УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В СЛУЧАЕ ДВУХСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Л.Ю. Коссович, Ю.В. Шевцова

Саратов

Для случая двухслойных пластин осуществляется асимптотическое интегрирование трехмерных динамических уравнений теории упругости. Излагается методика построения низкочастотных длинноволновых тангенциальных и поперечных приближений. Приводится двумерная форма записи разрешающих систем.

Целью данной работы является применение результатов асимптотических методов исследования динамических задач для тонких упругих пластин и оболочек [1–3] к случаю двухслойных пластин. В основу исследования положена методика непосредственного вывода асимптотических приближений из точных трехмерных уравнений [4].

1. Постановка задачи

Рассмотрим двухслойную пластину, каждый слой которой выполнен из изотропного упругого материала. В l-м слое ($l = 1, 2$) введем декартову систему координат $(x_1^{(l)}, x_2^{(l)}, z^{(l)})$, совмещая плоскость $Ox_1^{(l)}x_2^{(l)}$ со срединной плоскостью слоя и направляя ось $z^{(l)}$ по нормали к срединной плоскости. Введем обозначения: $\sigma_{ij,\,l}$ – напряжения, $v_{i,\,l}$ – перемещения в l-м слое пластины; $2h_l$ – толщина слоя.

Будем предполагать, что наружные поверхности пластины свободны от нагрузки. Тогда граничные условия на них имеют вид $(k = \overline{1,3})$:

$$\begin{aligned} &– \text{при } z^{(1)} = -h_1:\ \sigma_{3k,1} = 0, \\ &– \text{при } z^{(2)} = -h_2:\ \sigma_{3k,2} = 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Граничные условия на стыке двух слоев пластины – условия непрерывного контакта – сформулируем следующим образом [5]:

$$\text{при } z^{(1)} = h_1,\ z^{(2)} = -h_2,\ \sigma_{3k,1} = \sigma_{3k,2},\ v_{k,1} = v_{k,2}. \tag{1.2}$$

Приведем точные трехмерные динамические уравнения теории упругости для пластины, временно опуская в записи индекс, соответствующий номеру слоя, и принимая для механических параметров следующие обозначения: E – модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона, ρ – плотность:

$$\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+\frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial z}-\rho\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}=0,\quad \frac{\partial\sigma_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial z}-\rho\frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2}=0, \tag{1.3}$$

$$\sigma_{ii}=\frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2}\left[\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial v_3}{\partial z}+\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\partial v_i}{\partial x_i}\right],$$

$$\sigma_{33}=\frac{E}{2(1+\nu)\kappa^2}\left[\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial v_3}{\partial z}\right],$$

$$\sigma_{3i}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial v_3}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial z}\right], \tag{1.4}$$

$$\sigma_{12}=\frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\partial v_1}{\partial x_2}+\frac{\partial v_2}{\partial x_1}\right],$$

$$i\neq j=1,2,$$

где $\kappa^2=(1-2\nu)/(2-2\nu)$.

В последующих преобразованиях удобно записать соотношения (1.4) в виде:

$$\sigma_{ii}=\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}+\nu\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)+\frac{\nu}{1-\nu}\sigma_{33},$$

$$E\frac{\partial v_3}{\partial z}=\sigma_{33}-\nu(\sigma_{ii}+\sigma_{jj}),$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_i}+\frac{\partial v_i}{\partial z}\right)=\sigma_{3i}, \tag{1.5}$$

$$\frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}+\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=\sigma_{ij}.$$

Вывод асимптотически оптимальных уравнений для приближенных теорий производится с помощью метода асимптотического интегрирования динамических трехмерных уравнений теории упругости (1.3), (1.5), который основан на малости геометрического параметра $\eta_l=h_l/R$, где R – характерный размер длины.

Динамические процессы в тонкой упругой однослойной пластине характеризуются двумя физическими параметрами: l – отношением длины волны к R и T – отношением временного масштаба к Rc_2^{-1}, где c_2 – скорость волны сдвига. В степенях основного малого параметра η данные величины выражаются следующим образом:

$$l=\eta^q,\quad T=\eta^a, \tag{1.6}$$

где q – показатель изменяемости, a – показатель динамичности.

Произведем в уравнениях движения и уравнениях закона Гука, записанных для каждого слоя пластины, растяжение масштабов независимых переменных по формулам:

$$x_i=R\eta^q\xi_i,\quad z=R\eta\zeta,\quad t=Rc_2^{-1}\eta^q\tau. \tag{1.7}$$

Предположим, что дифференцирование по безразмерным переменным ξ_i, ζ, τ не меняет асимптотический порядок неизвестных величин. Введение независимых переменных (1.7) позволяет методом асимптотического интегрирования трехмерных уравнений теории упругости вывести асимптотически приближенные уравнения для составляющих напряженно-деформированного состояния (НДС) при различных показателях изменяемости и динамичности. Остановимся на случае так называемых длинноволновых низкочастотных приближений. К этому виду относятся приближения, для которых $q<1$, $a<1$. Эти приближения разделяются на два типа: тангенциальные и поперечные. Первый тип соответствует теории растяжения тонких пластин. В этом случае тангенциальные компоненты вектора перемещений велики по сравнению с его нормальной компонентой $v_i >> v_3$. Второй тип соответствует теории изгиба тонких пластин. Для поперечных приближений имеет место противоположная ситуация: $v_3 >> v_i$. Приведем вывод тангенциальных и поперечных приближений в случае двухслойных пластин.

2. Тангенциальные низкочастотные длинноволновые приближения

При построении тангенциального приближения показатели изменяемости и динамичности для каждого слоя связаны соотношением $q_l = a_l$. Введем следующие асимптотики для компонент НДС, опуская в записи индекс, обозначающий номер слоя:

$$v_i = R\eta^q v_i^0, \quad v_3 = R\eta v_3^0, \quad \sigma_{ii} = E\sigma_{ii}^0, \quad \sigma_{ij} = E\sigma_{ij}^0,$$
$$\sigma_{3i} = E\eta^{1-q}\sigma_{3i}^0, \quad \sigma_{33} = E\eta^{2-2q}\sigma_{33}^0. \tag{2.1}$$

Предполагается, что величины с индексом “0” имеют один и тот же асимптотический порядок. Заметим, что тангенциальные приближения для случая двухслойных пластин принципиально отличаются от случая одной пластины [3]. В рассматриваемом случае тангенциальные приближения соответствуют не только теории растяжения пластин, но разделение НДС на основную и дополнительную компоненты не производится, так как четные и нечетные составляющие имеют один и тот же асимптотический порядок.

В отличие от случая изотропной пластины, состоящей из одного слоя [3], интенсивность напряжения σ_{3i} выбирается равной не $3-3q$, а $1-q$. Это объясняется рассматриваемой в нашем случае неоднородностью граничных условий на лицевых поверхностях. В силу выбора асимптотик (2.1), в уравнения движения, записанные с учетом (1.7), в рамках погрешности $O(\eta^{2-2q})$ входят слагаемые, содержащие производные по ζ от σ_{3i}^0 $(i=\overline{1,3})$:

$$\frac{\partial\sigma_{ii}^0}{\partial\xi_i} + \frac{\partial\sigma_{ij}^0}{\partial\xi_j} + \frac{\partial\sigma_{3i}^0}{\partial\varsigma} - \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 v_i^0}{\partial\tau^2} = 0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{i3}^0}{\partial\xi_i} + \frac{\partial\sigma_{j3}^0}{\partial\xi_j} + \frac{\partial\sigma_{33}^0}{\partial\varsigma} - \frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 v_3^0}{\partial\tau^2} = 0,$$

$$\sigma_{ii}^0 = \frac{1}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v_i^0}{\partial\xi_i} + \nu\frac{\partial v_j^0}{\partial\xi_j}\right),$$

$$\sigma_{ij}^0=\frac{1}{2(1+\nu)}\left(\frac{\partial v_j^0}{\partial \xi_i}+\frac{\partial v_i^0}{\partial \xi_j}\right),$$

$$\frac{\partial v_i^0}{\partial \varsigma}=0,\quad \frac{\partial v_3^0}{\partial \varsigma}=-\nu\left(\sigma_{ii}^0+\sigma_{jj}^0\right). \tag{2.2}$$

Таким образом, выбор асимптотик (2.1) позволит удовлетворить всем граничным условиям на лицевых поверхностях при асимптотическом интегрировании.

Введем следующую зависимость компонент НДС от нормальной координаты:

$$v_i^0=v_i^{(0)},\quad v_3^0=v_3^{(0)}+\zeta v_3^{(1)},\quad \sigma_{ii}^0=\sigma_{ii}^{(0)},\quad \sigma_{ij}^0=\sigma_{ij}^{(0)},$$

$$\sigma_{3i}^0=\sigma_{3i}^{(0)}+\zeta\sigma_{3i}^{(1)},\quad \sigma_{33}^0=\sigma_{33}^{(0)}+\zeta\sigma_{33}^{(1)}+\zeta^2\sigma_{33}^{(2)}, \tag{2.3}$$

где величины с индексами в скобках от ζ не зависят.

Перейдем в граничных условиях (1.1), (1.2) к представлениям (2.1), (2.3). Получим связь между компонентами НДС для первого и второго слоев:

$$\zeta^{(2)}=1:\qquad \sigma_{3i,2}^{(0)}+\sigma_{3i,2}^{(1)}=0,\quad \sigma_{33,2}^{(0)}+\sigma_{33,2}^{(1)}+\sigma_{33,2}^{(2)}=0,$$

$$\zeta^{(1)}=-1:\qquad \sigma_{3i,1}^{(0)}-\sigma_{3i,1}^{(1)}=0,\quad \sigma_{33,1}^{(0)}-\sigma_{33,1}^{(1)}+\sigma_{33,1}^{(2)}=0,$$

$$\zeta^{(2)}=-1,\quad \zeta^{(1)}=1:$$

$$\eta_2E_2\left(\sigma_{3i,2}^{(0)}-\sigma_{3i,2}^{(1)}\right)=\eta_1E_1\left(\sigma_{3i,1}^{(0)}+\sigma_{3i,1}^{(1)}\right), \tag{2.4}$$

$$\eta_2{}^2E_2\left(\sigma_{33,2}^{(0)}-\sigma_{33,2}^{(1)}+\sigma_{33,2}^{(2)}\right)=\eta_1{}^2E_1\left(\sigma_{33,1}^{(0)}+\sigma_{33,1}^{(1)}+\sigma_{33,1}^{(2)}\right),$$

$$v_{i,2}^{(0)}=v_{i,1}^{(0)},\quad \eta_2\left(v_{3,2}^{(0)}-v_{3,2}^{(1)}\right)=\eta_1\left(v_{3,1}^{(0)}+v_{3,1}^{(1)}\right).$$

Система относительно асимптотически главных компонент $\sigma_{ii,l}^{(0)},\sigma_{ij,l}^{(0)},\sigma_{i3}^{(0)},\sigma_{i3}^{(1)}$, $v_{i,l}^{(0)}$ $(l=1,2)$ запишется следующим образом:

$$\frac{\partial\sigma_{ii,l}^{(0)}}{\partial \xi_i}+\frac{\partial\sigma_{ij,l}^{(0)}}{\partial \xi_j}+\sigma_{3i,l}^{(1)}-\frac{1}{2(1+\nu_l)}\frac{\partial^2 v_{i,l}^{(0)}}{\partial \tau_l^2}=0,$$

$$\sigma_{ii,l}^{(0)}=\frac{1}{1-\nu_l^2}\left(\frac{\partial v_{i,l}^{(0)}}{\partial \xi_i}+\nu_l\frac{\partial v_{j,l}^{(0)}}{\partial \xi_j}\right),$$

$$\sigma_{ij,l}^{(0)}=\frac{1}{2(1+\nu_l)}\left(\frac{\partial v_{i,l}^{(0)}}{\partial \xi_j}+\frac{\partial v_{j,l}^{(0)}}{\partial \xi_i}\right), \tag{2.5}$$

$$\sigma_{3i,2}^{(0)}+\sigma_{3i,2}^{(1)}=0,$$

$$\eta_2E_2\left(\sigma_{3i,2}^{(0)}-\sigma_{3i,2}^{(1)}\right)=\eta_1E_1\left(\sigma_{3i,1}^{(0)}+\sigma_{3i,1}^{(1)}\right),$$

$$v_{i,2}^{(0)}=v_{i,1}^{(0)},\quad \sigma_{3i,1}^{(0)}-\sigma_{3i,1}^{(1)}=0.$$

Выведена также система, определяющая асимптотически второстепенные компоненты через асимптотически главные. Преобразуем систему (2.5). С этой целью выразим величины $\sigma_{3i,l}^{(0)}$ через $\sigma_{3i,l}^{(1)}$, используя четвертое и седьмое уравнения (2.5). Подставляя выражения для $\sigma_{3i,l}^{(1)}$ из первого уравнения в пятое, получим следующую систему для $\sigma_{ii,l}^{(0)}, \sigma_{ij,l}^{(0)}, v_{i,l}^{(0)}$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi_i}\left(\eta_2 E_2 \sigma_{ii,2}^{(0)} + \eta_1 E_1 \sigma_{ii,1}^{(0)}\right) + \frac{\partial}{\partial \xi_j}\left(\eta_2 E_2 \sigma_{ij,2}^{(0)} + \eta_1 E_1 \sigma_{ij,1}^{(0)}\right) -$$

$$-\left(\frac{\eta_2 E_2}{2(1+\nu_2)}\frac{\partial^2 v_{i,2}^{(0)}}{\partial \tau_2^{\ 2}} - \frac{\eta_1 E_1}{2(1+\nu_1)}\frac{\partial^2 v_{i,1}^{(0)}}{\partial \tau_1^{\ 2}}\right) = 0,$$

$$\sigma_{ii,l}^{(0)} = \frac{1}{1-\nu_l^{\ 2}}\left(\frac{\partial v_{i,l}^{(0)}}{\partial \xi_i} + \nu_l \frac{\partial v_{j,l}^{(0)}}{\partial \xi_j}\right), \tag{2.6}$$

$$\sigma_{ij,l}^{(0)} = \frac{1}{2(1+\nu_l)}\left(\frac{\partial v_{i,l}^{(0)}}{\partial \xi_j} + \frac{\partial v_{j,l}^{(0)}}{\partial \xi_i}\right),$$

$$v_{i,2}^{(0)} = v_{i,1}^{(0)}.$$

Перейдем к размерной двумерной форме записи системы для асимптотически главных компонент НДС. С этой целью обозначим

$$v_{i,2} = v_{i,1} = v_i \tag{2.7}$$

и введем исходные размерные переменные.

Введем усилия T_i и S_{ij} усредненную плотность ρ по формулам:

$$T_i = 2(h_1\sigma_{ii,1} + h_2\sigma_{ii,2}), \quad S_{ij} = 2(h_1\sigma_{ij,1} + h_2\sigma_{ij,2}),$$

$$\rho = \frac{\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2}{h}, \quad h = h_1 + h_2. \tag{2.8}$$

Получим окончательный вид разрешающей системы:

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} - 2\rho h \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} = 0,$$

$$T_i = C_1 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + C_2 \frac{\partial v_j}{\partial x_j},$$

$$S_{ij} = C_3\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), \tag{2.9}$$

$$C_1 = \sum_{l=1}^{2} \frac{2E_l h_l}{1-\nu_l^{\ 2}}, \quad C_2 = \sum_{l=1}^{2} \frac{2E_l h_l \nu_l}{1-\nu_l^{\ 2}}, \quad C_3 = \sum_{l=1}^{2} \frac{E_l h_l}{1+\nu_l}.$$

3. Поперечные низкочастотные длинноволновые приближения

В случае поперечного приближения показатели изменяемости и динамичности связаны соотношением $q=(a+1)/2,\ 0\le a<1$ (здесь и далее индекс, обозначающий номер слоя, временно опущен). Определим следующие асимптотики компонент НДС, учитывая, что, в отличие от однородной пластины, в двухслойной пластине поперечная составляющая не будет чисто изгибной:

$$v_i=R\left(\eta v_i^0+\eta^{2q}v_i^1\right),\quad v_3=R\left(\eta^q v_3^0+\eta^{q+1}v_3^1\right),$$

$$\sigma_{ii}=E\left(\eta^{1-q}\sigma_{ii}^0+\eta^q\sigma_{ii}^1\right),\quad \sigma_{ij}=E\left(\eta^{1-q}\sigma_{ij}^0+\eta^q\sigma_{ij}^1\right),\tag{3.1}$$

$$\sigma_{3i}=E\left(\eta^{2-2q}\sigma_{3i}^0+\eta\sigma_{3i}^1\right),\quad \sigma_{33}=E\left(\eta^{3-3q}\sigma_{33}^0+\eta^{2-q}\sigma_{33}^1\right).$$

Было показано, что в случае тангенциальных приближений для двухслойной пластины не производится разделение основного НДС на основную и дополнительную компоненты. В случае поперечных приближений основное НДС для каждого слоя является антисимметричным, а дополнительное – симметричным относительно срединной плоскости слоя. В отличие от случая изотропной пластины асимптотика напряжения σ_{3i} имеет другой вид. Подставим представления (3.1) в уравнения движения, закона Гука и граничные условия, записанные в безразмерных переменных (1.7). Проведем следующие преобразования: умножим первое уравнение движения на η^{2q-1} и пренебрежем инерционным членом (обеими составляющими), второе уравнение умножим на η^{3q-2} и пренебрежем инерционным членом дополнительного НДС. В первом и втором уравнениях закона Гука после умножения соответственно на η^{q-1} и η^{-q+2} пренебрежем напряжением σ_{33}, а в третьем уравнении – нормальным перемещением для дополнительного НДС и напряжением σ_{3i}.

Введем следующую зависимость неизвестных величин от нормальной координаты:

$$v_i^0=\varsigma v_i^{(1)},\quad v_i^1=v_i^{(0)},\quad v_3^0=v_3^{(0)},\quad v_3^1=\zeta v_3^{(1)},$$

$$\sigma_{ii}^0=\varsigma\sigma_{ii}^{(1)},\quad \sigma_{ii}^1=\sigma_{ii}^{(0)},\quad \sigma_{ij}^0=\varsigma\sigma_{ij}^{(1)},\quad \sigma_{ij}^1=\sigma_{ij}^{(0)},$$

$$\sigma_{3i}^0=\sigma_{3i}^{(0)}+\zeta^2\sigma_{3i}^{(2)},\quad \sigma_{3i}^1=\zeta\sigma_{3i}^{(1)},\tag{3.2}$$

$$\sigma_{33}^0=\varsigma\sigma_{33}^{(1)}+\zeta^3\sigma_{33}^{(3)},\quad \sigma_{33}^1=\sigma_{33}^{(0)}+\zeta^2\sigma_{33}^{(2)}.$$

Получим уравнения для разложений искомых величин по ζ:

$$v_{i,l}^{(1)}=-\frac{\partial v_{3,l}^{(0)}}{\partial\xi_i},\quad v_{3,l}^{(1)}=-\nu_l\left(\sigma_{11,l}^{(0)}+\sigma_{22,l}^{(0)}\right),$$

$$\sigma_{ii,l}^{(1)}=\frac{1}{1-\nu_l^2}\left(\frac{\partial v_{i,l}^{(1)}}{\partial\xi_i}+\nu_l\frac{\partial v_{j,l}^{(1)}}{\partial\xi_j}\right),\quad \sigma_{ij,l}^{(1)}=\frac{1}{2(1+\nu_l)}\left(\frac{\partial v_{i,l}^{(1)}}{\partial\xi_j}+\frac{\partial v_{j,l}^{(1}}{\partial\xi_i}\right),$$

$$\sigma_{ii,l}^{(0)}=\frac{1}{1-\nu_l^2}\left(\frac{\partial v_{i,l}^{(0)}}{\partial\xi_i}+\nu_l\frac{\partial v_{j,l}^{(0)}}{\partial\xi_j}\right),\quad \sigma_{ij,l}^{(0)}=\frac{1}{2(1+\nu_l)}\left(\frac{\partial v_{i,l}^{(0)}}{\partial\xi_j}+\frac{\partial v_{j,l}^{(0)}}{\partial\xi_i}\right),$$

$$\sigma_{3i,l}^{(1)}=-\left(\frac{\partial\sigma_{ii,l}^{(0)}}{\partial\xi_i}+\frac{\partial\sigma_{ij,l}^{(0)}}{\partial\xi_j}\right),\quad \sigma_{3i,l}^{(2)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{ii,l}^{(1)}}{\partial\xi_i}+\frac{\partial\sigma_{ij,l}^{(1)}}{\partial\xi_j}\right),$$

$$\sigma_{33,l}^{(2)}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\sigma_{3i,l}^{(1)}}{\partial\xi_i}+\frac{\partial\sigma_{3j,l}^{(1)}}{\partial\xi_j}\right),\quad \sigma_{33,l}^{(3)}=-\frac{1}{3}\left(\frac{\partial\sigma_{3i,l}^{(2)}}{\partial\xi_i}+\frac{\partial\sigma_{3j,l}^{(2)}}{\partial\xi_j}\right),$$

$$\sigma_{33,l}^{(1)}=-\left(\frac{\partial\sigma_{3i,l}^{(0)}}{\partial\xi_i}+\frac{\partial\sigma_{3j,l}^{(2)}}{\partial\xi_j}+\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{\partial^2 v_{3,l}^{(0)}}{\partial\tau^2}\right),$$

$$\sigma_{i3,1}^{(0)}=\eta_1^{2q_1-1}\sigma_{i3,1}^{(1)}-\sigma_{i3,1}^{(2)},\quad \sigma_{i3,2}^{(0)}=-\eta_1^{2q_2-1}\sigma_{i3,2}^{(1)}-\sigma_{i3,2}^{(2)},$$

$$\sigma_{33,1}^{(3)}=\eta_1^{2q_1-1}\sigma_{33,1}^{(2)}-\sigma_{33,1}^{(1)}+\eta_1^{2q_1-1}\sigma_{33,1}^{(0)},\quad \sigma_{33,2}^{(3)}=-\eta_2^{2q_2-1}\sigma_{33,2}^{(2)}-\sigma_{33,2}^{(1)}+\eta_2^{2q_2-1}\sigma_{33,2}^{(0)}. \quad (3.3)$$

Выражения (3.3) позволяют выразить все искомые величины через неизвестные функции $v_{3,l}^{(0)}$, $v_{i,l}^{(0)}$. Остальные шесть уравнений являются разрешающими для указанных шести неизвестных:

$$E_1\left[\eta_1^{2-2q_1}\left(\sigma_{3i,1}^{(0)}+\sigma_{3i,1}^{(2)}\right)+\eta_1\sigma_{3i,1}^{(1)}\right]=E_2\left[\eta_2^{2-2q_2}\left(\sigma_{3i,2}^{(0)}+\sigma_{3i,2}^{(2)}\right)-\eta_2\sigma_{3i,2}^{(1)}\right],$$

$$E_1\left[\eta_1^{3-3q_1}\left(\sigma_{33,1}^{(1)}+\sigma_{33,1}^{(3)}\right)+\eta_1^{2-q_1}\left(\sigma_{33,1}^{(0)}+\sigma_{33,1}^{(2)}\right)\right]=$$

$$=E_2\left[-\eta_2^{3-3q_2}\left(\sigma_{33,2}^{(1)}+\sigma_{33,2}^{(3)}\right)+\eta_2^{2-q_2}\left(\sigma_{33,2}^{(0)}+\sigma_{33,2}^{(2)}\right)\right], \quad (3.4)$$

$$\eta_1 v_{i,1}^{(1)}+\eta_1^{2q_1}v_{i,1}^{(0)}=-\eta_2 v_{i,2}^{(1)}+\eta_1^{2q_2}v_{i,2}^{(0)},\quad \eta_1^{q_1}v_{3,1}^{(0)}=\eta_2^{q_2}v_{3,2}^{(0)}.$$

Получим двумерную форму записи разрешающей системы. Для этого введем усилия T_i, S_{ij}, изгибающие моменты G_i, скручивающие моменты H_{ij}, перерезывающие силы N_i по формулам:

$$T_i=\int_{-2h_1}^{2h_2}\sigma_{ii}\,dz=2\sum_{l=1}^{2}h_l E_l\eta_l^{q_l}\sigma_{ii,l}^{(0)},\quad S_{ij}=\int_{-2h_1}^{2h_2}\sigma_{ij}\,dz=2\sum_{l=1}^{2}h_l E_l\eta_l^{q_l}\sigma_{ij,l}^{(0)},$$

$$G_i=\int_{-2h_1}^{2h_2}\sigma_{ii}z\,dz=2E_1h_1^2\left(\frac{1}{3}\eta_1^{1-q_1}\sigma_{ii,1}^{(1)}-\eta_1^{q_1}\sigma_{ii,1}^{(0)}\right)+2E_2h_2^2\left(\frac{1}{3}\eta_2^{1-q_2}\sigma_{ii,2}^{(1)}+\eta_2^{q_2}\sigma_{ii,2}^{(0)}\right),$$

$$H_{ij}=\int_{-2h_1}^{2h_2}\sigma_{ij}z\,dz=2E_1h_1^2\left(\frac{1}{3}\eta_1^{1-q_1}\sigma_{ij,1}^{(1)}-\eta_1^{q_1}\sigma_{ij,1}^{(0)}\right)+2E_2h_2^2\left(\frac{1}{3}\eta_2^{1-q_2}\sigma_{ij,2}^{(1)}+\eta_2^{q_2}\sigma_{ij,2}^{(0)}\right), \quad (3.5)$$

$$N_i=\int_{-2h_1}^{2h_2}\sigma_{3i}\,dz=2\sum_{l=1}^{2}h_l E_l\eta_l^{2-2q_l}\left(\sigma_{3i,l}^{(0)}+\frac{1}{3}\sigma_{3i,l}^{(1)}\right).$$

Обозначим через w нормальное перемещение точек координатной плоскости:

$$w=R\eta_1{}^{q_1}v_{3,1}^{(0)}=R\eta_2{}^{q_2}v_{3,2}^{(0)}. \quad (3.6)$$

Введем в рассмотрение следующие величины:

$$u_{i,l} = R\eta_l^{2q_l} v_{i,l}^{(0)}, \quad \gamma_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}. \tag{3.7}$$

Тогда для тангенциальных перемещений u_i точек координатной плоскости из граничных условий будем иметь выражение

$$u_i = -h_1\gamma_i + u_{i,1} = h_2\gamma_i + u_{i,2}. \tag{3.8}$$

Для того чтобы получить уравнения состояния, подставим в (3.5) выражения (3.3) с учетом (3.6)–(3.8). Тогда

$$\begin{aligned}
T_i &= C_1\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + C_2\frac{\partial u_j}{\partial x_j} - K_1\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i} - K_2\frac{\partial \gamma_j}{\partial x_j},\\
S_{ij} &= C_3\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) - K_3\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i}\right),\\
G_i &= D_1\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i} + D_2\frac{\partial \gamma_j}{\partial x_j} + K_1\frac{\partial u_i}{\partial x_i} + K_2\frac{\partial u_j}{\partial x_j},\\
H_{ij} &= D_3\left(\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i}\right) + K_3\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right),
\end{aligned} \tag{3.9}$$

где коэффициенты C_1, C_2, C_3 определяются по формулам (2.9),

$$\begin{aligned}
K_1 &= \sum_{l=1}^{2}(-1)^l\frac{2E_l h_l^2}{1-\nu_l^2}, \quad K_2 = \sum_{l=1}^{2}(-1)^l\frac{2E_l h_l^2\nu_l}{1-\nu_l^2}, \quad K_3 = \sum_{l=1}^{2}(-1)^l\frac{E_l h_l^2}{1+\nu_l},\\
D_1 &= \sum_{l=1}^{2}\frac{8E_l h_l^3}{3(1-\nu_l^2)}, \quad D_2 = \sum_{l=1}^{2}\frac{8E_l h_l^3\nu_l}{3(1-\nu_l^2)}, \quad D_3 = \sum_{l=1}^{2}\frac{4E_l h_l^3}{3(1+\nu_l)}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Получим уравнения движения. Для этого проинтегрируем первое уравнение движения по z от $-2h_1$ до $2h_2$, учитывая, что

$$\int_{-2h_1}^{2h_2}\frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial z}dz = \int_{-2h_1}^{0}\frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial z}dz + \int_{0}^{2h_2}\frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial z}dz = \sigma_{3i}\Big|_{-2h_1}^{0} + \sigma_{3i}\Big|_{0}^{2h_2} = 0. \tag{3.11}$$

Аналогичным образом проинтегрируем второе уравнение движения. Умножим первое уравнения движения на z и проинтегрируем, учитывая, что

$$\int_{-2h_1}^{2h_2}\frac{\partial\sigma_{3i}}{\partial z}z\,dz = \int_{-2h_1}^{2h_2}z\,d\sigma_{3i} = z\sigma_{3i}\Big|_{-2h_1}^{2h_2} - \int_{-2h_1}^{2h_2}\sigma_{3i}\,dz = -N_i. \tag{3.12}$$

Получим двумерные уравнения движения:

$$\frac{\partial T_i}{\partial x_i} + \frac{\partial S_{ij}}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial x_i}+\frac{\partial N_j}{\partial x_j}-2\rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=0,$$

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_i}+\frac{\partial H_{ij}}{\partial x_j}-N_i=0, \qquad (3.13)$$

где величины ρ и h определяются по формулам (2.8).

Введем двумерные деформации:

$$\varepsilon_i=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \quad \varepsilon_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i},$$

$$\chi_i=-\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}, \quad \chi_{ij}=\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i}, \quad \gamma_i=\frac{\partial w}{\partial x_i}. \qquad (3.14)$$

Тогда уравнения состояния в силу (3.9) запишутся в виде:

$$T_i=C_1\varepsilon_1+C_2\varepsilon_2+K_1\chi_1+K_2\chi_2,$$

$$S_{ij}=C_3\varepsilon_{ij}+K_3\chi_{ij},$$

$$G_i=D_1\chi_1+D_2\chi_2+K_1\varepsilon_1+K_2\varepsilon_2, \qquad (3.15)$$

$$H_{ij}=D_3\chi_{ij}+K_3\varepsilon_{ij}.$$

Таким образом, полученные приближения являются асимптотическим обобщением соответствующих составляющих теории Кирхгофа–Лява.

Литература

1. *Kaplunov, Ju.D.* Dynamics of thin walled elastic bodies / Ju.D. Kaplunov, L.Yu. Kossovich, E.V. Nolde. – London: Academic Press, 1998. – 226 p.

2. *Коссович, Л.Ю.* Нестационарные задачи теории упругих тонких оболочек / Л.Ю. Коссович. – Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1986. – 176 с.

3. *Коссович, Л.Ю.* Асимптотический анализ нестационарных упругих волн / Л.Ю. Коссович, Ю.Д. Каплунов // Известия Сарат. ун-та. – 2001. – Т. 1, вып. 2. – С. 111–131.

4. *Каплунов, Ю.Д.* Асимптотическое интегрирование динамических уравнений теории упругости для случая тонких оболочек / Ю.Д. Каплунов, И.В. Кириллова, Л.Ю. Коссович // ПММ. – 1993. – Т. 57, вып. 1. – С.83–91.

5. *Амбарцумян, С.А.* Общая теория анизотропных оболочек / С.А. Амбарцумян. – М.: Наука, 1971.

[21.06.2005]