верификация параметров ортотропии для задачи чистого изгиба пластины».

Введение

Статья посвящена исследованию изгиба густо перфорированной пластины в условиях чистого изгиба на основе конечно-элементного анализа. Работа является продолжением исследования применимости метода усреднения механических свойств материала в зависимости от степени перфорации [1]. Подобный подход лежит в основе модели композитных материалов, предложенной Б.Е. Победрей [2]. Однако применимость этого подхода для густо перфорированных пластин и оболочек не исследована. Методы расчета таких оболочек рассмотрены Э.И. Григолоком и Л.А. Фильштинским [3], которые из аналитического решения задачи теории упругости получили коэффициенты снижения жесткости пластины с регулярной перфорацией при растяжении, сдвиге и изгибе. Однако в работе этих авторов приведены результаты снижения изгибной жесткости только для значений пористости менее 0,29. В настоящей статье приведены исследования снижения изгибной жесткости при более высоких значениях пористости. Показана применимость полученных результатов на примере изгиба густо перфорированных пластин. Получены коэффициенты концентрации напряжений в зависимости от пористости и толщины пластины при растяжении и изгибе.

Определение жесткостных характеристик

Рассматривалась задача деформации упругой перфорированной пластины в условиях чистого изгиба. Задача решалась путем усреднения жесткостных характеристик для циклически повторяющегося элемента конструкции (структурного элемента). Для простоты представления результатов перфорация вдоль осей x и y пластины предполагалась одинаковой. В этом случае структурный элемент представляет собой квадратную призму толщиной h с длиной сторон a (рис. 1). В центре элемента располагается отверстие диаметром d . В ходе исследований снижения жесткостных характеристик отношение толщины структурного элемента к диаметру отверстия оставалось постоянным и равнялось $h/d = 1$. Варьирование пористости конструкции осуществлялось изменением размера a при неизменном диаметре отверстия d . Под пористостью γ в данной задаче понимается отношение площади отверстия к общей площади лицевой плоскости структурного элемента:

$$\gamma = \frac{\pi d^2}{4a^2}. \quad (1)$$

Наряду с этими структурными элементами рассматривались элементы подобных размеров без отверстий.

Предполагалось, что минимальные размеры пластины таковы, что она содержит хотя бы один структурный элемент. Тогда можно заменить перфорированную пластину конструктивно-ортотропным материалом.

Матрица жесткости D ортотропной пластины будет зависеть от диаметра от-

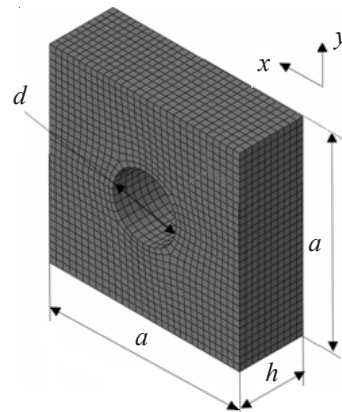


Рис. 1. Структурный элемент

верстия и шага перфорации. Симметричность матрицы D и равномерность перфорации вдоль осей x и y приводят к тому, что определить необходимо лишь 6 компонент матрицы жесткости.

Компоненты матрицы можно выразить через модули упругости и коэффициенты Пуассона [4]:

$$\left. \begin{aligned} D_{11} &= D_{22} = E_1(1 - \nu_{23}\nu_{32})\beta, \\ D_{33} &= E_3(1 - \nu_{12}\nu_{21})\beta, \\ D_{12} &= E_1(\nu_{21} + \nu_{31}\nu_{23})\beta = E_2(\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}), \\ D_{13} &= D_{23} = E_1(\nu_{31} + \nu_{21}\nu_{32})\beta = E_3(\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}), \\ D_{44} &= G_{12}, \\ D_{55} &= D_{66} = G_{13}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\beta = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}},$$

где E_i – модуль упругости вдоль i -й оси; ν_{ij} – коэффициент Пуассона при растяжении вдоль i -й оси.

Далее определялись коэффициенты снижения жесткости конструкции, при помощи которых можно вычислить усредненные значения механических свойств. Для этого исследованы структурные элементы на растяжение и сдвиг. Расчеты проводились методом конечного элемента с использованием расчетного комплекса «Динамика-3» [5] и Abaqus [6–8].

На границах структурного элемента задавались кинематические граничные условия, которые соответствуют одноосному растяжению и чистому сдвигу. Исследования проводились в трехмерной постановке механики сплошной среды и с использованием пластинчатых элементов, учитывающих соотношения Тимошенко. При моделировании задачи в трехмерной постановке использовались линейные восьмиузловые элементы. В постановке теории пластин применялись линейные четырехузловые элементы.

Результаты исследования приведены на рис. 2 в виде зависимости коэффициентов снижения жесткости от величины пористости γ . Выражения для коэффициентов снижения жесткости имеют вид:

$$r_E = \frac{E_1}{E}, \quad r_\nu = \frac{\nu_{12}}{\nu}, \quad r_G = \frac{G_{12}}{G} \quad \text{и} \quad r_C = \frac{C^*}{C}, \quad (3)$$

где E – модуль Юнга материала основы, E_1 – усредненный модуль Юнга для структурного элемента с отверстием, ν – коэффициент Пуассона материала основы, ν_{12} – усредненный коэффициент Пуассона для структурного элемента с отверстием, G – модуль сдвига материала основы, G_{12} – усредненный модуль сдвига для структурного элемента с отверстием, C – жесткость при изгибе для материала основы, C^* – усредненная жесткость при изгибе структурного элемента с отверстием.

Э.И. Григолоюком и Л.А. Фильштинским [3] получены аналитические оценки снижения жесткости перфорированных оболочек, которые также указаны на графиках.

Результаты показывают, что коэффициенты снижения жесткостей на растяжение и изгиб для трехмерной и оболочечной моделей одинаковы. Разница между ними не превышает 1,5%. Для коэффициентов r_ν и r_G при пористости более 0,5

и 0,6 соответственно отличия между трехмерной и оболочечной моделями превышают 5%.

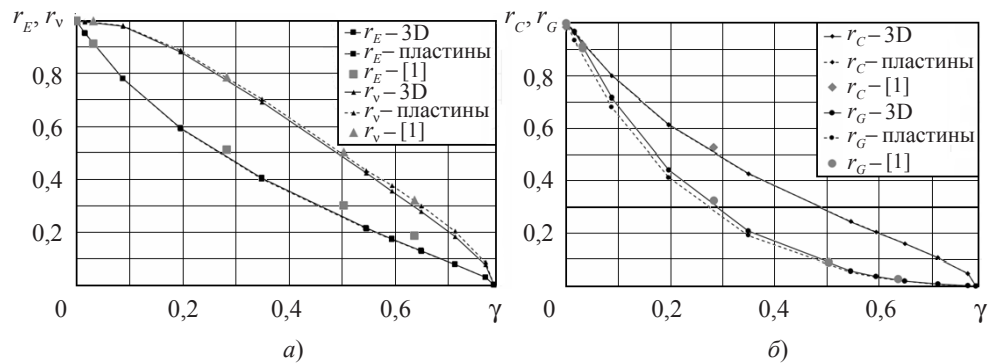


Рис. 2. Коэффициенты снижения прочности (*a* – на растяжение, *б* – при изгибе и сдвиге)

Сравнение аналитических [3] и численно полученных результатов показывает, что максимальное отличие наблюдается для коэффициента r_E и составляет порядка 11%. Стоит отметить, что приведенные в [3] аналитические оценки коэффициентов снижения жесткости при растяжении и сдвиге ограничиваются значением пористости 0,64, а при изгибе – 0,28. Максимальное значение пористости в рамках настоящего исследования составляло 0,77.

Таким образом, можно сделать вывод, что при $h/d = 1$ и значениях пористости менее 0,5 коэффициенты снижения жесткости можно определять при помощи пластинчатых элементов с учетом соотношений Тимошенко.

Верификация параметров ортотропии для задачи чистого изгиба пластины

Для верификации полученных параметров ортотропии была решена задача изгиба пластины длиной L , перфорированной одним рядом отверстий. Задача решалась в постановках механики сплошной среды и теории пластин с использованием конечного элемента, учитывающего соотношения Тимошенко в совокупности с конструктивно-ортотропной моделью при различных значениях пористости и длины пластины.

Исследования в трехмерной постановке проводились с использованием восьми-узлового линейного конечного элемента.

При решении задачи по теории пластин использовались четырехузловые элементы, учитывающие соотношения Тимошенко. Стоит отметить, что размерность сетки в этом случае по сравнению с трехмерной постановкой уменьшается в 15–20 раз. Геометрическая модель представляла собой сплошную пластину без отверстий. Снижение жесткости за счет наличия отверстий учитывалось параметрами ортотропного материала, которые определялись на основе трехмерного исследования деформирования структурного элемента на растяжение и сдвиг.

На одном из концов полосы был задан угол поворота, а другой конец жестко защемлен. На боковых сторонах полосы задавалось условие симметрии.

На рис. 3 представлены зависимости безразмерного реактивного момента $M_p/M_{\text{сплош}}$ (M_p – реактивный момент для пластины с отверстиями, $M_{\text{сплош}}$ – реактивный момент для сплошной пластины с ортотропными жесткостными характе-

ристиками) от безразмерной длины пластины L/a для различных коэффициентов пористости.

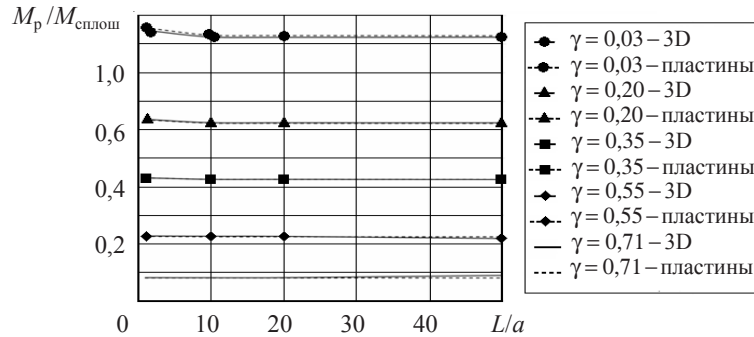


Рис. 3. Безразмерный реактивный момент в зависимости от длины и степени перфорации пластины

Для всех рассмотренных значений пористости разница между двумя подходами к решению задачи не превышала 3%. Таким образом, использование конечных элементов конструктивно-ортоотропной оболочки с параметрами, определенными из решения трехмерной задачи растяжения и сдвига структурного элемента, правомерно в задачах изгиба пластины.

Исследование напряженно-деформированного состояния густо перфорированной пластины

Решение задачи упругого изгиба густо перфорированной пластины было проведено в геометрически линейной и геометрически нелинейной постановках. Сравнение решений показало, что в пределах упругости эти два подхода равнозначны (отличие между ними не превышает 1%). Влияние нелинейности геометрии проявляется только в случае локальной потери устойчивости пластины в области отверстия. Исследования показали, что для всех значений пористости от 0 до 0,712 критическое значение напряжения значительно превышает предел текучести материала.

Для оценки напряженно-деформированного состояния густо перфорированной пластины были получены зависимости коэффициента концентрации напряжения K_t в зоне отверстия при растяжении и изгибе (рис. 4).

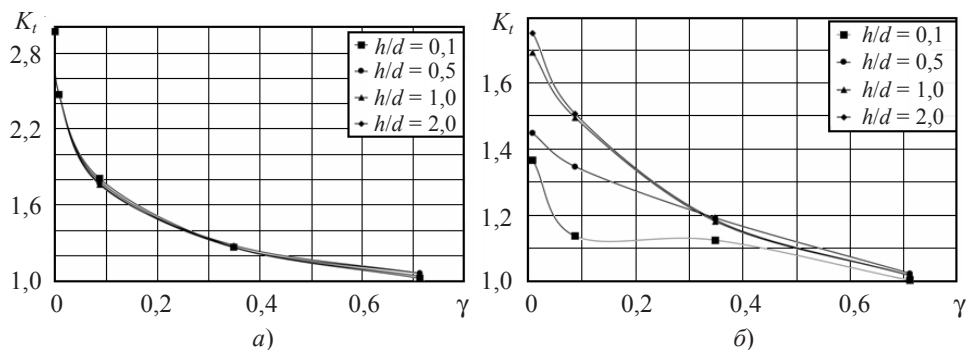


Рис.4. Коэффициент концентрации напряжения в зависимости от пористости и толщины пластины (а – при растяжении, б – при изгибе)

Из представленных графиков хорошо видно, что при значениях пористости, близких к предельному ($\gamma_{\max} = 0,785$), коэффициент концентрации напряжения $K_t \rightarrow 1$ как в случае растяжения, так и в случае изгиба. В этом случае в тонких перегородках около отверстия реализуется напряженное состояние, соответствующее растяжению стержня и изгибу балки соответственно. При стремлении пористости к нулю при растяжении $K_t \rightarrow 3$, что соответствует случаю растяжения бесконечной пластины с отверстием. Коэффициент концентрации напряжения при растяжении не зависит от толщины пластины.

Дополнительные численные исследования показали, что в случае изгиба бесконечной пластины с отверстием $K_t \rightarrow 1,8$ при значении коэффициента Пуассона 0,3. Из рис. 4 видно также, что для значений $h/d > 1$ при значениях пористости, близких к нулю, $K_t \rightarrow 1,8$. Для более тонких пластин характер зависимости заметно меняется. Наблюдается значительное снижение коэффициента концентрации напряжений в зависимости от толщины пластины при значениях пористости менее 0,3 и $h/d < 1$.

Заключение

Методом конечных элементов исследовано снижение жесткости густо перфорированных пластин при растяжении и сдвиге в постановках механики сплошных сред и теории пластин. Установлено, что отличия между трехмерной моделью и моделью типа Тимошенко не превышают 5% при значениях пористости менее 0,5.

Осуществлена верификация полученных параметров ортотропии на примере задачи изгиба пластины, перфорированной одним рядом отверстий, в трехмерной постановке и постановке, основанной на теории пластин.

Проведено исследование влияния геометрически линейной и геометрически нелинейной постановок на решение задачи изгиба густо перфорированной пластины. В пределах упругости прогибы малы и эти два подхода дают одинаковые результаты. Проведено исследование напряженно-деформированного состояния в окрестности отверстия. Получены зависимости коэффициентов концентрации напряжения от пористости и толщины пластины при растяжении и изгибе.

Список литературы

1. Антипов А.А., Артемьева А.А., Баженов В.Г., Жестков М.Н., Кибец А.И. Численное моделирование задачи устойчивости перфорированных оболочек. *Вестник ПНИПУ*. 2015. №1. С. 21–30.
2. Победра Б.Е. *Механика композиционных материалов*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.
3. Григолюк Э.И., Фильштинский Л.А. *Перфорированные пластины и оболочки*. М.: Наука, 1970. 556 с.
4. Лехницкий С.Г. *Теория упругости анизотропного тела*. М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1950. 416 с.
5. Баженов В.Г., Артемьева А.А., Гоник Е.Г., Кибец А.И., Шошин Д.В., Федорова Т.Г. Конечно-элементное моделирование упругопластического выпучивания незамкнутых сферических оболочек при сжатии. *Проблемы прочности и пластичности*. 2012. Вып. 74. С. 84–91.
6. Moen C.D., Schafer B.W. *Direct Strength Design of Cold-Formed Steel Members with Perforations*. The Johns Hopkins University, Department of Civil Engineering. Baltimore, 2008. 488 p.
7. Abaqus. *Abaqus User's Manual. Introduction, Spatial Modeling, and Execution*. Publisher-Simulia, 2008. 711 p.
8. Matsagar Vasant A. Computing stress and displacement response of composite plates under blast. *Disaster Advances*. 2014. Vol. 7, No 1. P. 23–38.

References

1. Antipov A.A., Artem'yeva A.A., Bazhenov V.G., Zhestkov M.N., Kibets A.I. Chislennoe modelirovanie zadachi ustoychivosti perforirovannykh obolochek. *Vestnik PNIPU*. 2015. №1. S. 21–30.
2. Pobedrya B.E. *Mekhanika kompozitsionnykh materialov*. M.: Izd-vo Mosk. un-ta, 1984. 336 s.
3. Grigolyuk E.I., Fil'shtinskiy L.A. *Perforirovannye plastiny i obolochki*. M.: Nauka, 1970. 556 s.
4. Lekhnitskiy S.G. *Teoriya uprugosti anizotropnogo tela*. M.: Gosudarstvennoe izdatel'stvo tekhniko-teoreticheskoy literatury, 1950. 416 s.
5. Bazhenov V.G., Artem'yeva A.A., Gonik E.G., Kibets A.I., Shoshin D.V., Fedorova T.G. Konechno-elementnoe modelirovanie uprugoplasticheskogo vypuchivaniya nezamknutykh sfericheskikh obolochek pri szhatii. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2012. Vyp. 74. S. 84–91.
6. Moen C.D., Schafer B.W. *Direct Strength Design of Cold-Formed Steel Members with Perforations*. The Johns Hopkins University, Department of Civil Engineering, Baltimore, 2008. 488 p.
7. Abaqus. *Analysis User's Manual. Introduction, Spatial Modeling, and Execution*. Publisher-Simulia, 2008. 711 p.
8. Matsagar Vasant A. Computing stress and displacement response of composite plates under blast. *Disaster Advances*. 2014. Vol. 7, No 1. P. 23–38.

NUMERICALLY MODELING THE BENDING OF DENSELY PERFORATED PLATES

Antipov A.A.¹, Zhestkov M.N.², Ivanov V.A.³, Frolova I.A.³

¹Russian Federal Nuclear Center – All-Russian Research Institute of Experimental Physics,
Sarov, Russian Federation

²Research Institute of Mechanics University of Nizhni Novgorod,
Nizhni Novgorod, Russian Federation

³I.N. Ulyanov Chuvash State University, Cheboksary, Russian Federation

A method for analyzing densely perforated plates loaded in pure bending is described. The problem is solved based on the plate theory using a structurally orthotropic model. The parameters of the orthotropic material in the form of stiffness reduction coefficients were determined from the solution of the problem of deformation of a cyclically reiterating structural element with different perforation densities (porosity) loaded in tension and shear. The structural element was analyzed using the methods of continuum mechanics and the theory of Timoshenko-type shells and plates. As a result, stiffness reduction coefficients were obtained for different porosity values, and the scope of applicability of the theory of plates for such problems was assessed. The numerical results obtained were compared with the analytical evaluations of E.I. Grigolyuk and L.A. Fil'shtinskiy. The numerically obtained orthotropy parameters were verified by solving the problem of bending of a plate with a single row of perforations. It is shown that the use of finite elements of a structurally orthotropic shell with the parameters determined from the solution of a 3D problem of tension and shear of the structural element is justified in bending problems with long waves.

Stress distribution in the perforation area of densely perforated plates was studied for different thicknesses and porosities in the geometrically linear and nonlinear formulations. Stress concentration coefficient values were obtained as a function of porosity and thickness of the plate for tension and bending.

Keywords: densely perforated plate, orthotropic material, finite element method, pure bending, stress concentration coefficient.