

УДК 539.3

## ОПТИМАЛЬНОЕ АРМИРОВАНИЕ УПРУГИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ МИНИМИЗАЦИИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ЖЕСТКОСТИ ПРИ ИЗОТЕРМИЧЕСКОМ НАГРУЖЕНИИ В ПЛОСКОСТИ\*

© 2015 г.

Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича  
СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

lab4nemir@rambler.ru

*Поступила в редакцию 19.05.2015*

Из условия стационарности расширенного функционала свободной энергии получены необходимые соотношения, характеризующие оптимальное армирование термоупругих пластин, нагруженных в плоскости. Расширенный функционал строится на основе использования неопределенных множителей Лагранжа при дополнительных ограничениях, соответствующих фиксированным расходам арматуры каждого семейства и условиям постоянства поперечных сечений волокон. Рассматриваются два варианта структурной модели композита: жесткий и мягкий. Показано, что в рамках обоих вариантов модели одно из условий оптимальности соответствует требованию армирования пластины по траекториям главных деформаций, а второе условие оптимальности в рамках жесткого варианта структурной модели соответствует требованию равнонапряженности арматуры при изотермическом нагружении пластины. В случае же использования высокомодульной арматуры в рамках мягкого варианта структурной модели требование равнонапряженности волокон приводит к рациональному проекту, близкому к оптимальному. Предложен полуобратный метод решения сформулированных оптимизационных задач, на основе которого построен оптимальный проект армирования эксцентрической кольцевой пластины, нагруженной разным давлением на внутреннем и внешнем контурах.

*Ключевые слова:* оптимальное армирование, минимум интегральной жесткости, пластины, термоупругость, траектории главных деформаций, равнонапряженное армирование.

Создание современных конструкций аэрокосмического назначения из композиционных материалов невозможно без оптимизации их как по форме, так и по структуре армирования [1, 2]. При проектировании элементов конструкций максимальной жесткости с фиксированным расходом материала наиболее продуктивным является интегральный подход, когда в качестве меры жесткости используется потенциальная энергия деформаций изделия или ее аналоги. Эффективность такого подхода заключается в относительной простоте и естественности вывода условий оптимальности.

---

\* Выполнено при поддержке РФФИ (грант 14-01-00102-а).

Вопросы оптимизации по критерию интегральной жесткости стержней и пластин с ребрами жесткости и подкрепленными отверстиями, выполненных из однородных материалов, рассматривались, например, в [3], где приведен и обширный обзор работ по этой тематике. Проблема определения наилучших структур армирования на основе этого критерия оптимальности находится, по сути, на стадии становления. Так, в [1, 4] определены оптимальные структуры армирования только для безмоментных оболочек (в рамках нитяной структурной модели) и пластин, нагруженных в плоскости, без учета теплового воздействия. Достаточно подробные обзоры работ по тематике оптимального и рационального армирования тонкостенных элементов конструкций, выполненных на основе разных критериев оптимального проектирования, приведены в [5, 6].

Так как изделия аэрокосмического назначения в процессе эксплуатации испытывают интенсивное тепловое воздействие, то при осуществлении их оптимизации необходимо учитывать и наличие температурных полей в них. В связи с этим настоящее исследование посвящено получению необходимых условий оптимальности структур армирования на основе критерия интегральной жесткости волокнистых пластин заданной геометрии при изотермическом и силовом их нагружении в плоскости.

Рассмотрим в декартовой системе координат  $x_1, x_2$  волокнистую пластину постоянной толщины, занимающую в плане область  $G$ , ограниченную контуром  $\Gamma$ . Пластина армирована в своей плоскости  $K$  семействами волокон по криволинейным траекториям. По толщине конструкции структура композиции предполагается квазиоднородной, причем она характеризуется плотностью  $\omega_k$  и углом  $\psi_k$  (отсчитываемым от направления  $x_1$ ) армирования волокнами  $k$ -го семейства ( $k = 1, 2, \dots, K$ ).

Для описания термоупругого поведения такой пластины используем структурную модель с одномерным напряженным состоянием в волокнах [7], в рамках которой получаем следующие выражения для осредненных напряжений в композиции:

$$\bar{\sigma}_{ij} = a\sigma_{ij} + \sum_{k=1}^K \sigma_k \omega_k l_i^{(k)} l_j^{(k)}, \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

где

$$\sigma_{ii} = D(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj} - \alpha(1 + \nu)\theta), \quad \sigma_{ij} = D(1 - \nu)\varepsilon_{ij}, \quad \varepsilon_{im} = (u_{i,m} + u_{m,i})/2, \\ \sigma_k = E_k(\varepsilon_k - \alpha_k\theta), \quad \varepsilon_k = \varepsilon_{11}(l_1^{(k)})^2 + \varepsilon_{22}(l_2^{(k)})^2 + 2\varepsilon_{12}l_1^{(k)}l_2^{(k)}, \quad (2)$$

$$l_1^{(k)} = \cos \psi_k, \quad l_2^{(k)} = \sin \psi_k, \quad D = E/(1 - \nu^2), \quad k = \overline{1, K}, \quad j = 3 - i, \quad i, m = 1, 2;$$

$$a = \text{const} \quad (0 < a < 1); \quad (3)$$

$$a = 1 - \sum_{k=1}^K \omega_k; \quad (4)$$

$\sigma_{ij}$  – напряжения в изотропном связующем материале (соотношения для  $\sigma_{ij}$  в (2) записаны для случая плоского напряженного состояния, при соответствующем пересчете упругих постоянных для связующего они будут справедливы и при плоской деформации [8]);  $\varepsilon_{ij}, u_i$  – деформации и перемещения точек пластины;  $\sigma_k, \varepsilon_k$  – продольные напряжение и деформация в волокне  $k$ -го семейства;  $E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала связующего;  $E_k$  – модуль Юнга арматуры  $k$ -го семейства;  $\alpha, \alpha_k$  – коэффициенты линейного температурного расширения материала

лов связующего и волокон  $k$ -го семейства;  $\theta$  – отклонение текущей температуры от температуры естественного состояния пластины; индекс после запятой означает частное дифференцирование по соответствующей переменной  $x_i$ . В случае использования равенства (4) (мягкий вариант структурной модели [9])  $a$  – относительное объемное содержание связующего в представительном элементе композиции; в случае же использования предположения (3) (жесткий вариант модели [9])  $a$  – некоторая постоянная, характеризующая вклад связующего материала в средние напряжения в композиции, например  $a$  может рассматриваться как интенсивность прослоек связующего между элементарными армированными слоями [7]; кроме того, при использовании соотношения (3)  $a$  может рассматриваться и как параметр настройки структурной модели [10].

Из теории упругости известно, что при фиксированной структуре материала (при заданных параметрах армирования  $\omega_k, \Psi_k$ ) и неварьируемых нагрузках и температуре свободная энергия в теле фиксированной формы достигает минимального значения [8]. В соответствии с этим будем разыскивать такие структуры армирования, которые обеспечивают стационарное значение свободной энергии композитной пластины (оптимизация по критерию интегральной жесткости [3]) при условии, что расход арматуры каждого семейства волокон фиксирован:

$$\iint_G \omega_k dS = \Omega_k = V_k/V = \text{const} > 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad (5)$$

где  $dS$  – элемент площади пластины в плане;  $V_k, V$  – объемное содержание волокон  $k$ -го семейства и объем пластины.

Таким образом, на основании вышеизложенного, учитывая соотношения (1), (2), будем разыскивать стационарное значение следующего функционала:

$$J = F_0 + \sum_{k=1}^K F_k - A + \sum_{k=1}^K \lambda_k \left( \iint_G \omega_k dS - \Omega_k \right), \quad (6)$$

где

$$F_0 = \frac{1}{2} \iint_G a \left[ D(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + 2(1-\nu)\varepsilon_{12}^2) - 2\gamma\theta(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) \right] dS, \quad (7)$$

$$F_k = \frac{E_k}{2} \iint_G \omega_k (\varepsilon_k^2 - 2\alpha_k \theta \varepsilon_k) dS \quad (k = \overline{1, K}), \quad A = \oint_{\Gamma} (p_1 u_1 + p_2 u_2) d\Gamma, \quad \gamma = \frac{E\alpha}{1-\nu} = \text{const};$$

$p_i (i = 1, 2)$  – компоненты внешней контурной нагрузки (объемные нагрузки не учитываются);  $\lambda_k$  – неопределенные множители Лагранжа, причем  $\lambda_k = \text{const}$ .

Используя дифференциальные соотношения Коши (см. (2)), из равенств (6), (7) можно исключить деформации  $\varepsilon_{ij}$ , тогда, согласно принятому критерию оптимального проектирования, первая вариация функционала  $J$  равна нулю. Варьирование функционала (6) по перемещениям  $u_i$  с учетом соотношений (2), (7) приводит к уравнениям равновесия и граничным условиям в перемещениях [3]:

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 (C_{ijml} u_{m,l})_{,j} = \sum_{j=1}^2 (B_{ij} \theta)_{,j}, \quad i = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in G; \quad (8)$$

$$\sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^2 \sum_{l=1}^2 n_j C_{ijml} u_{m,l} = p_i + \sum_{j=1}^2 n_j B_{ij} \theta, \quad i = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_{\sigma}; \quad (9)$$

$$u_i = u_i^0, \quad i = 1, 2, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma_u, \quad (10)$$

где, согласно [7], с учетом (2)

$$\begin{aligned} C_{iii} &= aD + \sum_{k=1}^K \omega_k E_k (l_i^{(k)})^4, & C_{ijj} &= \sum_{k=1}^K \omega_k E_k (l_i^{(k)})^3 l_j^{(k)}, \\ C_{ijj} &= \frac{aD}{2}(1-\nu) + \sum_{k=1}^K \omega_k E_k (l_i^{(k)})^2 (l_j^{(k)})^2, & C_{ijj} &= aD\nu + \sum_{k=1}^K \omega_k E_k (l_i^{(k)})^2 (l_j^{(k)})^2, \\ B_{ii} &= a(1+\nu)D\alpha + \sum_{k=1}^K \omega_k E_k \alpha_k (l_i^{(k)})^2, & B_{ij} &= \sum_{k=1}^K \omega_k E_k \alpha_k l_i^{(k)} l_j^{(k)}, \quad j = 3-i, \quad i = 1, 2; \end{aligned} \quad (11)$$

$n_j$  – компоненты единичного вектора внешней нормали к контуру  $\Gamma$  ( $n_1^2 + n_2^2 = 1$ );  $u_i^0$  – заданные на контуре перемещения;  $\Gamma_\sigma, \Gamma_u$  – части контура  $\Gamma$  ( $\Gamma_\sigma \cup \Gamma_u = \Gamma$ ), на которых заданы статические (9) и кинематические (10) граничные условия.

Варьирование функционала (6) с учетом (2) по углам армирования  $\psi_k$  приводит к соотношениям

$$\iint_G \omega_k (\varepsilon_k - \alpha_k \theta) \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \psi_k} \delta \psi_k dS = 0, \quad k = \overline{1, K}. \quad (12)$$

Так как вариации  $\delta \psi_k$  произвольны, то из (12) следуют три равенства:

$$\omega_k = 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad (x_1, x_2) \in G; \quad (13)$$

$$\varepsilon_k - \alpha_k \theta = 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad (x_1, x_2) \in G; \quad (14)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \psi_k} = (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \sin 2\psi_k + 2\varepsilon_{12} \cos 2\psi_k = 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad (x_1, x_2) \in G. \quad (15)$$

Равенство (13) означает, что армирование  $k$ -м семейством волокон отсутствует, поэтому соотношение (13) не представляет практического интереса. Согласно (2), равенство (14) означает отсутствие напряжения в арматуре  $k$ -го семейства ( $\sigma_k = 0$ ). Это условие противоречит самой идее создания армированной пластины, то есть соотношение (14) также не представляет интереса.

Равенства (15) означают, что в рамках используемой структурной модели в оптимальном проекте траектории армирования совпадают с траекториями главных деформаций в композитной пластине [8]. Следовательно, при таком оптимальном проектировании, по-видимому, нецелесообразно использование более двух семейств армирующих волокон ( $K \leq 2$ ), уложенных в плоскости пластины.

При варьировании функционала (6) по плотности армирования  $\omega_k$  целесообразно отдельно рассматривать случаи (3) и (4). Сначала рассмотрим жесткий вариант структурной модели (см. (3)). При варьировании (6) по  $\omega_k$  с учетом (2), (3), (7) получим

$$\iint_G [E_k (0,5\varepsilon_k^2 - \alpha_k \theta \varepsilon_k) + \lambda_k] \delta \omega_k dS = 0, \quad k = \overline{1, K}. \quad (16)$$

Так как вариации  $\delta \omega_k$  произвольны, то из (16) следует

$$E_k (0,5\varepsilon_k^2 - \alpha_k \theta \varepsilon_k) = -\lambda_k = \text{const}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (x_1, x_2) \in G \quad (a = \text{const}). \quad (17)$$

Здесь следует напомнить, что функционал (6) был получен в предположении, что при варьировании функций  $u_i, \omega_k, \psi_k$  температура  $\theta$  в теле не изменяется. Однако

при варьировании структуры армирования (параметров  $\omega_k, \Psi_k$ ) в рассматриваемом стационарном случае температура остается неизменной только при отсутствии внутренних источников тепла и при двух вариантах тепловых граничных условий: 1) всюду на поверхности пластины задан нулевой тепловой поток – термоизоляция (задача Неймана); 2) всюду на поверхности пластины задана постоянная температура  $\theta_0 = \text{const}$  [11]. (Возможно и задание на одной части поверхности пластины граничных условий  $\theta_0 = \text{const}$ , а на другой части – термоизоляции.) В обоих этих случаях при любых структурах армирования (любых  $\omega_k, \Psi_k$ ) температура в пластине является постоянной

$$\theta = \theta_0 = \text{const}, \quad (x_1, x_2) \in G. \quad (18)$$

Таким образом, полученные необходимые условия оптимального армирования справедливы только при изотермическом и силовом (при отсутствии массовых нагрузок) нагружении пластины в ее плоскости.

Из равенства (17) с учетом (2), (18) следует, что при использовании жесткого варианта структурной теории (см. (3))  $\varepsilon_k = \text{const}$ ,  $\sigma_k = \text{const}$  ( $k = \overline{1, K}$ ), то есть в оптимальном проекте арматура должна быть равномерно напряжена.

Отметим, что ранее условие равномерно напряженности арматуры как необходимое условие оптимального проектирования для безмоментных оболочек в рамках нитяной модели было получено, например, в [1], а для пластин, нагруженных в плоскости, – в [4], но без учета теплового воздействия.

В общем случае тепловых граничных условий, не обеспечивающих выполнения равенства (18), температурное поле в пластине будет непостоянным ( $\theta \neq \text{const}$ ), но тогда из (2), (17) следует, что условие равномерно напряженности волокон не является необходимым условием оптимальности структуры армирования по критерию максимальной интегральной жесткости. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки настоящего исследования, так как требует привлечения соотношений структурной теории теплопроводности [12].

Если рассматривается мягкий вариант структурной модели (см. (1), (2), (4)), который можно трактовать как модель, описывающую термоупругое поведение композиции с неидеальной адгезией между арматурой и связующим [10], то при варьировании (6) по  $\omega_k$  с учетом (2), (4), (7) вместо (16) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \iint_G \{ E_k (\varepsilon_k^2 - 2\alpha_k \theta \varepsilon_k) - D [\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2 + 2\nu \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + 2(1-\nu) \varepsilon_{12}^2] + \\ + 2\gamma \theta (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + 2\lambda_k \} \delta \omega_k dS = 0, \quad k = \overline{1, K}. \end{aligned}$$

Отсюда следует необходимое условие оптимальности:

$$\begin{aligned} E_k (0,5\varepsilon_k^2 - \alpha_k \theta \varepsilon_k) - \frac{E}{1-\nu^2} [0,5(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \nu \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + (1-\nu) \varepsilon_{12}^2] + \\ + \frac{E\alpha}{1-\nu} \theta (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) = -\lambda_k = \text{const}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (x_1, x_2) \in G. \quad (19) \end{aligned}$$

Равенство (19) даже при выполнении условия (18) не эквивалентно требованию равномерно напряженности арматуры (17). Однако при использовании высокомодульной арматуры условие равномерно напряженности волокон (17) и в этом случае (см. (4)) может рассматриваться как рациональное, обеспечивающее близость к оптимальному проекту. Действительно, для композиций с высокомодульной арматурой (стекло-,

угле-, боропластики) отношение  $E/E_k$  является малым параметром порядка 0,01 [13, 14], поэтому, разделив (19) на  $E_k$ , выделим во втором и третьем слагаемых левой части сомножитель с малым параметром  $E/E_k$ . Пренебрегая этими слагаемыми, приближенно получим равенство (17). Следовательно, в рамках мягкого варианта структурной теории условие равнонапряженности высоко модульной арматуры (17) приводит к проектам, близким к оптимальным по критерию максимума интегральной жесткости. Для уточнения этого решения можно использовать методы теории возмущений [15], используя в качестве малых параметров отношения  $E/E_k$  ( $k = \overline{1, K}$ ).

Согласно (17), в рамках жесткого варианта структурной модели (см. (3)) неопределенный множитель Лагранжа  $\lambda_k$  имеет смысл удельной свободной энергии арматуры  $k$ -го семейства, взятой с противоположным знаком. В рамках мягкого варианта структурной теории (см. (4)), согласно (19),  $\lambda_k$  – разность удельных свободных энергий в арматуре  $k$ -го семейства и связующем, взятая с противоположным знаком. Значения постоянных  $\lambda_k$  в процессе решения оптимизационной задачи должны быть получены такими, чтобы выполнялись равенства (5) с заданными величинами  $\Omega_k$  ( $k = \overline{1, K}$ ).

Следует отметить, что полученные результаты справедливы лишь в случае, когда размеры поперечных сечений волокон переменны вдоль траекторий армирования. Если же учитываются особенности современных технологий создания композитных пластин с использованием волокон постоянного поперечного сечения, то необходимо использовать дополнительные равенства [5]:

$$(\omega_k \cos \psi_k)_{,1} + (\omega_k \sin \psi_k)_{,2} = 0, \quad k = \overline{1, K}. \quad (20)$$

В этом случае вместо (6) с учетом (20) необходимо использовать расширенный функционал

$$J = F_0 + \sum_{k=1}^K F_k - A + \sum_{k=1}^K \lambda_k \left( \iint_G \omega_k dS - \Omega_k \right) + \sum_{k=1}^K \iint_G \mu_k [(\omega_k \cos \psi_k)_{,1} + (\omega_k \sin \psi_k)_{,2}] dS, \quad (21)$$

где  $\mu_k = \mu_k(x_1, x_2)$  – дополнительные неопределенные множители Лагранжа.

Варьирование функционала (21) с учетом (2), (7) по перемещениям  $u_i$  по-прежнему приводит к уравнениям равновесия (8) и граничным условиям (9), (10) при выполнении равенств (11). Варьирование (21) по параметрам армирования  $\omega_k, \psi_k$  дает новые соотношения. Так, при использовании жесткого варианта структурной модели (см. (3)) получим:

$$\begin{aligned} & \iint_G \{ [E_k(0,5\varepsilon_k^2 - \alpha_k \theta \varepsilon_k) + \lambda_k] \delta \omega_k + \mu_k [(\delta \omega_k \cos \psi_k)_{,1} + (\delta \omega_k \sin \psi_k)_{,2}] \} dS = \\ & = \iint_G \{ [E_k(0,5\varepsilon_k^2 - \alpha_k \theta \varepsilon_k) + \lambda_k] \delta \omega_k + (\delta \omega_k \mu_k \cos \psi_k)_{,1} + (\delta \omega_k \mu_k \sin \psi_k)_{,2} - \\ & - \delta \omega_k \mu_{k,1} \cos \psi_k - \delta \omega_k \mu_{k,2} \sin \psi_k \} dS = \iint_G [E_k(0,5\varepsilon_k^2 - \alpha_k \theta \varepsilon_k) + \lambda_k - \mu_{k,1} \cos \psi_k - \\ & - \mu_{k,2} \sin \psi_k] \delta \omega_k dS + \oint_{\Gamma} \mu_k (n_1 \cos \psi_k + n_2 \sin \psi_k) \delta \omega_k d\Gamma = 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad (22) \end{aligned}$$

где использовано преобразование Гаусса – Остроградского.

Из равенства (22) в силу произвольности вариации  $\delta\omega_k$  получаем необходимые условия стационарности функционала (21):

$$E_k(0,5\varepsilon_k^2 - \alpha_k\theta\varepsilon_k) - \mu_{k,1}\cos\psi_k - \mu_{k,2}\sin\psi_k = -\lambda_k = \text{const}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad (23)$$

$$\mu_k \cos(\psi_k - \beta) = 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad (24)$$

где  $\beta$  – угол, задающий направление внешней нормали к контуру  $\Gamma$  ( $n_1 = \cos \beta$ ,  $n_2 = \sin \beta$ ).

Выполнение равенств (24) возможно в двух случаях:

$$\mu_k = 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad (25)$$

$$\cos(\psi_k - \beta) = 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma. \quad (26)$$

Соотношение (26) означает, что траектория армирования волокном  $k$ -го семейства на  $\Gamma$  полностью совпадает с контуром  $\Gamma$  либо контур  $\Gamma$  является огибающей семейства траекторий армирования  $k$ -го семейства, но, как показано в [5], при выполнении условий (20) в последнем случае  $\omega_k \rightarrow \infty$  при  $(x_1, x_2) \in \Gamma$ . Однако решение оптимизационной задачи должно удовлетворять физическим ограничениям

$$\omega_k > 0, \quad \sum_{k=1}^K \omega_k \leq \omega_*, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad (27)$$

где  $\omega_*$  – предельно допустимая суммарная плотность армирования (на практике  $\omega_* \approx 0,7$  [13, 14]). В силу последнего неравенства (27) траектории волокон постоянного поперечного сечения не могут иметь огибающей [5], поэтому равенство (26) возможно только в том случае, когда одна из траекторий армирования волокном  $k$ -го семейства полностью совпадает с контуром  $\Gamma$ . Например, для кольцевой пластины таким свойством обладают траектории армирования окружного семейства волокон. Следовательно, в общем случае на контуре  $\Gamma$  должны выполняться равенства (25).

Варьирование функционала (21) по  $\psi_k$  приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} & \iint_G \left\{ E_k \omega_k (\varepsilon_k - \alpha_k \theta) \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \psi_k} \delta \psi_k + \mu_k [(-\omega_k \delta \psi_k \sin \psi_k)_{,1} + (\omega_k \delta \psi_k \cos \psi_k)_{,2}] \right\} dS = \\ & = \iint_G \left\{ E_k \omega_k (\varepsilon_k - \alpha_k \theta) \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \psi_k} \delta \psi_k + (-\mu_k \omega_k \delta \psi_k \sin \psi_k)_{,1} + (\mu_k \omega_k \delta \psi_k \cos \psi_k)_{,2} + \right. \\ & \quad \left. + \mu_{k,1} \omega_k \delta \psi_k \sin \psi_k - \mu_{k,2} \omega_k \delta \psi_k \cos \psi_k \right\} dS = \\ & = \iint_G \omega_k \left[ E_k (\varepsilon_k - \alpha_k \theta) \frac{\partial \varepsilon_k}{\partial \psi_k} + \mu_{k,1} \sin \psi_k - \mu_{k,2} \cos \psi_k \right] \delta \psi_k dS + \\ & \quad + \oint_{\Gamma} \mu_k \omega_k (-n_1 \sin \psi_k + n_2 \cos \psi_k) \delta \psi_k d\Gamma = 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad (28) \end{aligned}$$

где вновь использовано преобразование Гаусса – Остроградского.

Из равенств (28) следуют необходимые условия стационарности функционала  $J$  (13), (25), а также (см. (2), (15))

$$E_k(\varepsilon_k - \alpha_k \theta)[(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11}) \sin 2\psi_k + 2\varepsilon_{12} \cos 2\psi_k] + \mu_{k,1} \sin \psi_k - \mu_{k,2} \cos \psi_k = 0,$$

$$k = \overline{1, K}, \quad (x_1, x_2) \in G; \quad (29)$$

$$\sin(\psi_k - \beta) = 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad (x_1, x_2) \in \Gamma, \quad (30)$$

причем равенство (13) выполняется не только в области  $G$ , но и на контуре  $\Gamma$ .

Как было показано, условие (13) с практической точки зрения не представляет интереса, поэтому далее его не рассматриваем. Равенство (30) означает, что траектории армирования волокон  $k$ -го семейства подходят к контуру  $\Gamma$  по нормальным направлениям. Например, в случае кольцевой пластины этому требованию удовлетворяют волокна радиального семейства. Следовательно, по-прежнему в общем случае на контуре  $\Gamma$  должны выполняться равенства (25).

Нетрудно видеть, что при выполнении условия (15) краевая задача (25), (29) относительно функции  $\mu_k$  имеет тривиальное решение ( $\mu_k \equiv 0$ ). При этом из (23) следует  $\varepsilon_k = \text{const}$ , а из (2) с учетом (18) вытекает  $\sigma_k = \text{const}$  ( $k = \overline{1, K}$ ). Следовательно, одно из возможных решений задачи оптимального армирования пластин волокнами постоянного поперечного сечения обладает тем свойством, что траектории армирования по-прежнему совпадают с траекториями главных деформаций и армирующие волокна равнонапряжены. Однако может оказаться, что это не единственное решение такой оптимизационной задачи (например, если вместо (25) используются краевые условия (26), (30)), то есть могут существовать и оптимальные проекты, в которых арматура не является равнонапряженной, а траектории армирования не совпадают с траекториями главных деформаций (при этом  $\mu_k \neq 0$ ).

При использовании мягкого варианта структурной модели (см. (4)) по аналогии с (19) вместо (23) получим

$$E_k(0,5\varepsilon_k^2 - \alpha_k \theta \varepsilon_k) - \frac{E}{1-\nu^2}[0,5(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{22}^2) + \nu\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + (1-\nu)\varepsilon_{12}^2] + \frac{E\alpha}{1-\nu}\theta(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) - \mu_{k,1} \cos \psi_k - \mu_{k,2} \sin \psi_k = -\lambda_k = \text{const}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (x_1, x_2) \in G, \quad (31)$$

причем справедливыми остаются равенства (24)–(26), (29), (30). Следовательно, согласно (25), (29), и в этом случае одно из решений оптимизационной задачи характеризуется тем, что траектории армирования совпадают с траекториями главных деформаций, а  $\mu_k \equiv 0$ . Однако в силу равенства (31) требование равнонапряженности волокон при этом не является необходимым условием оптимизации, но в случае высокомодульной арматуры, как и прежде, обеспечивает приближенное выполнение необходимого условия оптимальности (31), причем уровень напряжений в арматуре  $\sigma_k = \text{const}$  ( $k = \overline{1, K}$ ) должен быть подобран так, чтобы выполнялись ограничения (5).

Таким образом, в случае жесткого варианта структурной модели для решения оптимизационной задачи необходимо использовать уравнения (8), (15), (17) или (8), (23), (29) при граничных условиях (9), (10), (25), (26), (30) с учетом (3), (11); в случае мягкого варианта структурной модели используются уравнения (8), (15), (19) или (8), (29), (31) с учетом (4), (11) при тех же граничных условиях. Решение оптимизационной задачи должно удовлетворять физическим ограничениям (27).

Для построения решений соответствующих нелинейных краевых задач оптимального армирования пластин требуется разработка специальных методов их ин-



тегрирования. В ряде случаев для решения сформулированных оптимизационных задач можно использовать следующий полуобратный метод.

Согласно структурной модели (1), требование армирования по траекториям главных деформаций эквивалентно требованию армирования по траекториям главных осредненных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$ . Пусть из каких-то соображений известно статически допустимое поле осредненных напряжений в пластине  $\bar{\sigma}_{ij}$ , удовлетворяющее уравнениям равновесия и статическим граничным условиям. Зная  $\bar{\sigma}_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ), определим в каждой точке пластины угол  $\psi_1$ , задающий направление наибольшего из главных напряжений  $\bar{\sigma}_1$  [16]:

$$\operatorname{tg} \psi_1 = \frac{\bar{\sigma}_{12}}{\bar{\sigma}_1 - \bar{\sigma}_{22}}, \quad \psi_2 = \psi_1 + \frac{\pi}{2}, \quad (32)$$

причем главные напряжения определяются по формуле

$$\bar{\sigma}_i = \frac{1}{2} \left[ \bar{\sigma}_{11} + \bar{\sigma}_{22} - (-1)^i \sqrt{(\bar{\sigma}_{11} - \bar{\sigma}_{22})^2 + 4\bar{\sigma}_{12}^2} \right], \quad i = 1, 2. \quad (33)$$

Если найденные главные напряжения (33) в каждой точке пластины имеют один и тот же знак ( $\operatorname{sign} \bar{\sigma}_1 = \operatorname{sign} \bar{\sigma}_2$ ), нигде не равны нулю и не меняют знак при переходе от одной точки  $(x_1, x_2) \in G$  к другой, то, записав определяющие уравнения (1) с учетом (2) в системе координат, связанной с направлениями главных осредненных напряжений (32), в предположении  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ,  $K = 2$  получим

$$\bar{\sigma}_i = aD(1 + \nu)(\varepsilon_i - \alpha\theta) + \omega_i E_i (\varepsilon_i - \alpha_i \theta), \quad i = 1, 2, \quad (34)$$

где

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \operatorname{const}, \quad (35)$$

так как согласно условиям оптимальности (17) или (23) арматура предполагается равнонапряженной ( $\sigma_i = \operatorname{const}$ ,  $i = 1, 2$ ). Левые части в (34) известны всюду в пластине.

При выполнении равенств (35) условие совместности деформаций [8] удовлетворяется тождественно в силу того, что деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  являются главными деформациями в пластине.

Из равенств (34) с учетом (3) или (4) как из системы линейных алгебраических уравнений в каждой точке пластины  $(x_1, x_2) \in G$  можно определить плотности армирования  $\omega_i$  ( $i = 1, 2$ ), которые должны удовлетворять физическим ограничениям (27). При заданном уровне нагрева пластины (18) деформации арматуры должны быть подобраны так, чтобы выполнялись равенства (5). После выполнения всех этих условий задача оптимального армирования пластины будет полностью решена полуобратным методом.

Таким образом, например, могут быть получены простейшие решения для кольцевых пластин, нагруженных давлением на обоих контурах. Оптимальные проекты при этом имеют радиальную, окружную или радиально-окружную структуру армирования. Следовательно, в общем случае оптимизационная задача как обратная задача механики композитов может иметь неединственное решение [1]. Кроме того, оптимальные проекты можно получить и для скручиваемых кольцевых пластин, нагруженных только касательными уравновешенными контурными нагрузками. При этом траектории армирования представляют собой логарифмические спирали, направленные под углами  $\psi_k = \pm\pi/4$  ( $k = 1, 2$ ) к полярному радиусу, а деформации в арматуре, в отличие от (35), различны:  $\varepsilon_1 = -\varepsilon_2 = \operatorname{const}$ , но уравнение совместности по-прежнему тождественно выполняется.

В более сложных случаях необходимые согласно полуобратному методу статически определимые поля осредненных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$  могут быть получены на основе многочисленных известных решений плоской задачи теории упругости [8, 17, 18]. Так, на рис. 1 изображена кольцевая пластина, ограниченная эксцентрическими окружностями  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$ . На контурах заданы давления  $p_0$  и  $p_1$  соответственно, причем  $p_0 = 1,5p_1$ . Статически допустимое поле напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$  при этом определяется формулами, приведенными в [18, с. 204–206]. Расчеты по этим формулам показали, что в данном случае все требования, предъявляемые полуобратным методом решения оптимизационной задачи к напряженному состоянию  $\bar{\sigma}_{ij}$ , выполняются и структуру армирования можно определить, исходя из соотношений (32)–(35), где под  $\bar{\sigma}_{ij}$  следует понимать осредненные напряжения в композиции, вычисленные в биполярной системе координат. Осуществляя целевой выбор материалов фаз композиции [13, 14], по формулам (34) с учетом (3) или (4) определим в этой задаче и плотности армирования  $\omega_k$  при заданном уровне теплового воздействия (18). На рис. 1 изображены траектории оптимального армирования, рассчитанные по формулам (32), (33), которые при этом являются траекториями главных напряжений  $\bar{\sigma}_{ij}$ .

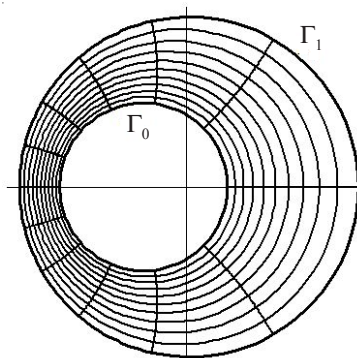


Рис. 1. Оптимальная структура армирования эксцентрической кольцевой пластины, нагруженной давлением на обоих контурах

В случае использования высокомодульной арматуры и мягкого варианта структурной модели (см. (4)) полученную структуру армирования можно считать рациональной в смысле близости к оптимальной по плотностям армирования структуре, траектории армирования при этом остаются теми же, что и изображенные на рисунке.

#### Список литературы

1. Баничук Н.В., Кобелев В.В., Рикардс Р.Б. *Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов*. М.: Машиностроение, 1988. 224 с.
2. Каниболотский М.А., Уржумцев Ю.С. *Оптимальное проектирование слоистых конструкций*. Новосибирск: Наука, 1989. 176 с.
3. Пустовой Н.В., Расторгуев Г.И. *Оптимальное проектирование стержней и подкрепленных пластин на основе минимизации энергии деформации*. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. 317 с.
4. Бушманов С.Б., Немировский Ю.В. Оптимальное армирование пластин при плоском напряженном состоянии. *Прикладная механика и техническая физика*. 1983. №5. С. 158–165.

5. Немировский Ю.В., Янковский А.П. *Рациональное проектирование армированных конструкций*. Новосибирск: Наука, 2002. 488 с.
6. Голушко С.К., Немировский Ю.В. *Прямые и обратные задачи механики упругих композитных пластин и оболочек вращения*. М.: Физматлит, 2008. 432 с.
7. Немировский Ю.В., Резников Б.С. *Прочность элементов конструкций из композитных материалов*. Новосибирск: Наука, 1986. 168 с.
8. Новацкий В. *Теория упругости*. М.: Мир, 1975. 872 с.
9. Немировский Ю.В. Уравнения изгиба и устойчивости армированных оболочек и пластин из вязкоупругого материала. *Динамика сплошной среды*. Институт гидродинамики СО АН СССР. 1970. Вып. 4. С. 50–63.
10. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Определение эффективных физико-механических характеристик гибридных композитов, перекрестно армированных трансверсально-изотропными волокнами, и сопоставление расчетных характеристик с экспериментальными данными. *Механика композиционных материалов и конструкций*. 2007. Т. 13, №1. С. 3–32.
11. Кудинов А.А. *Тепломассообмен*: Учеб. пособие. М.: ИНФРА-М, 2012. 375 с.
12. Немировский Ю.В., Янковский А.П. *Теплопроводность однородных и композитных тонкостенных конструкций*. Новосибирск: Изд-во «Арт-Авеню», 2008. 512 с.
13. *Композиционные материалы*: Справочник. Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наук. думка, 1985. 592 с.
14. *Композиционные материалы*: Справочник. В.В. Васильев, В.Д. Протасов, В.В. Болотин и др.; Под общ. ред. В.В. Васильева, Ю.М. Тарнопольского. М.: Машиностроение, 1990. 512 с.
15. Андрианов И., Аврейтевич Я. *Методы асимптотического анализа и синтеза в нелинейной динамике и механике деформируемого твердого тела*. М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. 276 с.
16. Феодосьев В.И. *Сопротивление материалов*: Учебник для вузов. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. 592 с.
17. Демидов С.П. *Теория упругости*. М.: Высш. школа, 1979. 432 с.
18. Уфлянд Я.С. *Биполярные координаты в теории упругости*. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 232 с.

#### References

1. Banichuk N.V., Kobelev V.V., Rikards R.B. *Optimizatsiya elementov konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov*. М.: Mashinostroenie, 1988. 224 s.
2. Kanibolotskiy M.A., Urzhumtsev Yu.S. *Optimal'noe proektirovanie sloistykh konstruksiy*. Novosibirsk: Nauka, 1989. 176 s.
3. Pustovoy N.V., Rastorguev G.I. *Optimal'noe proektirovanie sterzhney i podkreplennykh plastin na osnove minimizatsii energii deformatsii*. Novosibirsk: Izd-vo NGTU, 2002. 317 s.
4. Bushmanov S.B., Nemirovskiy Yu.V. Optimal'noe armirovanie plastin pri ploskom napryazhenno-m sostoyanii. *Prikladnaya Mekhanika i Tekhnicheskaya Fizika*. 1983. №5. S. 158–165.
5. Nemirovskiy Yu.V., Yankovskiy A.P. *Ratsional'noe proektirovanie armirovannykh konstruksiy*. Novosibirsk: Nauka, 2002. 488 s.
6. Golushko S.K., Nemirovskiy Yu.V. *Pryamye i obratnye zadachi mekhaniki uprugikh kompozitnykh plastin i obolochek vrashcheniya*. М.: Fizmatlit, 2008. 432 s.
7. Nemirovskiy Yu.V., Reznikov B.S. *Prochnost' elementov konstruksiy iz kompozitnykh materialov*. Novosibirsk: Nauka, 1986. 168 s.
8. Novatskiy V. *Teoriya uprugosti*. М.: Mir, 1975. 872 s.
9. Nemirovskiy Yu.V. Uravneniya izgiba i ustoychivosti armirovannykh obolochek i plastin iz vyazkouprugogo materiala. *Dinamika sploshnoy sredy*. Institut gidrodinamiki SO AN SSSR. 1970. Вып. 4. S. 50–63.
10. Nemirovskiy Yu.V., Yankovskiy A.P. Opredelenie effektivnykh fiziko-mekhanicheskikh kharakteristik gibridnykh kompozitov, perekrestno armirovannykh transversal'no-izotropnymi voloknami, i sopostavlenie raschetnykh kharakteristik s eksperimental'nymi dannymi. *Mekhanika*

*kompozitsionnykh materialov i konstruktsiy*. 2007. T. 13, №1. S. 3–32.

11. Kudinov A.A. *Teplomassoobmen*: Ucheb. posobie. M.: INFRA-M, 2012. 375 s.

12. Nemirovskiy Yu.V., Yankovskiy A.P. *Teploprovodnost' odnorodnykh i kompozitnykh tonkostennykh konstruktsiy*. Novosibirsk: Izd-vo «Art-Avenyu», 2008. 512 s.

13. *Kompozitsionnye materialy*: Spravochnik. Pod red. D.M. Karpinosa. Kiev: Nauk. dumka, 1985. 592 s.

14. *Kompozitsionnye materialy*: Spravochnik. V.V. Vasil'yev, V.D. Protasov, V.V. Bolotin i dr.; Pod obshch. red. V.V. Vasil'yeva, Yu.M. Tarnopol'skogo. M.: Mashinostroenie, 1990. 512 s.

15. Andrianov I., Avreytsevich Ya. *Metody asimptoticheskogo analiza i sinteza v nelineynoy dinamike i mekhanike deformiruemogo tverdogo tela*. M.–Izhevsk: Institut komp'yuternykh issledovaniy, 2013. 276 s.

16. Feodos'yev V.I. *Soprotivlenie materialov: Uchebnik dlya vuzov*. M.: MG TU im. N.E. Bauman, 1999. 592 s.

17. Demidov S.P. *Teoriya uprugosti*. M.: Vyssh. shkola, 1979. 432 s.

18. Uflyand Ya.S. *Bipolyarnye koordinaty v teorii uprugosti*. M.–L.: GITTL, 1950. 232 s.

**THE OPTIMAL REINFORCEMENT OF AN ELASTIC PLATE BASED  
ON THE MINIMIZATION OF THE INTEGRAL STIFFNESS  
UNDER ISOTHERMAL LOADING IN THE PLANE**

**Yankovskii A.P.**

*Siberian Branch of Russian Academy of Sciences  
Khristianovich Institute of Theoretical and Applied Mechanics,  
Novosibirsk, Russian Federation*

From the condition of stationarity of the extended functionality of free energy the ratio, characterizing the optimal reinforcement of thermoelastic plates loaded in-plane, are obtained. Expanded functional is obtained through the use of uncertain Lagrange multipliers under additional constraints corresponding to the fixed costs of reinforcement of each family and to the conditions of constancy of cross sections of fibers. Two versions of the structural model of the composite are considered: hard and soft. It is shown that under both variants of the model one of the conditions of optimality corresponds to the requirement of the reinforcement plate along the trajectories of the principal strains, and the second condition of optimality in the hard version of the structural model corresponds to the requirement of equal-stressed of reinforcement under isothermal loading of a plate. In the case of high-modulus reinforcement within the soft version of the structural model, the demand of equal-stressed of the fibers leads to efficient project close to optimal. Semi-inverse method is proposed to solve the formulated optimization problems. The optimal project of reinforcement for eccentric ring plate, loaded by different pressures on the inner and outer contours, is constructed on this basis.

*Keywords*: optimal reinforcement, minimum of integral rigidity, plate, thermoelasticity, trajectories of principal strains, equal-stressed reinforcement.