

УДК 539.3:534.1

## ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА ГИБКИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ В ПЛАНЕ ПЛАСТИН ПРИ ДЕЙСТВИИ ПРОДОЛЬНЫХ НАГРУЗОК\*

© 2015 г.

Крылова Е.Ю.<sup>1</sup>, Яковлева Т.В.<sup>1</sup>,  
Папкова И.В.<sup>2</sup>, Крысько В.А.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Научно-исследовательский институт механики  
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,  
Нижний Новгород, Российская Федерация

<sup>2</sup>Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина,  
Саратов, Российская Федерация

kat.krylova@bk.ru

Поступила в редакцию 09.07.2015

Изучены сложные колебания геометрически нелинейных прямоугольных в плане пластин с использованием кинематической гипотезы Кирхгофа. Пластины находятся под действием знакопеременной продольной нагрузки, действующей по их периметру. Задача в частных производных сводится к задаче для нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений методом конечных разностей с аппроксимацией второго порядка точности по пространственным переменным. По времени система дифференциальных уравнений решается методом Рунге – Кутты четвертого порядка точности. Исследуются сценарии перехода колебаний рассматриваемых пластин из гармонических в хаотические в зависимости от длины пластины. Показано, что колебания на частоте, соответствующей первой бифуркации Андронова – Хопфа, свойственны рассматриваемым оболочкам. Смена колебательных режимов в изучаемых динамических системах может происходить при фиксированных амплитуде и частоте внешней нагрузки с течением времени.

*Ключевые слова:* нелинейная динамика, прямоугольные в плане пластины, бифуркации, хаос, геометрическая нелинейность, вейвлет-анализ, фурье-анализ, сценарии перехода колебаний к хаосу, математическое моделирование.

### Введение

Анализ влияния силового нагружения на поведение механических систем – это перспективное, но чрезвычайно сложное направление научных исследований, поскольку изменение параметров механического нагружения является фактором, обуславливающим перестройку колебательных режимов динамических систем. Гибкие пластины (как самостоятельные элементы и как часть составных конструкций)

---

\* Выполнено при поддержке РФФИ (грант № 15-19-10039).

широко используются в авиационной и ракетно-космической технике, судо- и автомобилестроении, энергетическом и химическом машиностроении, жилищном и промышленном строительстве. В конструкциях ответственного назначения такие элементы подвергаются различным внешним нагрузкам. Поэтому возникает необходимость установления множества параметров воздействия, которые будут характеризовать безопасные и опасные режимы колебаний рассматриваемых систем.

Несмотря на более чем полувековую историю, вопросы моделирования сложной динамики механических систем остаются актуальными [1–5].

### Постановка задачи

Рассматривается математическая модель колебаний гибкой прямоугольной в плане пластины с постоянной жесткостью и плотностью под действием знакопеременной продольной нагрузки, действующей по ее периметру. Материал пластины изотропный и однородный. Математическая модель колебаний пластины, основывающаяся на гипотезах Кирхгофа – Лява, считается моделью первого приближения, но тем не менее она является достаточно точной для описания исследуемых процессов. В данном случае геометрическая нелинейность учитывается в форме Т. Кармана.

В прямоугольной системе координат трехмерная область имеет вид:  $\Omega = \{x_1, x_2, x_3 \mid (x_1, x_2) \in [0; a] \times [0; b], x_3 \in [-\delta, \delta]\}$  (рис. 1).

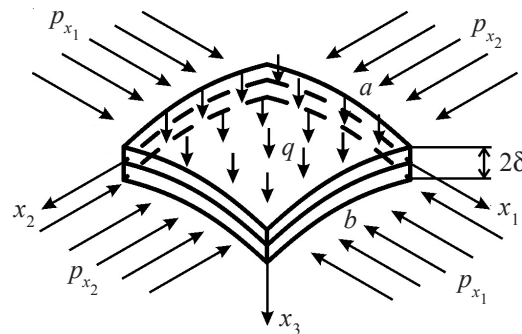


Рис. 1. Схема приложения нагрузки к пластине

Математическая модель колебаний пластины описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, записанных в безразмерном виде [6]:

$$\frac{1}{12(1-\mu^2)}(\nabla_\lambda^4 w) - L(w, F) - \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \varepsilon \frac{\partial w}{\partial t} - q(x_1, x_2, t) = 0,$$

$$\nabla_\lambda^4 F + \frac{1}{2}L(w, w) = 0, \quad (1)$$

где  $L(w, F)$ ,  $L(w, w)$  – известные нелинейные операторы;

$$\nabla_\lambda^4 = \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \lambda^2 \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2};$$

$w$  и  $F$  – функция прогиба и усилия соответственно;  $\mu$  – коэффициент Пуассона;  $\lambda = a/b$  ( $a$ ,  $b$  – размеры пластины в плане по  $x_1$  и  $x_2$  соответственно);  $\delta$  – толщина пластины;  $\gamma$  – удельный вес материала пластины.

Система (1) приведена к безразмерному виду с использованием следующих соотношений:

$$x_1 = a\bar{x}_1, \quad x_2 = b\bar{x}_2; \quad w = 2\delta\bar{w}; \quad F = E(2\delta)^2\bar{F}; \quad t = t_0\bar{t},$$

где  $t$  – время,  $t_0 = a/K$ ,  $K = \sqrt{Eg/\gamma}$ ,  $q = E(2\delta)^4/(a^2b^2)\bar{q}$  – внешнее нормальное давление;  $\varepsilon = (2\delta)\bar{\varepsilon}$  – коэффициент демпфирования среды,  $E$  – модуль упругости. Черточки над безразмерными параметрами в первом уравнении (1) для простоты опущены. К уравнениям (1) присоединяются граничные и начальные условия в зависимости от типа нагружения и закрепления пластины.

### Методы решения

Система (1) с учетом граничных и начальных условий сводится к нелинейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (СОДУ) методом конечных разностей с аппроксимацией  $O(c^2)$  по пространственным переменным. Первое уравнение нелинейной СОДУ по времени решается методом Рунге – Кутты четвертого порядка относительно функции прогиба. Выбор метода обоснован в статье [7]. Далее значения функции прогиба подставляются в правую часть второго уравнения системы. Второе уравнение системы (1) становится линейным и решается методом обратной матрицы относительно функции усилия на каждом шаге по времени. Число разбиений в методе конечных разностей (МКР)  $n \times n = 14 \times 14$ . Обоснование выбора количества разбиений МКР и достоверности получаемых результатов приведены в работе [8].

### Численные эксперименты

Проведен ряд численных экспериментов, направленных на выявление особенностей колебаний прямоугольных пластин под действием продольной знакопеременной нагрузки, действующей по границе, в зависимости от длины пластины. Нагрузка задавалась в виде  $p_{x_1} = p_{x_2} = p_0 \sin \omega_p t$ , где  $\omega_p, p_0$  – частота и амплитуда внешнего воздействия соответственно, колебания рассматривались на временном интервале  $t \in [0, 286]$ ,  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 0,3$ ,  $E = 2,1 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup> (сталь), на начальном интервале времени  $t \leq 0,001$  приложена малая нормальная нагрузка.

К системе (1) присоединялись неоднородные граничные условия опирания на гибкие несжимаемые (нерастяжимые) ребра [9]:

$$\begin{aligned} w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0, \quad F = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = p_{x_2} \quad \text{при } x_1 = 0, 1; \\ w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = 0, \quad F = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = p_{x_1} \quad \text{при } x_2 = 0, 1 \end{aligned} \quad (2)$$

и нулевые начальные условия  $w(x_1, x_2)|_{t=0} = 0$ ,  $(\partial w / \partial t)|_{t=0} = 0$ .

При исследовании колебаний результаты, полученные для центральной точки срединной плоскости пластины, распространяются на всю пластину.

Сигналы, получаемые в результате численных экспериментов при исследовании динамики распределенных механических систем, имеют амплитудно-временное представление. Но для понимания поведения динамических систем под действием той или иной нагрузки, для выявления причин того или иного явления необходима информация из частотной области сигнала. Долгое время для изучения час-

тотного наполнения сигналов использовалось преобразование Фурье, однако выяснилось, что этот аппарат хорошо подходит только для анализа стационарных сигналов, то есть таких, частотное наполнение которых не меняется с течением времени. Получаемые в результате исследований динамики нелинейных пластин сигналы зачастую имеют сложную структуру по временной оси. Применение вейвлет-анализа как инструмента исследования нелинейной динамики континуальных механических систем позволило выявить существенные, локализованные по времени, особенности сценариев перехода к хаосу колебаний рассматриваемых систем. Вейвлет-спектры позволяют утверждать, что конкретный сценарий может содержать в себе элементы всех трех классических сценариев. В качестве материнского вейвлета в работе был выбран вейвлет Gauss 32. Обоснование выбора вейвлета дано в работе [10].

Существуют три экспериментально подтвержденных сценария перехода колебаний из гармонических в хаотические.

В 1971 году Рюэль и Такенс [11] показали, что для перехода к хаосу достаточно очень небольшого числа бифуркаций Андронова – Хопфа. По сценарию Рюэля – Такенса – Ньюхауза переход в хаос осуществляется следующим образом: появляется новая линейно независимая частота и переход к хаосу осуществляется через серию линейных комбинаций линейно зависимых частот.

В 1978 году Фейгенбаум предложил универсальный механизм перехода к хаосу при бесконечной цепочке удвоения периода исходного движения [12, 13].

Третий сценарий перехода в хаос был предложен в 1989 году Помо и Манневилем [14]. Было установлено, что переход от периодических колебаний к хаосу может происходить скачком в результате одной-единственной бифуркации. Такой переход был назван жестким, он связан с явлением перемежаемости. С увеличением управляющего параметра количество хаотических всплесков возрастает, пока не наступит момент появления полностью хаотического сигнала. Это явление было открыто Помо и Манневилем при решении дифференциальных уравнений модели Лоренца.

В случае квадратной пластины был получен сценарий, содержащий в себе черты всех трех классических сценариев (табл. 1).

Таблица 1

Сценарий перехода к хаосу в случае квадратной пластины ( $\lambda = 1$ )

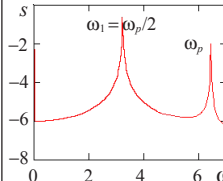
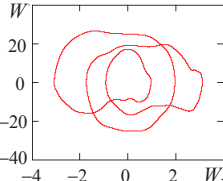
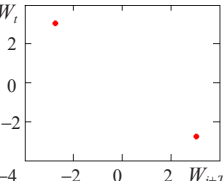
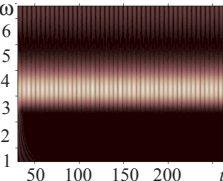
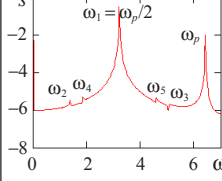
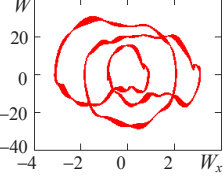
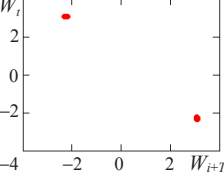
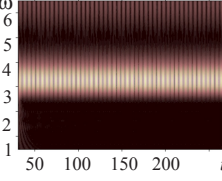
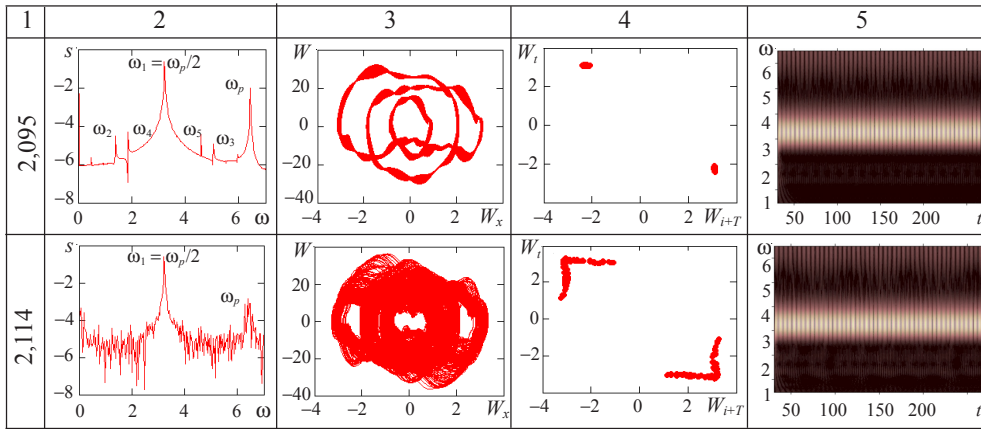
$p_0$	Спектр Фурье	Фазовый портрет	Сечение Пуанкаре	Вейвлет-спектр Gauss 32
1	2	3	4	5
2,0				
2,085				

Таблица 1 (продолжение)



В первом столбце таблицы указывается амплитуда внешней продольной нагрузки, во втором столбце представлены спектры Фурье колебаний центральной точки срединной плоскости пластины, в третьем столбце – фазовый портрет, в четвертом – сечение Пуанкаре, в пятом – вейвлет-спектр колебаний указанной точки. При значении амплитуды внешней нагрузки  $p_0 = 2$  появляется бифуркация удвоения периода (сценарий Фейгенбаума). С ростом управляющего параметра система переходит в хаос по сценарию Рюэля – Такенса, то есть последовательно появляются пары зависимых частот:  $\omega_i = \omega_p - \omega_{i+1}$ . Вейвлет-спектры иллюстрируют наличие перемежаемости (Помо – Манневиль). В данном случае сценарий Рюэля – Такенса можно назвать ведущим. В численном эксперименте с прямоугольной пластиной размером  $2 \times 1$  ( $\lambda = 2$ ) был получен модифицированный сценарий Фейгенбаума (табл. 2). Особенность сценария заключалась в том, что с ростом амплитуды внешней нагрузки бифуркации появлялись не на всем временном интервале и их интенсивность сильно менялась во времени. Первая бифуркация появляется при  $p_0 = 4,2$ , она хорошо видна на фурье-спектре; 2D-вейвлет-спектр, построенный по оси амплитуд до  $\omega_p = 4,6$ , «чувствует» ее лишь при  $p_0 = 4,59$ .

Таблица 2

Сценарий перехода к хаосу в случае прямоугольной пластины ( $\lambda = 2$ )

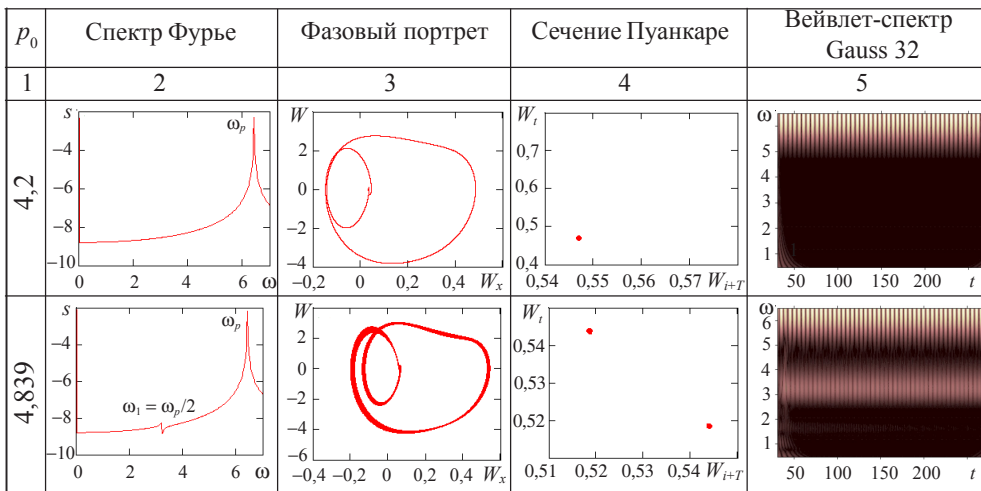
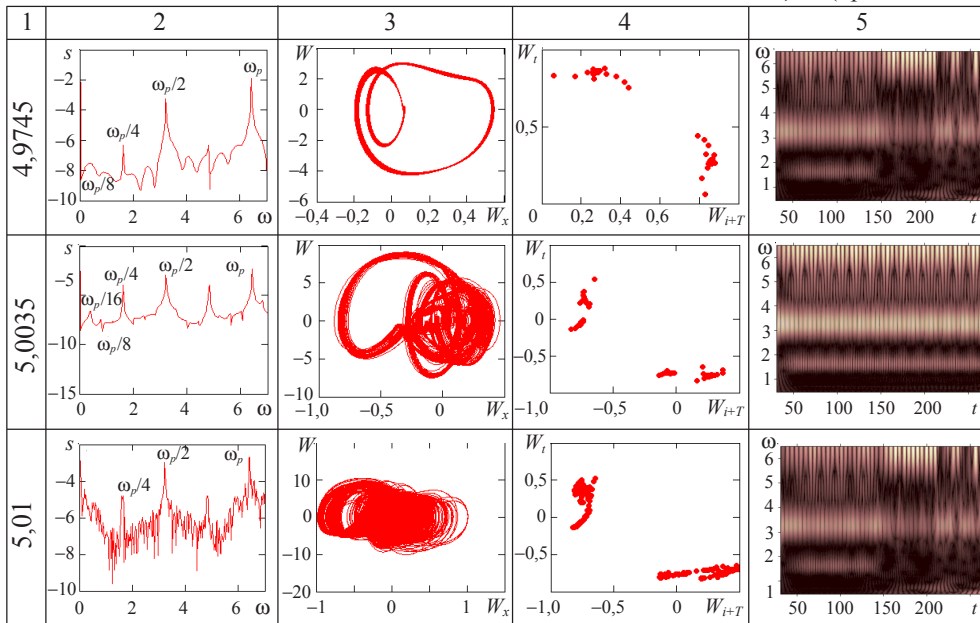


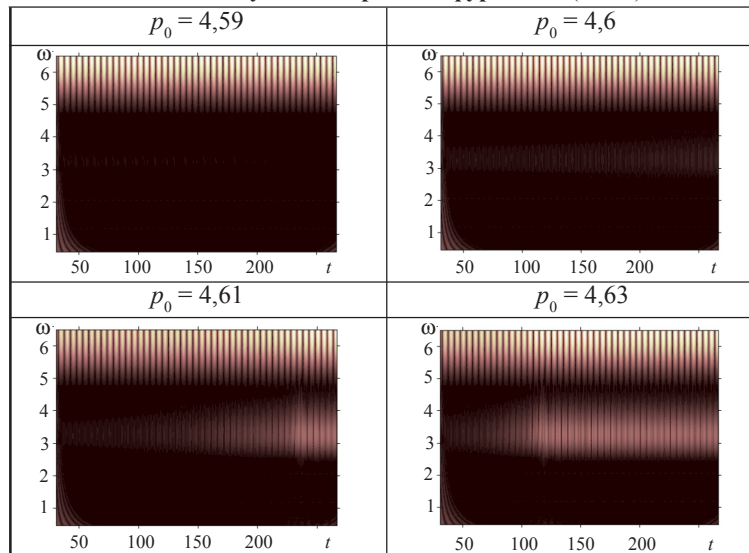
Таблица 2 (продолжение)



Вейвлет-спектры показывают, что мощность первой бифуркации нарастает с течением времени до определенного момента, после которого происходит хаотический всплеск, и далее мощность частоты  $\omega_p/2$  более не меняется (табл. 3).

Таблица 3

Вейвлет-спектры, характеризующие поведение частоты, соответствующей первой бифуркации ( $\lambda = 2$ )



Чем больше значение амплитуды нагрузки, тем раньше по времени появляется хаотическое окно. Вторая бифуркация наступает при  $p_0 = 4,839$ , ее мощность с течением времени уменьшается. Третья бифуркация возникает при  $p_0 = 4,9745$ , вейвлет регистрирует ее присутствие лишь на начальном временном интервале (при

$t < 100$ ). С ростом управляющего параметра ( $p_0 = 5,0035$ ) появляется четвертая бифуркация при  $t > 100$ ; частота, соответствующая третьей бифуркации, здесь присутствует лишь при  $t > 150$ . При  $p_0 = 5,01$  система переходит в хаос. На временном интервале  $100 < t < 125$  присутствуют узкие хаотические окна, при  $125 < t < 200$  зоны перемежаемости становятся шире, при  $t > 200$  спектр полностью хаотический.

В этом эксперименте была посчитана константа Фейгенбаума. Разница с теоретическим значением константы Фейгенбаума  $d_n = 4,66916224$  [15] для третьей бифуркации составляет 0,07% (табл. 4).

Таблица 4

Константа Фейгенбаума ( $\lambda = 2$ )

	1-я бифуркация	2-я бифуркация	3-я бифуркация	4-я бифуркация
$p_0$	4,2	4,839	4,9745	5,0035
Константа Фейгенбаума		4,715867159	4,67241379	

При дальнейшем росте амплитуды внешней силы до  $p_0 = 5,29$  система выходит из хаоса, на вейвлет-спектре доминирует частота, отвечающая первой бифуркации Андронова – Хопфа. Увеличение управляющего параметра влечет за собой появление серии линейно зависимых частот  $\omega_i = \omega_p - \omega_{i+1}$ .

### Выводы

Проведенные численные эксперименты показывают, что при наличии продольной знакопеременной нагрузки, приложенной по периметру оболочки, колебания на частоте, соответствующей первой бифуркации Андронова – Хопфа, свойственны оболочкам, прямоугольным в плане. Смена колебательных режимов в рассматриваемых динамических системах может с течением времени происходить при фиксированной амплитуде и частоте внешней нагрузки. Единого сценария перехода колебаний из гармонических в хаотические в механических системах в виде прямоугольных в плане пластин не обнаружено. Переход к хаосу осуществляется по различным комбинациям классических сценариев, однако во всех проведенных численных экспериментах вейвлет-спектры регистрируют наличие хаотических окон, то есть переход изучаемых систем к хаосу идет через перемежаемость (сценарий Помо – Манневила). Хаос в рассматриваемых системах наступает на двух ведущих частотах – частоте возбуждающей силы и частоте первой бифуркации Андронова – Хопфа.

### Список литературы

1. Кузнецов С.П. *Динамический хаос*. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
2. Awrejcewicz J., Krysko V.A. *Chaos in Structural Mechanics*. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer, 2008. 424 p.
3. Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В. *Введение в физику нелинейных отображений*. Саратов: Научная книга, 2010. 134 с.
4. Коган Е.А., Юрченко А.А. Нелинейные колебания трехслойных и многослойных пластин и оболочек при периодических воздействиях (обзор). *Известия Московского государственного технического университета МАМИ*. 2014. Т. 4, №1 (19). С. 55–70.
5. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krylova E.Yu., Krysko A.V. Spatio-temporal nonlinear dynamics and chaos in plates and shells. *Nonlinear Studies*. 2014. Vol. 21, No 2. P. 313–327.

6. Вольмир А.С. *Нелинейная динамика пластинок и оболочек*. М.: Наука, 1972. 432 с.
7. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. Routes to chaos in continuous mechanical systems. Part 1: Mathematical models and solution methods. *Chaos Solitons & Fractals*. 2012. 45. P. 687–708.
8. Awrejcewicz J., Krylova E.Y., Papkova I.V., Krysko V.A. Wavelet-based analysis of the regular and chaotic dynamics of rectangular flexible plates subjected to shear-harmonic loading. *Shock and vibration*. 2012. 19. P. 979–994.
9. Корнишин М.С. *Нелинейные задачи теории пластин и пологих оболочек и методы их решения*. М.: Наука, 1964. 192 с.
10. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krylova E.Yu., Papkova I.V. Analysis of nonlinear dynamics of plates and shells using the Lyapunov exponents and wavelets. *Dynamical Systems – Theory*. Eds. J. Awrejcewicz, M. Kazmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski. TU of Lodz Press, 2013. P. 273–282.
11. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulences. *Comm. Math. Phys.* 1971. V. 20. P. 167–192.
12. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.* 1978. V. 19, No 1. P. 25–52.
13. Feigenbaum M.J. The universal metric properties of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.* 1979. V. 21, No 6. P. 669–706.
14. Pomean Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Comm. Math. Phys.* 1980. V. 74, No 2. P. 189–198.
15. Шустер Г. *Детерминированный хаос. Введение*. М.: Мир, 1988. 240 с.

#### References

1. Kuznetsov S.P. *Dinamicheskiy khaos*. М.: Fizmatlit, 2006. 356 s.
2. Awrejcewicz J., Krysko V.A. *Chaos in Structural Mechanics*. Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo: Springer, 2008. 424 p.
3. Kuznetsov A.P., Savin A.V., Tyuryukina L.V. *Vvedenie v fiziku nelineynykh otobrazheniy*. Saratov: Nauchnaya kniga, 2010. 134 s.
4. Kogan E.A., Yurchenko A.A. Nelineynye kolebaniya trekhslonykh i mnogoslonykh plastin i obolochek pri periodicheskikh vozdeystviyakh (obzor). *Izvestiya Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta MAMI*. 2014. T. 4, №1 (19). S. 55–70.
5. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krylova E.Yu., Krysko A.V. Spatio-temporal nonlinear dynamics and chaos in plates and shells. *Nonlinear Studies*. 2014. Vol. 21, No 2. P. 313–327.
6. Vol'mir A.S. *Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek*. М.: Nauka, 1972. 432 s.
7. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Papkova I.V., Krysko A.V. Routes to chaos in continuous mechanical systems. Part 1: Mathematical models and solution methods. *Chaos Solitons & Fractals*. 2012. 45. P. 687–708.
8. Awrejcewicz J., Krylova E.Y., Papkova I.V., Krysko V.A. Wavelet-based analysis of the regular and chaotic dynamics of rectangular flexible plates subjected to shear-harmonic loading. *Shock and vibration*. 2012. 19. P. 979–994.
9. Kornishin M.S. *Nelineynye zadachi teorii plastin i pologikh obolochek i metody ikh resheniya*. М.: Nauka, 1964. 192 s.
10. Awrejcewicz J., Krysko V.A., Krylova E.Yu., Papkova I.V. Analysis of nonlinear dynamics of plates and shells using the Lyapunov exponents and wavelets. *Dynamical Systems – Theory*. Eds. J. Awrejcewicz, M. Kazmierczak, P. Olejnik, J. Mrozowski. TU of Lodz Press, 2013. P. 273–282.
11. Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulences. *Comm. Math. Phys.* 1971. V. 20. P. 167–192.
12. Feigenbaum M.J. Quantitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.* 1978. V. 19, No 1. P. 25–52.
13. Feigenbaum M.J. The universal metric properties of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.* 1979. V. 21, No 6. P. 669–706.
14. Pomean Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems. *Comm. Math. Phys.* 1980. V. 74, No 2. P. 189–198.
15. Shuster G. *Determinirovanny khaos. Vvedenie*. М.: Mir, 1988. 240 s.



## CHAOTIC DYNAMICS FLEXIBLE RECTANGULAR PLATE WITH LONGITUDINAL LOADS ACTION

Krylova E.Yu.<sup>1</sup>, Yakovleva T.V.<sup>1</sup>, Papkova I.V.<sup>2</sup>, Krysko V.A.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Research Institute of Mechanics of State University of Nizhni Novgorod,  
Nizhni Novgorod, Russian Federation*

<sup>2</sup>*Yuri Gagarin State Technical University of Saratov, Saratov, Russian Federation*

The complex oscillations of geometrically nonlinear rectangular plate by using kinematic Kirchhoff hypotheses is researched. Plate is subjected to an alternating longitudinal load acting on their perimeter. Differential problems in partial differential problem is reduced to a system of nonlinear ordinary differential equations by finite difference method with approximation of the second order on space variables. System of differential equations is solved by the Runge – Kutta fourth order in time. Investigated transition scenarios of harmonic oscillations in the chaotic for flexible plates, depending on the length of the plate. It is shown that oscillations at the frequency corresponding to the first Hopf bifurcation, are inherent discussed shell. Change of vibration modes in the dynamical system may occur for fixed amplitude and frequency of the external loads only with the passage of time.

*Keywords:* nonlinear dynamics, rectangular plate, bifurcations, chaos, geometric nonlinearity, wavelet analysis, Fourier analysis, scenarios of transition to chaos oscillations, mathematical modeling.