

УДК 539.4+539.37

**НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ И ОПТИМИЗАЦИЯ  
ТРЕХСЛОЙНЫХ АРМИРОВАННЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН  
ИЗ РАЗНОСОПРОТИВЛЯЮЩИХСЯ МАТЕРИАЛОВ,  
ОПЕРТЫХ ПО ВНУТРЕННЕМУ КОНТУРУ\***

© 2015 г.

**Романова Т.П.**

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

lab4nemir@gmail.com

*Поступила в редакцию 10.07.2015*

В рамках модели жесткопластического тела рассмотрено предельное поведение гибридных композитных круглых пластин. Построено точное решение задачи изгиба трехслойных круглых пластин, имеющих разную структуру углового армирования в верхнем и нижнем слое. Материал среднего слоя и связующего в верхнем и нижнем слоях имеет пределы текучести на сжатие намного больше, чем на растяжение. В этом случае условие пластичности в плоскости главных моментов, построенное на основе структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах, имеет вид прямоугольника. Пластины шарнирно оперты по внутреннему круговому контуру и имеют в центральной части жесткую круглую вставку. Пластины находятся под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки. Показано, что в зависимости от положения опорного контура возможны три схемы предельного деформирования; определены условия их реализации. Найдены поля главных моментов и скорости прогибов пластины. Получены простые аналитические выражения для предельной нагрузки. Определено оптимальное расположение опоры, при котором пластина имеет наименьшую повреждаемость с точки зрения максимума предельной нагрузки. Показано, что на оптимальной опоре образуется пластический шарнир. Определено оптимальное соотношение толщин верхнего и нижнего слоев пластины при заданной их суммарной толщине, соответствующее наибольшей предельной нагрузке.

*Ключевые слова:* жесткопластическая модель, гибридное армирование, разностроупротивляющиеся материалы, угловое армирование, трехслойная пластина, внутренняя опора, жесткая вставка, предельная нагрузка, оптимальное расположение опоры.

**Введение**

Анизотропные разностроупротивляющиеся материалы широко используются для изготовления разнообразных элементов конструкций, которые могут быть как од-

---

\* Выполнено при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00102-а).

нородными, так и неоднородными. К числу последних относятся круглые многослойные армированные пластины. В связи с тем, что зачастую в элементах конструкций предоставляется свобода выбора планировочных решений, в том числе и свобода размещения опор [1], в настоящей статье в рамках жесткопластической модели основное внимание уделяется вычислению предельных нагрузок трехслойных армированных пластин из разносопротивляющихся материалов фаз композиции при различных характеристиках углового армирования в несущих слоях и различном расположении опорного кругового контура внутри области пластины, а также определению его оптимального положения. В литературе точные решения для пластических армированных пластин, опертых по внутреннему контуру, не известны. В случае однородного материала методом предельного равновесия в [2] определена предельная нагрузка для круглой пластины, опертой на  $n$  точек, расположенных симметрично на окружности. В [3] найдено оптимальное положение дополнительной внутренней опоры для шарнирно опертой, защемленной и свободной на контуре круглых пластин под действием начального импульса. В [4, 5] методом предельного равновесия для квадратных и прямоугольных плит определено оптимальное размещение колонн, рассматриваемых как точечные опоры. Вопросы оптимального положения опор для однородных упругопластических балок, круглых и прямоугольных пластин изучены в [6–11]. Оптимальное положение полигональных внутренних опор к однородным жесткопластическим круглым, одно- и двусвязным полигональным пластинам найдено в [12, 13] методом предельного равновесия. Динамическое поведение однородных криволинейных двусвязных пластин с внутренней опорой рассмотрено в [14].

### 1. Условие пластичности и закон пластического течения

Рассмотрим в полярных координатах  $(r, \varphi)$  круглую тонкую кирхгофову пластину с центральной круглой жесткой вставкой с контуром  $L_0$ , шарнирно опертую по внутреннему круговому контуру  $L_1$ , при воздействии равномерно распределенной нагрузки. Внешний контур пластины  $L_2$  свободный (рис. 1). Окружности  $L_0, L_1$  и  $L_2$  – концентрические; их радиусы равны  $R_0, R_1$  и  $R_2$  ( $0 \leq R_0 \leq R_1 \leq R_2$ ). Пластина состоит из трех различных слоев. Верхний  $I_1$  и нижний  $I_2$  слои (несущие слои) содержат по толщине большое количество армированных слоев и связующих их изотропных прослоек, описываемых моделью идеального жесткопластического материала с условием пластичности типа модифицированного условия Треска для материала, разносопротивляющегося на растяжение и сжатие. Считается, что волокна арматуры деформируются, как одномерные элементы, располагаются в виде симметричных относительно радиуса криволинейных траекторий (угловое армирование), причем армирование в верхнем и нижнем слое различное. Средний слой пластины выполнен из того же материала, что связующий материал в несущих слоях.

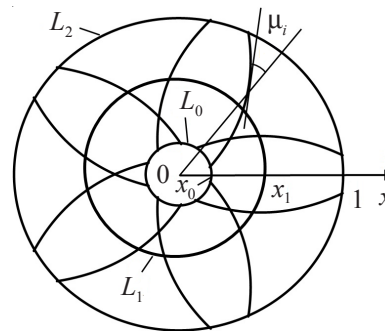


Рис. 1

Пусть  $\bar{M}_1, \bar{M}_2$  – радиальный и окружной изгибные моменты;  $k\sigma_0$  и  $\sigma_0$  – пределы текучести связующего материала на растяжение и сжатие ( $0 < k \leq 1$ );  $s_i^a$  – пре-

дел текучести материала арматуры в слое  $I_i$  ( $i = 1, 2$ );  $\mu_i$  – угол армирования угловых волокон в области  $I_i$ ;  $\omega_i(x)$ ,  $\omega_{i0}$  – плотность армирования волокон в области  $I_i$  и ее значение при  $x = x_0$ ;  $\bar{\delta}_1$  и  $\bar{\delta}_2$  – толщины верхнего и нижнего слоев;  $\bar{w}$  – прогиб;  $\bar{t}$  – время;  $H$  – толщина пластины;  $\kappa_1$ ,  $\kappa_2$  – главные скорости кривизны поверхности пластины (безразмерные),  $\sigma_0^0$ ,  $H_0$ ,  $t_0$  – параметры обезразмеривания,

$$s = \frac{\sigma_0}{\sigma_0^0}, \quad m_i = \frac{\bar{M}_i}{M_0^0}, \quad M_0^0 = \frac{\sigma_0^0 H_0^2}{4}, \quad s_i = \frac{s_i^a}{\sigma_0^0}, \quad \delta_i = \frac{\bar{\delta}_i}{H_0}, \quad \omega_{i1} = 2\omega_i \cos^2 \mu_i,$$

$$\omega_{i2} = 2\omega_i \sin^2 \mu_i, \quad \mu_{i0} = \mu_i(x_0) \quad (i=1, 2), \quad h = \frac{H}{H_0}, \quad \kappa_1 = -\dot{v}'', \quad \kappa_2 = -\frac{\dot{v}'}{x}, \quad x = \frac{R}{R_2},$$

$$x_j = \frac{R_j}{R_2} \quad (j=0,1), \quad v = \left(\frac{H_0}{R_2}\right)^2 w, \quad w = \frac{\bar{w}}{H_0}, \quad (*)' = \frac{\partial(*)}{\partial(x)}, \quad (*) = \frac{\partial(*)}{\partial(t)}, \quad t = \frac{\bar{t}}{t_0}.$$

Для возможных вариантов структур углового армирования плотность армирования одного семейства волокон  $\omega_i(x)$  ( $i = 1, 2$ ) определяется как [15]:

а) для спирали Архимеда:

$$\omega_i(x) = \frac{\omega_{i0} \sqrt{x_0^2 + (x \operatorname{tg} \mu_i)^2}}{x \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \mu_i}}, \quad \operatorname{tg} \mu_i = \frac{x \operatorname{tg} \mu_{i0}}{x_0}; \quad (1)$$

б) для логарифмической спирали:

$$\omega_i(x) = \frac{\omega_{i0} x_0}{x}, \quad \mu_i(x) = \mu_{i0} = \operatorname{const}; \quad (2)$$

в) для «спицы велосипеда»:

$$\omega_i(x) = \frac{\omega_{i0} x_0 \cos \mu_{i0}}{\sqrt{x^2 - (x_0 \sin \mu_{i0})^2}}, \quad \sin \mu_i = \frac{x_0 \sin \mu_{i0}}{x}. \quad (3)$$

В статье [16] на основе структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах [17] и в рамках жесткопластического анализа

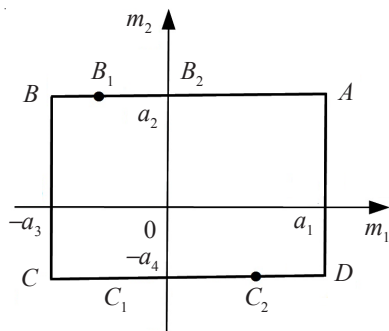


Рис. 2

получено, что условие пластичности в плоскости главных моментов для трехслойной армированной пластины, изготовленной из разносопротивляющихся материалов фаз композиции, имеет форму восьмиугольника. Будем считать, что отношение пределов текучести связующего материала на растяжение и сжатие  $k$  мало. Тогда восьмиугольник становится практически четырехугольником. И для трехслойной армированной круглой пластины условие пластичности в плоскости главных моментов имеет вид прямоугольника  $ABCD$ , изображенного на рис. 2:

режим  $AB$ :  $m_2 = a_2(x)$ ,  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 > 0$ ; режим  $BC$ :  $m_1 = -a_3(x)$ ,  $\kappa_2 = 0$ ,  $\kappa_1 < 0$ ;

режим  $CD$ :  $m_2 = -a_4(x)$ ,  $\kappa_1 = 0$ ,  $\kappa_2 < 0$ ; режим  $AD$ :  $m_1 = a_1(x)$ ,  $\kappa_2 = 0$ ,  $\kappa_1 > 0$ ;

$$a_1 = 2\{ksh^2 + \delta_1^2(2s\omega_1 - s_1\omega_{11}) - \delta_2(2h - \delta_2)(2ks\omega_2 - s_2\omega_{21}) - [ksh + \delta_1(2s\omega_1 - s_1\omega_{11}) - \delta_2(2ks\omega_2 - s_2\omega_{21})]^2 / [(k+1)s]\}; \quad (4)$$

$$a_2 = 2\{ksh^2 + \delta_1^2(2s\omega_1 - s_1\omega_{12}) - \delta_2(2h - \delta_2)(2ks\omega_2 - s_2\omega_{22}) - [ksh + \delta_1(2s\omega_1 - s_1\omega_{12}) - \delta_2(2ks\omega_2 - s_2\omega_{22})]^2 / [(k+1)s]\}; \quad (5)$$

$$a_3 = 2\{sh^2 + \delta_1^2(2ks\omega_1 - s_1\omega_{11}) - \delta_2(2h - \delta_2)(2s\omega_2 - s_2\omega_{21}) - [sh + \delta_1(2ks\omega_1 - s_1\omega_{11}) - \delta_2(2s\omega_2 - s_2\omega_{21})]^2 / [(k+1)s]\}; \quad (6)$$

$$a_4 = 2\{sh^2 + \delta_1^2(2ks\omega_1 - s_1\omega_{12}) - \delta_2(2h - \delta_2)(2s\omega_2 - s_2\omega_{22}) - [sh + \delta_1(2ks\omega_1 - s_1\omega_{12}) - \delta_2(2s\omega_2 - s_2\omega_{22})]^2 / [(k+1)s]\}. \quad (7)$$

Считаем, что  $a_j(x)$  являются гладкими функциями.

## 2. Определение моментов, предельной нагрузки и скоростей

Уравнения равновесия круглой пластины имеют вид:

$$(xm_1)' - m_2 = xq, \quad (8)$$

$$(xq)' = -xp \quad (q = -\bar{Q}R_2/M_0^0, \quad p = \bar{P}R_2^2/M_0^0), \quad (9)$$

где  $\bar{Q}$  – перерезывающая сила,  $\bar{P}$  – нагрузка, распределенная по поверхности пластины. При расположении опорного контура на внешнем контуре пластины ( $x_1 = 1$ ) на границе жесткой вставки образуется пластический шарнир, тогда при  $x = x_0$  реализуется режим  $A$ , при котором  $m_2(x_0) = a_2(x_0)$ ,  $m_1(x_0) = a_1(x_0)$  (см. рис. 2). Пусть опорная окружность смещена от внешнего контура пластины немного внутрь ее ( $x_{12} \leq x_1 \leq 1$ ; значение  $x_{12}$  определим ниже). Назовем возникающую при этом схему деформирования схемой 1. Окружность  $x = x_1$  является промежуточным шарниром, на котором справедливо неравенство  $-a_3(x_1) < m_1(x_1) \leq 0$  и перерезывающие силы терпят разрыв. На отрезке  $x_0 \leq x \leq x_1$  реализуется пластическое состояние  $AB_1$ , при котором:

$$m_2(x) = a_2(x), \quad \dot{v}'' = 0, \quad m_1(x_1) \leq m_1(x) \leq a_1(x), \quad m_1(x_1) \leq 0, \quad m_1(x_0) = a_1(x_0), \quad (10)$$

а на отрезке  $x_1 \leq x \leq 1$  реализуется пластическое состояние  $B_1B_2$ , при котором:

$$m_2(x) = a_2(x), \quad \dot{v}'' = 0, \quad m_1(x_1) \leq m_1(x) \leq 0, \quad m_1(x_1) \leq 0, \quad m_1(1) = 0. \quad (11)$$

Из уравнения  $\dot{v}'' = 0$  при учете равенства нулю скоростей прогибов на опорном контуре  $x = x_1$  и того, что жесткая область не деформируется, получим распределение скоростей прогибов при схеме 1 (рис. 3а),  $\dot{v}_0$  – безразмерная скорость прогиба жесткой шайбы:

$$\dot{v} = \begin{cases} \dot{v}_0 & \text{при } 0 \leq x \leq x_0, \\ \dot{v}_0(x_1 - x)/(x_1 - x_0) & \text{при } x_0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Из (8)–(10) при  $x_0 \leq x \leq x_1$  имеем

$$xq(x) = x_0q(x_0) - p \int_{x_0}^x y dy = x_0q(x_0) - \frac{p(x^2 - x_0^2)}{2}, \quad (xm_1)' = a_2(x) - \frac{px^2}{2},$$

$$m_1(x) = \frac{x_0}{x} a_1(x_0) + \frac{1}{x} \int_{x_0}^x a_2(y) dy - \frac{p(x^2 - x_0^3/x)}{6}. \quad (12)$$

При  $x_1 \leq x \leq 1$ , учитывая, что на свободном контуре  $q(1) = 0$ , из (8), (9), (11) получим

$$xq(x) = -p \int_1^x y dy = -\frac{p(x^2 - 1)}{2}, \quad (xm_1)' = a_2(x) - \frac{p(x^2 - 1)}{2},$$

$$m_1(x) = -\frac{1}{x} \int_x^1 a_2(y) dy - \frac{p}{6} \left( x^2 - 3 + 2 \frac{1}{x} \right). \quad (13)$$

Из равенства  $m_1(x_1 - 0) = m_1(x_1 + 0)$  и (12), (13) получим предельную нагрузку  $p_{01}$  для схемы 1:

$$p_{01} = \frac{6}{3x_1 - 2 - x_0^3} \left[ x_0 a_1(x_0) + \int_{x_0}^1 a_2(x) dx \right]. \quad (14)$$

Подставляя  $p = p_{01}$  в (12), (13), получим значения радиального момента  $m_1(x)$ :

$$m_1(x) =$$

$$= \begin{cases} \frac{x_0}{x} a_1(x_0) + \frac{1}{x} \int_{x_0}^x a_2(y) dy + \frac{x^3 - x_0^3}{x(x_0^3 - 3x_1 + 2)} \left[ x_0 a_1(x_0) + \int_{x_0}^1 a_2(x) dx \right], & x_0 \leq x \leq x_1, \\ -\frac{1}{x} \int_x^1 a_2(y) dy + \frac{x^3 - 3x + 2}{x(x_0^3 - 3x_1 + 2)} \left[ x_0 a_1(x_0) + \int_{x_0}^1 a_2(x) dx \right], & x_1 \leq x \leq 1. \end{cases} \quad (15)$$

Из анализа выражения (15) следует, что  $m_1(x)$  с ростом  $x$  убывает при  $x_0 \leq x \leq x_1$ , возрастает при  $x_1 \leq x \leq 1$  и достигает своего минимального значения при  $x = x_1$ . При условии  $m_1(x_1) = -a_3(x_1)$  на опоре образуется пластический шарнир. Отсюда следует, что схема 1 реализуется для значений  $x_1$  в интервале  $x_{12} \leq x_1 \leq 1$ , где  $x_{12}$  определяется из уравнения  $m_1(x_{12}) = -a_3(x_{12})$ , которое с учетом (15) имеет вид:

$$a_3(x_{12})x_{12} + \frac{x_{12}^3 - 3x_{12} + 2}{x_0^3 - 3x_{12} + 2} \left[ x_0 a_1(x_0) + \int_{x_0}^1 a_2(x) dx \right] = \int_{x_{12}}^1 a_2(x) dx. \quad (16)$$

При радиусе опорного контура  $x_1 \leq x_{12}$  на контуре  $L_1$  образуется пластический шарнир, при этом пластина деформируется, как две независимые области: внутри контура  $L_1$  (схема 2) и между контурами  $L_1$  и  $L_2$  (схема 3).

При схеме 2 будет деформироваться только часть пластины внутри контура  $L_1$  как пластина с жесткой шайбой, защемленная по контуру  $L_1$ . На отрезке  $x_0 \leq x \leq x_1$  ( $x_1 \leq x_{12}$ ) реализуется пластическое состояние  $AB$ , при котором:

$$m_2(x) = a_2(x), \quad \dot{v}'' = 0, \quad -a_3(x) \leq m_1(x) \leq a_1(x),$$

$$m_1(x_1) = -a_3(x_1), \quad m_1(x_0) = a_1(x_0).$$

Из условия  $\dot{v}'' = 0$  скорости прогибов в пластине при схеме 2 равны (см. рис. 3б):

$$\dot{v} = \begin{cases} \dot{v}_0 & \text{при } 0 \leq x \leq x_0, \\ \dot{v}_0(x_1 - x)/(x_1 - x_0) & \text{при } x_0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Радиальный момент  $m_1(x)$  определяется выражением (12). Из условия  $m_1(x_1) = -a_3(x_1)$  получим предельную нагрузку  $p_{02}$  для схемы 2:

$$p_{02} = \frac{6}{x_1^3 - x_0^3} \left[ a_3(x_1)x_1 + a_1(x_0)x_0 + \int_{x_0}^{x_1} a_2(x)dx \right]. \quad (17)$$

При схеме 3 (рис. 3в) будет деформироваться только часть пластины между контурами  $L_1$  и  $L_2$  как пластина, защемленная по внутреннему контуру  $L_1$  и свободная на внешнем контуре  $L_2$ . На контуре  $L_1$  образуется пластический шарнир и  $m_2(x_1) < 0$ ,  $m_1(x_1) < 0$ . При  $x_1 \leq x \leq 1$  реализуется пластическое состояние  $CC_1$ :

$$m_2(x) = -a_4(x), \quad \dot{v}'' = 0, \quad -a_3(x) \leq m_1(x) \leq 0, \quad m_1(x_1) = -a_3(x_1), \quad m_1(1) = 0. \quad (18)$$

Из условия  $\dot{v}'' = 0$  скорости прогибов в пластине при схеме 3 равны (см. рис. 3в):

$$\dot{v} = \alpha(x - x_1) \text{ при } x_1 \leq x \leq 1 \quad (\alpha = \text{const}).$$

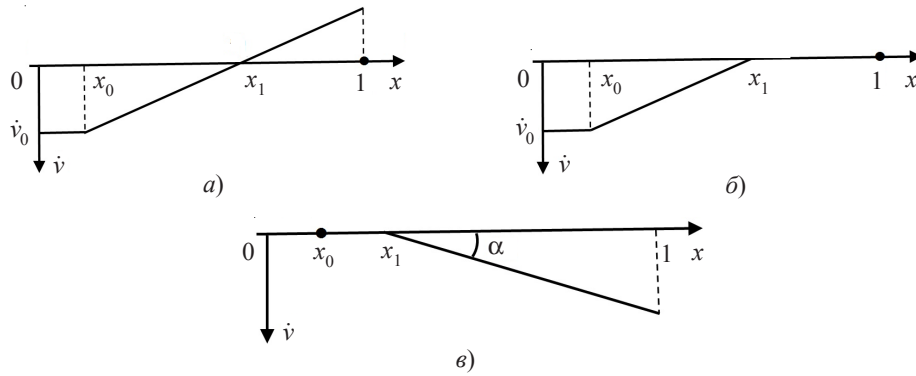


Рис. 3

При  $x_1 \leq x \leq 1$ , учитывая, что на свободном контуре  $q(1) = 0$ , из (8), (9), (18) получим

$$xq(x) = -p \int_1^x y dy = -\frac{p(x^2 - 1)}{2}, \quad (xm_1)' = -a_4(x) - \frac{p(x^2 - 1)}{2},$$

$$m_1(x) = \frac{1}{x} \int_x^1 a_4(y) dy - \frac{p}{6} \left( x^2 - 3 + \frac{x}{2} \right). \quad (19)$$

Из (19) и условия  $m_1(x_1) = -a_3(x_1)$  получим предельную нагрузку  $p_{03}$  для схемы 3:

$$p_{03} = \frac{6}{(1 - x_1)^2(2 + x_1)} \left[ a_3(x_1)x_1 + \int_{x_0}^1 a_4(x)dx \right]. \quad (20)$$

Несложно показать, что невозможна схема деформирования, при которой в пластине реализуются режимы  $CC_1C_2$ , а жесткая шайба движется вверх, так как при этом для всех  $x_0 \leq x_1 \leq 1$  предельная нагрузка больше, чем  $\min(p_{01}, p_{02}, p_{03})$ .

Пластина будет деформироваться по схеме  $i$ , соответствующей минимальному значению  $p_{0i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Предельная нагрузка  $p_0$  для рассматриваемой пластины равна

$$p_0 = \min(p_{01}, p_{02}, p_{03}). \quad (21)$$

Из выражения (18) для  $p_{02}$  видно, что при расположении опоры около шайбы ( $x_1 \rightarrow x_0$ ) предельная нагрузка  $p_{02}$  возрастает и стремится к бесконечности. Из (20) следует, что величина  $p_{03}$  убывает при  $x_1 \rightarrow x_0$ , следовательно,  $p_{03} < p_{02}$  и в этом случае реализуется схема 3. При увеличении значения опорного радиуса  $x_1$  от  $x_0$  нагрузка  $p_{02}$  убывает, а  $p_{03}$ , определяемая выражением (20), возрастает. Из равенства  $p_{02}(x_{1m}) = p_{03}(x_{1m})$  вычисляется значение  $x_1 = x_{1m} > x_0$ , при котором схема 3 переходит в схему 2. С учетом (17), (20) величина  $x_{1m}$  определяется из алгебраического уравнения:

$$\frac{(1-x_{1m})^2(2+x_{1m})}{x_{1m}^3-x_0^3} \left[ a_3(x_{1m})x_{1m} + a_1(x_0)x_0 + \int_{x_0}^{x_{1m}} a_2(y)dy \right] = \left[ a_3(x_{1m})x_{1m} + \int_{x_{1m}}^1 a_4(x)dx \right]. \quad (22)$$

Таким образом, при  $x_{12} \leq x_1 \leq 1$  реализуется схема 1, при  $x_{1m} \leq x_1 \leq x_{12}$  будет схема 2 и при  $x_0 \leq x_1 \leq x_{1m}$  – схема 3.

### 3. Вычисление оптимальной опоры

Оптимальной будем считать такую опору, при которой пластина имеет максимальную предельную нагрузку  $p_0$  и, следовательно, минимальную повреждаемость. Из (14), (17), (20) следует, что функции предельных нагрузок  $p_{01}(x_1)$ ,  $p_{02}(x_1)$  убывающие по  $x_1$ , а функция  $p_{03}(x_1)$  – возрастающая. Так как схема 1 реализуется при  $x_{12} \leq x_1 \leq 1$ , схема 2 – при  $x_{1m} \leq x_1 \leq x_{12}$  и схема 3 – при  $x_0 \leq x_1 \leq x_{1m}$ , то предельная нагрузка рассматриваемых пластин будет максимальна при переходе схемы 2 в схему 3, то есть при  $x_1 = x_{1m}$ . Таким образом, условие оптимальности опоры имеет вид  $p_{02}(x_{1m}) = p_{03}(x_{1m})$ , а равенство (22) является алгебраическим уравнением для вычисления радиуса оптимальной опорной окружности  $x_1 = x_{1m}$ . Кроме этого, видно, что на оптимальной внутренней опоре образуется пластический шарнир.

На рис. 4 изображены значения радиуса оптимальной опоры  $x_{1m}$ , полученные численно из (22) методом деления пополам, в зависимости от размера жесткой вставки  $x_0$ . Считалось, что  $k = 1/17$ ,  $s = 1$ ,  $s_1 = 40$ ,  $s_2 = 50$ ,  $\mu_{10} = \pi/6$ ,  $\mu_{20} = \pi/5$ ,  $\omega_{10} = 0,25$ ,  $\omega_{20} = 0,2$ ,  $h = 1$ ,  $\delta_2 = 0,15$ ; армирование обоих слоев осуществлялось по закону (2). Кривые 1–3 соответствуют расчетам при  $\delta_1 = 0,05$ , 0,1 и 0,2.

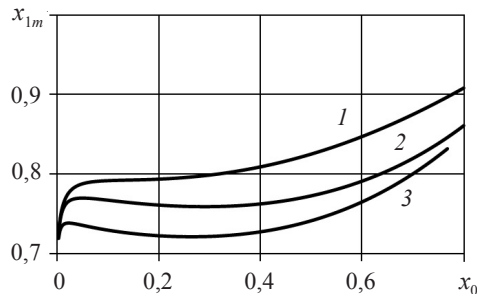


Рис. 4

На рис. 5, 6 изображена предельная нагрузка  $p_0$ , вычисленная по (14), (17), (20), (21) для рассматриваемых слоистых пластин, в зависимости от радиуса опоры  $x_1$ .

Считалось, что  $k = 1/17$ ,  $s = 1$ ,  $s_1 = 40$ ,  $s_2 = 50$ ,  $\mu_{10} = \pi/6$ ,  $\mu_{20} = \pi/5$ ,  $\omega_{10} = 0,25$ ,  $\omega_{20} = 0,2$ ,  $h = 1$ .

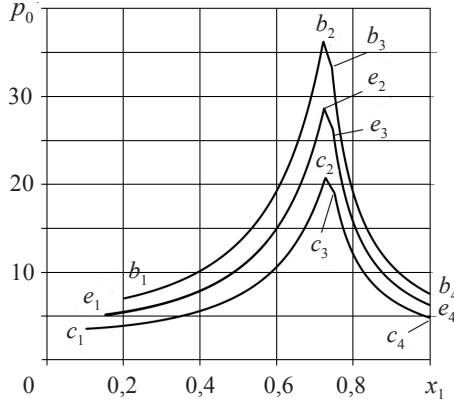


Рис. 5

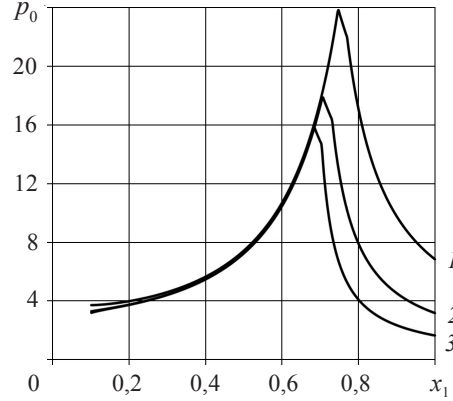


Рис. 6

На рис. 5 приведены расчеты при различных размерах жесткой вставки. Было принято:  $\delta_1 = 0,1$ ,  $\delta_2 = 0,07$ ; армирование обоих слоев в форме логарифмических спиралей по закону (2). Линия  $c_1c_2c_3c_4$  изображает  $p_0$  при безразмерном параметре жесткой шайбы  $x_0 = 0,1$ . На интервале  $c_1c_2$  реализуется схема 3, на интервале  $c_2c_3$  – схема 2, на интервале  $c_3c_4$  – схема 1. Максимум предельной нагрузки достигается на оптимальной опоре  $x_1 = x_{1m} = 0,727$  (в точке  $c_2$ ),  $p_0(x_{1m}) = 20,75$ ;  $p_0(x_{1m})/p_0(1) = 4,3$ . Линия  $e_1e_2e_3e_4$  изображает нагрузку  $p_0$  при  $x_0 = 0,15$ . На интервале  $e_1e_2$  реализуется схема 3, на интервале  $e_2e_3$  – схема 2, на интервале  $e_3e_4$  – схема 1. Максимум  $p_0$  достигается при  $x_1 = x_{1m} = 0,724$  (в точке  $e_2$ ),  $p_0(x_{1m}) = 28,62$ ;  $p_0(x_{1m})/p_0(1) = 4,5$ . Линия  $b_1b_2b_3b_4$  изображает  $p_0$  при  $x_0 = 0,2$ . На интервале  $b_1b_2$  реализуется схема 3, на интервале  $b_2b_3$  – схема 2, на интервале  $b_3b_4$  – схема 1. Максимум  $p_0$  достигается при  $x_1 = x_{1m} = 0,722$  (в точке  $b_2$ ),  $p_0(x_{1m}) = 36,29$ ;  $p_0(x_{1m})/p_0(1) = 4,8$ . При увеличении размеров шайбы отношение максимальной предельной нагрузки  $p_0(x_{1m})$  к предельной нагрузке  $p_0(1)$  (в случае шарнирного опирания по внешнему контуру пластины) растет.

Для расчетов, приведенных на рис. 6,  $x_0 = 0,1$ . Линия 1:  $\delta_1 = \delta_2 = 0,1$ ; армирование обоих слоев по закону (2); радиус оптимальной опоры равен  $x_{1m} = 0,747$ ;  $p_0(x_{1m}) = 23,9$ . Линия 2:  $\delta_1 = 0,1$ ,  $\delta_2 = 0,05$ ; армирование обоих слоев по закону (2);  $x_{1m} = 0,7$ ;  $p_0(x_{1m}) = 17,94$ . Линия 3: параметры, как для кривой 2, но армирование верхнего слоя  $I_1$  по закону (2) и нижнего слоя  $I_2$  закону (3);  $x_{1m} = 0,68$ ;  $p_0(x_{1m}) = 15,87$ . Видно, что при размещении опорного контура около жесткой области предельные нагрузки  $p_0$  для рассматриваемых случаев совпадают. Если же опора расположена ближе к внешнему контуру пластины, то значения  $p_0$  существенно различаются.

На рис. 7 приведена предельная нагрузка  $p_0$  в зависимости от радиуса опоры  $x_1$  в случае различного соотношения толщин армированных слоев. Кривая 1 соответствует  $\delta_1 = 0,05$ ;  $\delta_2 = 0,1$ , кривая 2 –  $\delta_1 = 0,1$ ;  $\delta_2 = 0,05$ . Остальные характеристики слоев одинаковые:  $k = 1/17$ ,  $x_0 = 0,1$ ,  $s = 1$ ,  $s_1 = s_2 = 40$ ,  $\mu_{10} = \mu_{20} = \pi/6$ ,  $\omega_{10} = \omega_{20} = 0,25$ , армирование обоих слоев по закону (2). Видно, что при расположении опоры около жесткой вставки (при схеме 3) нагрузка  $p_0$  больше для кривой 2, когда верхний слой толще нижнего. При расположении опоры около внешнего контура пластины (при схеме 1) нагрузка  $p_0$  больше для кривой 1, когда верхний слой тоньше



ше нижнего. Оптимальное расположение опорного контура различное. Поскольку максимум предельной нагрузки реализуется на оптимальной опоре при переходе схемы 3 в схему 2, то максимум  $p_0$  больше, если верхний слой толще нижнего. Такая закономерность хорошо видна на рис. 7: максимум  $p_0$  для кривой 2 больше, чем этот максимум для кривой 1.

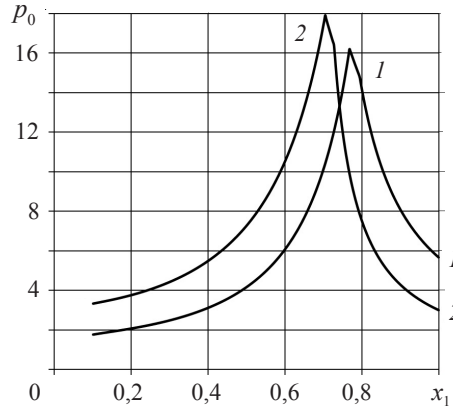


Рис. 7

С помощью (14), (17) можно вычислить отношение  $p_0(x_{1m})$  к предельной нагрузке  $p_0(1)$ , когда пластина шарнирно оперта по внешнему контуру, из равенства

$$\frac{p_0(x_{1m})}{p_0(1)} = \frac{1 - x_0^3}{(x_{1m}^3 - x_0^3) \left[ x_0 a_1(x_0) + \int_{x_0}^1 a_2(x) dx \right]} \left[ a_3(x_{1m}) x_{1m} + a_1(x_0) x_0 + \int_{x_0}^{x_{1m}} a_2(x) dx \right],$$

где  $x_{1m}$  определяется из (22). Как видно из приведенных примеров, при различных параметрах армирования отношение  $p_0(x_{1m})/p_0(1)$  может быть больше четырех.

Рассмотренные примеры показывают, что изменение характеристик армирования пластины существенно влияет на ее предельную нагрузку. Однако если есть возможность управлять размещением опорного контура, то эффект оптимизации превосходит эффекты, получаемые за счет управления только армированием пластины. Изменяя расположение опорного контура внутри области пластины, можно найти опору, при которой пластина будет наиболее прочной.

#### 4. Оптимизация характеристик армирования пластины

Простые аналитические формулы для предельной нагрузки (14), (17), (20), (21) позволяют определять оптимальные значения различных характеристик армирования рассматриваемых пластин с точки зрения максимума предельной нагрузки.

1. Определим оптимальную толщину верхнего армированного слоя, обеспечивающую максимальное значение предельной нагрузки при заданной суммарной толщине несущих слоев:  $\delta_1 + \delta_2 = \gamma = \text{const}$ . Считаем для определенности, что радиус опорного контура фиксирован и расположен около внешнего контура (например,  $0,9 \leq x_1 \leq 1$  при  $x_0 = 0,1$ ). В этом случае пластина деформируется по схеме 1, а предельная нагрузка определяется по формуле (14):

$$p_{01} = \frac{6}{3x_1 - 2 - x_0^3} f_1, \quad f_1 = x_0 a_1(x_0) + \int_{x_0}^1 a_2(x) dx.$$

При фиксированных значениях  $x_0, x_1$  задача свелась к определению максимума функции  $f_1$  при условии  $\delta_1 + \delta_2 = \gamma, \delta_1 \geq 0, \delta_2 \geq 0$ . Поскольку  $\delta_2 = \gamma - \delta_1$ , то с учетом (4), (5)  $f_1$  является квадратичной функцией от аргумента  $\delta_1$ :

$$f_1(\delta_1) = \alpha_0 \delta_1^2 + \alpha_1 \delta_1 + \alpha_2,$$

$$\alpha_0 = -\frac{2}{s(k+1)} \left\{ (2s\omega_{10} + 2ks\omega_{20} - s_{10}\omega_{110} - s_{20}\omega_{210}) [2s\omega_{10} + 2ks\omega_{20} - s_{10}\omega_{110} - s_{20}\omega_{210} - s(k+1)] x_0 + \int_{x_0}^1 (2s\omega_1 + 2ks\omega_2 - s_1\omega_{12} - s_2\omega_{22}) [2s\omega_1 + 2ks\omega_2 - s_1\omega_{12} - s_2\omega_{22} - s(k+1)] dx \right\},$$

$$\alpha_1 = 4 \left\{ x_0 \left[ (h - \gamma)(2ks\omega_{20} - s_{20}\omega_{210}) - \frac{1}{s(k+1)} [ksh - \gamma(2ks\omega_{20} - s_{20}\omega_{210})] \times \right. \right. \\ \left. \left. \times (2s\omega_{10} + 2ks\omega_{20} - s_{10}\omega_{110} - s_{20}\omega_{210}) \right] + \int_{x_0}^1 \left[ (h - \gamma)(2ks\omega_2 - s_2\omega_{22}) - \frac{1}{s(k+1)} [ksh - \gamma(2ks\omega_2 - s_2\omega_{22})] (2s\omega_1 + 2ks\omega_2 - s_1\omega_{12} - s_2\omega_{22}) \right] dx \right\},$$

$$\alpha_2 = 2 \left\{ x_0 \left[ ksh^2 - \gamma(2h - \gamma)(2ks\omega_{20} - s_{20}\omega_{210}) - \frac{[ksh - \gamma(2ks\omega_{20} - s_{20}\omega_{210})]^2}{s(k+1)} \right] + \right. \\ \left. + \int_{x_0}^1 \left[ ksh^2 - \gamma(2h - \gamma)(2ks\omega_2 - s_2\omega_{22}) - \frac{[ksh - \gamma(2ks\omega_2 - s_2\omega_{22})]^2}{s(k+1)} \right] dx \right\}.$$

Здесь  $s_{i0}, \omega_{i0}, \omega_{ij0}$  ( $i, j = 1, 2$ ) – значения функций  $s_i, \omega_i, \omega_{ij}$  при  $x = x_0$ . Коэффициент  $\alpha_0$  не зависит от величины  $\gamma$  и всегда меньше нуля, поскольку пределы текучести арматуры  $s_i$  ( $i = 1, 2$ ) больше предела текучести связующего  $s$ . Коэффициент  $\alpha_1$  больше нуля. Функция  $f_1(\delta_1)$  имеет единственный максимум при  $\delta_1 = -\alpha_1/(2\alpha_0)$ . Следовательно, при заданной суммарной толщине армированных слоев максимальная предельная нагрузка при деформировании по схеме 1 равна:

$$p_0 = \frac{6}{3x_1 - 2 - x_0^3} \left( \frac{\alpha_1^2}{4\alpha_0} - \frac{\alpha_1}{2\alpha_0} + \alpha_2 \right), \quad (23)$$

при этом оптимальные толщины верхнего и нижнего слоев равны

$$\delta_1 = -\frac{\alpha_1}{2\alpha_0}, \quad \delta_2 = \gamma + \frac{\alpha_1}{2\alpha_0}. \quad (24)$$

2. Если опорный контур расположен внутри пластины недалеко от жесткой вставки, то пластина деформируется по схеме 3, а предельная нагрузка определяется по формуле (20). В этом случае задача оптимизации сводится к поиску максимума функ-

ции  $f_2 = a_3(x_1)x_1 + \int_{x_1}^1 a_4(x)dx$  при условии  $\delta_1 + \delta_2 = \gamma$ ,  $\delta_1 \geq 0$ ,  $\delta_2 \geq 0$ . С учетом (6), (7) получаем, что  $f_2$  является квадратичной функцией от аргумента  $\delta_1$ :

$$f_2(\delta_1) = \beta_0 \delta_1^2 + \beta_1 \delta_1 + \beta_2,$$

$$\beta_0 = -\frac{2}{s(k+1)} \left\{ (2ks\omega_{1*} + 2s\omega_{2*} - s_{1*}\omega_{11*} - s_{20}\omega_{21*}) [2ks\omega_{1*} + 2s\omega_{2*} - s_{1*}\omega_{11*} - s_{2*}\omega_{21*} - s(k+1)]x_1 + \int_{x_1}^1 (2ks\omega_1 + 2s\omega_2 - s_1\omega_{12} - s_2\omega_{22}) \times \right.$$

$$\left. \times [2ks\omega_1 + 2s\omega_2 - s_1\omega_{12} - s_2\omega_{22} - s(k+1)]dx \right\},$$

$$\beta_1 = 4 \left( x_0 \left\{ (h-\gamma)(2s\omega_{2*} - s_{2*}\omega_{21*}) - \frac{1}{s(k+1)} [sh - \gamma(2s\omega_{2*} - s_{2*}\omega_{21*})] \times \right. \right.$$

$$\left. \times (2ks\omega_{1*} + 2s\omega_{2*} - s_{1*}\omega_{11*} - s_{2*}\omega_{21*}) \right\} + \int_{x_1}^1 \left\{ (h-\gamma)(2s\omega_2 - s_2\omega_{22}) - \frac{1}{s(k+1)} [sh - \gamma(2s\omega_2 - s_2\omega_{22})] (2ks\omega_1 + 2s\omega_2 - s_1\omega_{12} - s_2\omega_{22}) \right\} dx \right),$$

$$\beta_2 = 2 \left( x_1 \left\{ sh^2 - \gamma(2h-\gamma)(2s\omega_{2*} - s_{2*}\omega_{21*}) - \frac{[sh - \gamma(2s\omega_{2*} - s_{2*}\omega_{21*})]^2}{s(k+1)} \right\} + \right.$$

$$\left. + \int_{x_1}^1 \left\{ sh^2 - \gamma(2h-\gamma)(2s\omega_2 - s_2\omega_{22}) - \frac{[sh - \gamma(2s\omega_2 - s_2\omega_{22})]^2}{s(k+1)} \right\} dx \right).$$

Здесь  $s_{i*}$ ,  $\omega_{i*}$ ,  $\omega_{ij*}$  ( $i, j = 1, 2$ ) – значения функций  $s_i$ ,  $\omega_i$ ,  $\omega_{ij}$  при  $x = x_1$ . Видно, что  $\beta_0$  не зависит от величины  $\gamma$ . Аналогично рассмотренному выше примеру  $\beta_0$  меньше нуля, а коэффициент  $\beta_1$  больше нуля и максимальная предельная нагрузка равна

$$p_0 = \frac{6}{(1-x_1)^2(2+x_1)} \left( \frac{\beta_1^2}{4\beta_0} - \frac{\beta_1}{2\beta_0} + \beta_2 \right), \quad (25)$$

при этом оптимальные размеры толщины верхнего и нижнего слоев равны

$$\delta_1 = -\frac{\beta_1}{2\beta_0}, \quad \delta_2 = \gamma + \frac{\beta_1}{2\beta_0}. \quad (26)$$

3. Если опорный контур расположен так, что выбор схемы предельного деформирования не очевиден, как это было в рассмотренных примерах, то следует решать задачи по определению максимума предельной нагрузки при разных схемах и для полученных оптимальных характеристик проверять, соответствуют ли они выбранной схеме деформирования, путем вычисления значений  $x_{12}$  и  $x_{1m}$  из (16), (22).

На рис. 8 приведены отношения оптимальных толщин верхнего  $\delta_1$  и нижнего  $\delta_2$  слоев в зависимости от суммарной толщины армированных слоев  $\gamma$ , полученные по формулам (24), (26). Считалось, что  $k = 1/17$ ,  $s = 1$ ,  $s_1 = 40$ ,  $s_2 = 50$ ,  $\mu_{10} = \pi/6$ ,

$\mu_{20} = \pi/5$ ,  $\omega_{10} = 0,25$ ,  $\omega_{20} = 0,2$ ,  $h = 1$ ,  $x_0 = 0,1$ . Кривые 1, 3 изображают случай армирования обоих слоев по закону (2), кривые 2, 4 – армирование обоих слоев по закону (3). Кривые 1, 2 изображают при  $x_1 = 0,9$  отношение  $\delta_1/\delta_2$  в случае деформирования по схеме 1, рассмотренном в примере 1. Кривые 3, 4 отображают при  $x_1 = 0,2$  отношение  $\delta_2/\delta_1$  в случае деформирования по схеме 3, рассмотренном в примере 2. Из рисунка видно, что если пластина шарнирно оперта около внешнего контура (кривые 1, 2;  $x_1 = 0,9$ ), то пластина будет более прочной, если нижний слой толще, чем верхний. Если же пластина оперта около жесткого центра (кривые 3, 4;  $x_1 = 0,2$ ), то пластина будет иметь максимум  $p_0$ , когда верхний слой толще нижнего.

На рис. 9 приведена максимальная предельная нагрузка  $p_0$ , полученная по формулам (23), (25), в зависимости от  $\gamma$ . Для расчетов кривых 1–4 были приняты те же значения характеристик армирования, что и для кривых 1–4 на рис. 8. Из рисунка видно, что максимальная предельная нагрузка  $p_0$  при армировании обоих слоев по закону (2) (кривые 1, 3) больше, чем при армировании по закону (3) (кривые 2, 4).

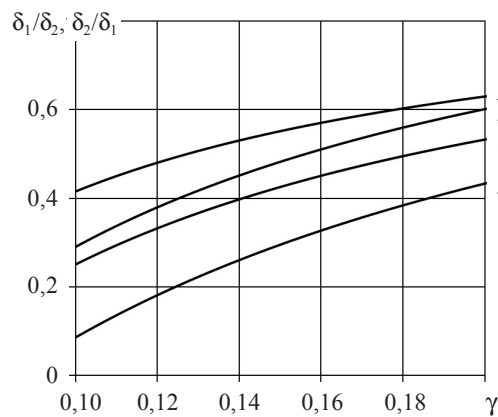


Рис. 8

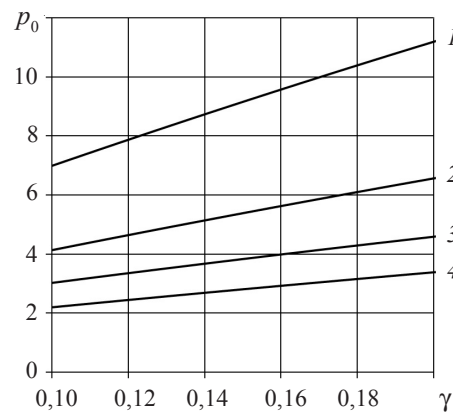


Рис. 9

### Заключение

На основе модели идеального жесткопластического материала построено точное решение задачи по определению главных моментов, скоростей деформаций и предельной нагрузки при изгибе трехслойных круглых пластин, имеющих разную структуру углового армирования в верхнем и нижнем слоях. Пластины шарнирно оперты по внутреннему круговому контуру, имеют в центральной части жесткую круглую вставку и находятся под действием равномерно распределенной поверхностной нагрузки. Условие пластичности в плоскости главных моментов принято в виде прямоугольника, полученного на основе структурной модели армированного слоя с одномерным напряженным состоянием в волокнах с учетом разносопротивляемости материалов фаз композиции. Показано, что в зависимости от расположения опоры пластины могут деформироваться по трем схемам. Для всех схем получены условия их реализации, определены поля главных моментов и скорости деформаций. Получены простые аналитические выражения для предельной нагрузки в зависимости от расположения опоры. Получены и численно решены алгебраические уравнения, которые определяют оптимальное расположение опорного контура, соответствующее наибольшему значению предельной нагрузки пластины и, следовательно, наименьшей ее повреждаемости при различном армировании. По-

лучено, что на оптимальной внутренней опоре образуется пластический шарнир. Показано, что изменение характеристик углового армирования и расположение внутреннего опорного контура существенно влияет на повреждаемость пластины. Простые аналитические формулы для предельной нагрузки позволяют определять оптимальные значения различных характеристик армирования пластины. Решена задача по определению оптимального соотношения толщин верхнего и нижнего армированного слоя при заданной суммарной их толщине, обеспечивающего максимальное значение предельной нагрузки. При этом показано, что если пластина шарнирно оперта на внешнем контуре или около него, то пластина будет более прочной, если нижний слой толще, чем верхний. Если же пластина шарнирно оперта около жесткого центра, то пластина будет иметь максимальную предельную нагрузку, когда верхний слой толще нижнего. Полученные решения могут быть использованы для оценки несущей способности трехслойных армированных железобетонных пластин.

#### Список литературы

1. Дехтярь А.С. Точечное опирание пластин сложного очертания. *Строительная механика и расчет сооружений*. 2010. №6. С. 56–59.
2. Yang W.H. How to optimally support a plate. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1981. V. 48. P. 207–209.
3. Оленев Г.М. Оптимальное расположение дополнительных опор к жесткопластическим круглым пластинкам в случае импульсного нагружения. *Уч. зап. Тартуского гос. ун-та*. 1983. Вып. 659. С. 30–41.
4. Дехтярь А.С. Оптимальное опирание квадратной пластины. *Прикладная механика*. 1991. Т. 27, №6. С. 107–110.
5. Дехтярь А.С. Оптимальное размещение колонн в зданиях, возводимых методом подъема. *Строительная механика и расчет сооружений*. 1989. №1. С. 14–17.
6. Lellep J., Polikarpus J. Optimal design of circular plates with internal supports. *WSEAS Transactions on Mathematics*. 2012. V. 11, No 3. P. 222–232.
7. Wang D. Optimization of support positions to minimize the maximal deflection of structures. *Int. J. Solids and Str.* 2004. V. 41. P. 7445–7458.
8. Wang D. Optimum design of intermediate support for raising fundamental frequency of a beam or column under compressive axial load. *J. Eng. Mech. ASCE*. 2014. V. 140, No 7. P. 04014040 (1–8).
9. Wang C.M., Liew K.M., Wang L., Aug K.K. Optimal locations of internal line supports for rectangular plates against buckling. *Structural Optimization*. 1992. No 4. P. 199–205.
10. Zhu Jihong, Zhang Weihong. Maximization of structural natural frequency with optimal support layout. *Structural Optimization*. 2006. V. 4. P. 462–469.
11. Mroz Z., Rozvany G.I.N. Optimal design of structures with variable support conditions. *J. of Optimization Theory and Applications*. 1975. V. 15, No 1. P. 85–101.
12. Романова Т.П. Оптимальное расположение полигональных внутренних опор к круглым жесткопластическим пластинам. *Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*. 2014. №3 (36). С. 94–105. DOI: 10.14498/vsgtu1312.
13. Романова Т.П. Оптимальное опирание жесткопластических одно- и двусвязных полигональных пластин. *Вестник Пермского национального исследовательского политехнического ун-та. Механика*. 2014. №4. С. 152–177. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.06.
14. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Моделирование поведения двусвязной жесткопластической пластины произвольной формы с внутренней криволинейной опорой при взрывных нагрузках. *Проблемы прочности и пластичности*. 2014. Вып. 76 (2). С. 122–133.
15. Вохмянин И.Т., Немировский Ю.В. Особенности продольно-поперечного изгиба трехслойных кольцевых пластинок с несимметричными структурами армирования. *Краевые задачи и математическое моделирование: Сб. трудов 8-й Всерос. науч. конф.* 1–3 дек. 2006 г.

Новокузнецк. Т. 1. Под общ. ред. В.О. Каледина. НФИ Кемеровский госуниверситет. Новокузнецк, 2006. С. 25–31.

16. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Расчет динамического деформирования трехслойных железобетонных круглых и кольцевых пластин. *Бетон и железобетон*. 2011. №6. С. 26–30.

17. Nemirovsky Ju.V., Resnikoff B.S. On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement. *Archiwum Inzynierii Ladowej*. 1975. Т. XXI, No 1. P. 57–67.

#### References

1. Dekhtyar' A.S. Tochechnoe opiranie plastin slozhnogo ochertaniya. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 2010. №6. S. 56–59.

2. Yang W.H. How to optimally support a plate. *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1981. V. 48. P. 207–209.

3. Olenev G.M. Optimal'noe raspolozhenie dopolnitel'nykh opor k zhestkoplasticheskim kruglym plastinkam v sluchae impul'snogo nagruzheniya. *Uch. zap. Tartuskogo gos. un-ta*. 1983. Vyp. 659. S. 30–41.

4. Dekhtyar' A.S. Optimal'noe opiranie kvadratnoy plastiny. *Prikladnaya mekhanika*. 1991. T. 27, №6. S. 107–110.

5. Dekhtyar' A.S. Optimal'noe razmeshchenie kolonn v zdaniyakh, vozvodimykh metodom pod"ema. *Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy*. 1989. №1. S. 14–17.

6. Lellep J., Polikarpus J. Optimal design of circular plates with internal supports. *WSEAS Transactions on Mathematics*. 2012. V. 11, No 3. P. 222–232.

7. Wang D. Optimization of support positions to minimize the maximal deflection of structures. *Int. J. Solids and Str.* 2004. V. 41. P. 7445–7458.

8. Wang D. Optimum design of intermediate support for raising fundamental frequency of a beam or column under compressive axial load. *J. Eng. Mech. ASCE*. 2014. V. 140, No 7. P. 04014040 (1–8).

9. Wang C.M., Liew K.M., Wang L., Aug K.K. Optimal locations of internal line supports for rectangular plates against buckling. *Structural Optimization*. 1992. No 4. P. 199–205.

10. Zhu Jihong, Zhang Weihong. Maximization of structural natural frequency with optimal support layout. *Structural Optimization*. 2006. V. 4. P. 462–469.

11. Mroz Z., Rozvany G.I.N. Optimal design of structures with variable support conditions. *J. of optimization theory and applications*. 1975. V. 15, No 1. P. 85–101.

12. Romanova T.P. Optimal'noe raspolozhenie polygonal'nykh vnutrennikh opor k kruglym zhestkoplasticheskim platinam. *Vestnik Samarskogo gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*. 2014. №3 (36). S. 94–105. DOI: 10.14498/vsgtu1312.

13. Romanova T.P. Optimal'noe opiranie zhestkoplasticheskikh odno- i dvusvyaznykh polygonal'nykh plastin. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo un-ta. Mekhanika*. 2014. №4. S. 152–177. DOI: 10.15593/perm.mech/2014.4.06.

14. Nemirovskiy Yu.V., Romanova T.P. Modelirovanie povedeniya dvusvyaznoy zhestkoplasticheskoy plastiny proizvol'noy formy s vnutrenney krivolineynoy oporoy pri vzryvnykh nagruzkakh. *Problemy prochnosti i plastichnosti*. 2014. Vyp. 76 (2). S. 122–133.

15. Vokhmyanin I.T., Nemirovskiy Yu.V. Osobennosti prodol'no-poperechnogo izgiba trekh-sloynnykh kol'tsevykh platinok s nesimmetrichnymi strukturami armirovaniya. Kraevye zadachi i matematicheskoe modelirovanie: *Sb. trudov 8-y Vseros. nauch. konf.* 1-3 dek. 2006 g. Novokuznetsk. T. 1. Pod obshch. red. V.O. Kaledina. NFI Kemerovskiy gosuniversitet. Novokuznetsk, 2006. S. 25–31.

16. Nemirovskiy Yu.V., Romanova T.P. Raschet dinamicheskogo deformirovaniya trekh-sloynnykh zhelezobetonnykh kruglykh i kol'tsevykh plastin. *Beton i zhelezobeton*. 2011. №6. S. 26–30.

17. Nemirovsky Ju.V., Resnikoff B.S. On limit equilibrium of reinforced slabs and effectiveness of their reinforcement. *Archiwum Inzynierii Ladowej*. 1975. Т. XXI, No 1. P. 57–67.

**CARRYING CAPACITY AND OPTIMIZATION OF THREE-LAYER REINFORCED  
CIRCULAR PLATE OF DIFFERENTLY RESISTANT MATERIALS,  
SUPPORTED ON THE INTERNAL CONTOUR**

**Romanova T.P.**

*Siberian Branch of Russian Academy of Sciences  
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
Novosibirsk, Russian Federation*

Within the model of an ideal rigid-plastic body the limit behavior of the hybrid composite circular plates is considered. The exact solution of the problem of bending is built for three-layer reinforced circular plates having different angular structure reinforcement at the top and bottom layer. The material of the middle layer and the binder in the upper and lower layers has a yield stress in compression much greater than in tension. In this case the condition of plasticity for the main moments that are based on the structural model of the reinforced layer with one-dimensional states of stress in the fibers has the form of a rectangle. The plates are hinge supported along the internal annular contour and have the rigid circular insert in the central part. The plates are under load uniformly distributed over the surface of the plate. It is shown that there are three schemes of limit deformation of the plate, depending on the location of the internal support. The conditions of implementation are defined for all schemes. The main moments and the velocities of the deflections of the plate are defined at different locations of the internal support. The simple analytic expressions are obtained for the limit load. The optimal location of support is determined. The optimal support is such support, at which the plate has a maximum limit load. It is shown that the optimal position of the support corresponds to the formation of plastic hinge on it. The optimum thickness ratio of the upper and lower layers of the plate for a given total thickness is determined, which corresponds to the maximum load limit.

*Keywords:* rigid-plastic model, hybrid composite plate, differently resistant materials, corner reinforcement, three-layer plate, internal support, rigid insert, limit load, optimal location of support.