УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ЭЛЕМЕНТНАЯ МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ И ВЯЗКОУПРУГОСТИ

Л.А. Игумнов, А.А. Белов, А.А. Ануфриев, С.Ю. Литвинчук, А.В. Аменицкий, М.Д. Ермолаев

Нижний Новгород

Представлена гранично-элементная методика расчета смешанных начально-краевых задач трехмерной изотропной теории упругости и вязкоупругости. Использована прямая формулировка метода граничных интегральных уравнений в сочетании с интегральным преобразованием Лапласа по времени. Численное обращение преобразования Лапласа организовано на основе метода Дурбина. Для описания вязкоупругих свойств материала использовались как регулярные, так и сингулярные функции памяти. Рассматривались кусочно-однородные тела. Приведены результаты численных экспериментов, демонстрирующие высокую точность численной методики.

При решении методом граничных элементов динамических задач сформировалось два подхода к учету переменной времени: применение интегрального преобразования по времени Лапласа (или Фурье) с решением задачи в изображениях и численным обращением интегрального преобразования; в явном учете переменной времени (как пространственных переменных) с использованием шаговых по времени процедур. Оба подхода первоначально были применены для решения плоских задач о дифракции акустических волн на препятствиях в идеальной сжимаемой жидкости [1–3]. Распространение первого подхода на решение плоских нестационарных динамических задач теории упругости было осуществлено в работах [4, 5] (использовалось преобразование Лапласа). Дальнейшее развитие методика получила в работах [6, 7]. Была, в частности, улучшена точность численного обращения преобразования Лапласа – применен метод Дурбина [8]. В работе [9] были проанализированы восемь различных методов обращения преобразования Лапласа, и метод Дурбина был выбран как наиболее подходящий для решения нестационарных динамических задач.

Применению преобразования Лапласа и метода Дурбина посвящена работа [10]. Преобразование Фурье для решения двумерных нестационарных динамических задач теории упругости применялось в работах [11–13]. В работе [14] применен первый подход, и численное обращение преобразования Лапласа решалось на основе метода, использующего ортогональные полиномы с помощью "регуляризирующего" алгоритма Л.Н. Тихонова решения некорректных задач.

Распространение первого подхода, использующего преобразование Лапласа по временной переменной, на численное решение трехмерных динамических задач теории упругости было осуществлено в работе [15]. В ней проведено тестирование предложенной методики путем сравнения численного решения с точным в пространстве изображений.

В работе [16] второй подход был применен для исследования антиплоской деформации. Развитие второго подхода для решения произвольных двумерных нестационарных динамических задач теории упругости было осуществлено в работах [17, 18]. В них авторы использовали аналитическое интегрирование по времени. В работе [18] было проведено сравнение первого и второго подходов на решении конкретной двумерной нестационарной динамической задачи. В рамках первого подхода применялось как преобразование Лапласа, так и преобразование Фурье. В случае рассмотренной задачи в рамках первого подхода для достижения одинаковой точности применение преобразования Лапласа оказалось экономичнее, чем применение преобразования Фурье. Использование интегральных преобразований приводит к сглаживанию волновой картины. Второй подход дает лучшие результаты в начальные моменты времени, а после большого числа шагов демонстрирует погрешность.

Впервые численная методика для расчета нестационарного динамического деформирования трехмерных упругих элементов конструкций с использованием шаговой процедуры была детально изучена в работах [19–22] и реализована в виде программы. Среди первых работ второго подхода по численному анализу трехмерных упругодинамических задач можно назвать [23]. Но лишь с работы [24] удалось устранить все выявившиеся существенные проблемы гранично-элементного моделирования.

Дальнейшее состояние вопроса можно проследить по обзору [25] и по статьям [26–28].

1. Постановка задачи

Рассматривается кусочно-однородное тело Ω в трехмерном евклидовом пространстве R^3 с декартовой системой координат $Ox_1x_2x_3$. Границу тела обозначим через Γ, границы однородных частей Ω_k $(k = 1,..., K)$ – через Γ_k. Предполагается, что Ω_k являются изотропными вязкоупругими телами [19, 20, 22]. Введем обозначения для параметров материала каждой однородной части (подконструкции) Ω_k : ρ^k – плотность материала, $\lambda^k(t)$ и $\mu^k(t)$ – функции Ламе материала. Динамическое состояние каждой части тела Ω_k описывается следующей системой дифференциальных уравнений в перемещениях:

$$\mu^k(t) * \Delta u^k(x,t) + (\lambda^k(t) + \mu^k(t)) * \operatorname{grad}\operatorname{div} u^k(x,t) = \rho^k\, \ddot{u}^k(x,t), \qquad (1)$$

где символ “$*$” означает свертку Стилтьеса по времени t. В уравнениях (1) $u^k(x, t)$ – вектор перемещений точки $x = (x_1 x_2 x_3)$ в момент времени t. Физические и геометрические соотношения имеют вид:

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}\lambda * \varepsilon_{kk} + 2\mu * \varepsilon_{ij}; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial u_i} + \frac{\partial u_i}{\partial u_j}\right),$$

где $\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}$ $(i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3})$ – тензоры напряжений и деформаций.

Пусть вектор перемещений и функции Ламе материала удовлетворяют условиям:

$$u^k(x,0) = \dot{u}^k(x,0) = 0,$$

$$\mu(t-\tau)=0,\quad \lambda(t-\tau)=0,\ \text{где}\ t<\tau,$$

$$\lim_{t\to 0}\dot{\mu}(t)=0,\quad \lim_{t\to 0}\dot{\lambda}(t)=0.$$

Конкретный вид функций $\mu(t)$ и $\lambda(t)$ определяется вязкоупругой моделью материала. Будем рассматривать случай пропорциональных функций памяти, тогда достаточно описать физические соотношения, к примеру, для случая $i \neq j$:

$$\sigma_{ij}=2\mu*\varepsilon_{ij}=2\int_0^t G(t-\tau)d\varepsilon_{ij}(t),$$

$$\frac{dG(t)}{dt}=-R(t),\quad R(t)\equiv k(t)-\int_0^t k(t-\tau)k(\tau)d\tau+\ldots,$$

$$\frac{dJ(t)}{dt}=k(t),$$

где $G(t)$ – функция памяти материала; $R(t)$, $k(t)$ – ядра релаксации и ползучести материала. Функции памяти классических вязкоупругих моделей имеют вид:

$G(t)=G(0)e^{-\gamma t_+}$ – модель Максвелла,

$J(t)=J(0)(1-e^{-\beta t_+})$ – модель Кельвина–Фойгта,

$G(t)=G(\infty)+(G(0)-G(\infty))e^{-\gamma t}$ – модель стандартного вязкоупругого тела,

где γ и β – величины, обратные характерным временам релаксации и ползучести соответственно. Кроме того, пусть отношение значения модуля на бесконечности к значению модуля в начальный момент (для регулярных моделей) определяется параметром $\omega=G(\infty)/G(0)$.

Модифицированная теория вязкоупругости предполагает использование ядер следующего типа:

$$k(t)=\varphi(t)+\frac{1}{4}\varphi(t)*\varphi(t).$$

Здесь будут рассматриваться два случая таких ядер:

$$\varphi(t)=k\ln\frac{1}{t_+},\quad \varphi(t)=k\frac{t_+^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},\quad 0<\alpha<1.$$

Введем вектор напряжений $t_n(x,t)$ в точке x на элементарной площадке с единичной нормалью $n(x)$:

$$t_n(x,t)\equiv T_{n(x)}u(x,t)=n(x)\lambda(t)*\operatorname{div}u(x,t)+2\mu(t)*\frac{\partial u(x,t)}{\partial n(x)}+$$
$$+\mu(t)*[n(x)\times \operatorname{rot}u(x,t)]. \tag{2}$$

Если $x\in\Gamma_k$, то под $n(x)$ будем понимать единичный вектор внешней (по отношению к Ω_k) нормали к границе Γ_k. Вектор напряжений $t_n(x,t)=(t_1,t_2,t_3)$ на границе Γ_k, соответствующий этой нормали, обозначим через $t^k(x,t)$.

Будем рассматривать следующие типы граничных условий для Ω_k:

$$u_l^k(x,t) = f_l^k(x,t), \quad x \in \Gamma^u \cap \Gamma_k, \quad l = \overline{1,3}, \tag{3}$$

$$t_l^k(x,t) = g_l^k(x,t), \quad x \in \Gamma^\sigma \cap \Gamma_k; \tag{4}$$

$$u_l^k(x,t) = u_l^s(x,t), \quad t_l^k(x,t) = -t_l^s(x,t), \quad x \in \Gamma'_{ks}; \tag{5}$$

$$t_l^k(x,t) = -t_l^s(x,t) = \alpha_{lj}^{k,s}(x)[u_j^k(x,t) - u_j^s(x,t)], \quad x \in \Gamma''_{ks}. \tag{6}$$

Здесь Γ^u и Γ^σ – части границы Γ тела Ω, по которым заданы соответственно перемещения и поверхностные силы; Γ'_{ks} – граница жесткого контакта частей Ω_k и Ω_s; Γ''_{ks} – граница, по которой осуществляется упругая связь частей Ω_k и Ω_s. Функции $f_l^k(x,t)$ и $g_l^k(x,t)$ являются заданными функциями координат и времени, коэффициенты $\alpha_{lj}^{k,s}$ характеризуют свойства упругой связи частей тела Ω_k и Ω_s. В дальнейшем интегральные представления рассматриваются в терминах преобразования Лапласа. Для расчета нестационарных задач в явном времени представленная численная методика должна быть дополнена процедурой обратного преобразования Лапласа.

2. Интегральная формулировка

Применим к исходным уравнениям интегральное преобразование Лапласа:

$$f(x,p) = \int_0^\infty f(t) e^{-ipt} dt,$$

где p – параметр преобразования Лапласа.

В качестве метода решения будем использовать метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [19], в основе которого лежит сведение краевой задачи для дифференциального уравнения движения к интегральному уравнению относительно граничных функций.

Вектор перемещений во внутренних точках области связан следующим образом с граничными значениями перемещений и усилий (формула Сомильяны):

$$\bar{u}_l(x,p) = \int_\Gamma U_{lj}(x,y,p)\bar{t}_j(y,p)d_yS - \int_\Gamma T_{lj}(x,y,p)\bar{u}_j(y,p)d_yS,$$

$$l = 1,2,3, \quad x \in \Omega. \tag{7}$$

Здесь U_{lj} и T_{lj} – соответственно компоненты тензоров фундаментальных и сингулярных решений уравнения (1). Тензор T выражается из (2) через тензор U с помощью оператора напряжений T_n:

$$T(x,y,p) = [T_{n(x)}U(x,y,p)]^T,$$

где верхний значок “T” означает транспонирование. Компоненты тензоров U и T имеют вид:

$$U_{lj}(x-y,p) = \sum_{m=1}^{2}\left[U_{lj}^m(x-y) - \frac{1}{-ip\,r^2}U_{lj}^3(x-y)\left(-\frac{1}{ip} + \frac{ir}{\bar{c}_m}\right)(-1)^{m+1}\right]e^{-pr/\bar{c}_m},$$

$$T_{lj}(x,y,p)=\sum_{m=1}^{2}\left[T_{lj}^{1,m}(x,y)+T_{lj}^{m}(x,y)+\frac{1}{(-ip\,r)^2}T_{lj}^{3}(-1)^m\left(\frac{p\,r}{\bar{c}_m}\right)\right]e^{-p\,r/\bar{c}_m},$$

где

$$U_{lj}^{1}(x-y)=\frac{r_{,l}r_{,j}}{4\pi r\rho\,\bar{c}_1^{\,2}},\quad U_{lj}^{2}(x-y)=\frac{1}{4\pi r\rho\,\bar{c}_1^{\,2}}(\delta_{lj}-r_{,l}r_{,j}),$$

$$U_{lj}^{3}(x-y)=\frac{1}{4\pi r\rho}(-\delta_{lj}+3r_{,l}r_{,j}),$$

$$T_{lj}^{1,1}(x,y)=\frac{\bar{c}_2^{\,2}}{4\pi r\bar{c}_1^{\,2}}\left(-\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}}n_j r_{,l}-2\frac{\partial r}{\partial n}r_{,l}r_{,j}\right),$$

$$T_{lj}^{1,2}(x,y)=\frac{1}{4\pi r\bar{c}_2}\left(-n_l r_{,l}-\frac{\partial r}{\partial n}\delta_{lj}+2\frac{\partial r}{\partial n}r_{,l}r_{,j}\right),$$

$$T_{lj}^{1}(x,y)=\frac{\bar{c}_2^{\,2}}{4\pi r\bar{c}_1^{\,2}}\left[2n_l r_{,j}+\left(2-\frac{\bar{\lambda}}{\bar{\mu}}\right)n_j r_{,l}+2\frac{\partial r}{\partial n}\delta_{lj}-12\frac{\partial r}{\partial n}r_{,l}r_{,j}\right],$$

$$T_{lj}^{2}(x,y)=\frac{1}{4\pi r^2}\left(-3n_l r_{,j}-2n_j r_{,l}-3\frac{\partial r}{\partial n}\delta_{lj}+12\frac{\partial r}{\partial n}r_{,l}r_{,j}\right),$$

$$T_{lj}^{3}(x,y)=\frac{6\bar{c}_2^{\,2}}{4\pi r^2}\left(n_l r_{,j}+n_j r_{,l}+3\frac{\partial r}{\partial n}\delta_{lj}-5\frac{\partial r}{\partial n}r_{,l}r_{,j}\right),$$

причем $n_l \equiv n_l(y)$.

Для задач вязкоупругости величины $\bar{c}_1=\bar{c}_1(p)$ и $\bar{c}_2=\bar{c}_2(p)$ являются операторами скоростей продольных и поперечных волн соответственно.

Формула Сомильяны (7) дает следующее ГИУ:

$$c_{lj}(x)\bar{u}_j(x,p)+\int_{\Gamma}T_{lj}(x,y,p)\bar{u}_j(y,p)d_yS=\int_{\Gamma}U_{lj}(x-y,p)\bar{t}_j(y,p)d_yS,$$
$$l=1,2,3,\quad x\in\Gamma. \tag{8}$$

Интеграл в левой части (8) является сингулярным, то есть понимается в смысле главного значения по Коши, а коэффициент при внеинтегральном члене определяется формулой:

$$c_{lj}(x)=\frac{1-\alpha_\Omega}{2}\delta_{lj}-\int_{\Gamma}T_{lj}^{0}(x,y)d_yS,$$

где

$$T_{lj}^{0}(x,y)=T_{lj}^{1}(x,y)+T_{lj}^{2}(x,y)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\bar{c}_2^{\,2}}-\frac{1}{\bar{c}_1^{\,2}}\right)*T_{lj}^{3}(x,y)$$

и α_Ω равна 1, если область Ω конечна, и -1 для бесконечной области Ω. Если в точке x поверхность имеет единственную касательную плоскость, то $c_{lj}(x)=\delta_{lj}/2$. ГИУ (8) позволяет разработать эффективную численную методику для определения неизвестных амплитуд граничных перемещений и поверхностных сил. Решением исходной начально-краевой задачи будет вектор-функция $u(x,t)$, полученная путем применения к решению (7), (8) обратного преобразования Лапласа:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} f(p)e^{ipt}dp. \qquad (9)$$

3. Методика численного решения

Методика построения и численного решения дискретного аналога ГИУ (8) является развитием работы [29]. В качестве проекционного метода применялся метод коллокаций. Граница аппроксимировалась совокупностью четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов. При этом треугольные элементы рассматривались как вырожденные четырехугольные элементы. Использовалась следующая согласованность аппроксимации граничных функций с аппроксимацией границы: для аппроксимации граничных перемещений применялись билинейные элементы, а для поверхностных сил – постоянные элементы. Для получения дискретного аналога ГИУ в качестве точек коллокации выбирались узлы аппроксимации граничных функций, в которых эти функции неизвестны. Если задача обладает физической симметрией (симметрией тела и граничных условий), то осуществляется учет этой симметрии, использующий отображения основного (повторяемого) фрагмента границы тела на все симметричные ему фрагменты. При этом в сечениях тела плоскостями симметрии гранично-элементная сетка не строится и, следовательно, дополнительные неизвестные не появляются. Формируемая система уравнений содержит неизвестные, относящиеся только к основному фрагменту границы тела. Подробное описание методики дано в работах [29, 30].

При численном обращении преобразования Лапласа интеграл (9) обращается с помощью алгоритма Дурбина [8]:

$$f(t_j)\approx 2\frac{e^{j\beta\Delta t}}{T}\left[-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\bar{f}(\beta)\right\}+\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=0}^{N}\left(A(n)+iB(n)\right)W^{jn}\right\}\right],$$

$$W=e^{i2n/N},$$

$$A(n)=\sum_{l=0}^{L}\mathrm{Re}\left\{\bar{f}\left(\beta+i(n+lN)\frac{2\pi}{T}\right)\right\},\quad B(n)=\sum_{l=0}^{L}\mathrm{Im}\left\{\bar{f}\left(\beta+i(n+lN)\frac{2\pi}{T}\right)\right\},$$

$$n=0,1,\ldots,N,\quad l=0,1,\ldots,L,\quad t_j=j\Delta t=jT/N,\quad j=0,1,\ldots,N-1.$$

Одна из модификаций алгоритма выглядит следующим образом:

$$F_k=\mathrm{Re}\left[\bar{f}(\beta+i\omega_k)\right],\quad G_k=\mathrm{Im}\left[\bar{f}(\beta+i\omega_k)\right],\quad \Delta_k=\omega_{k+1}-\omega_k,$$

$$f(0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(F_k+F_{k+1})\Delta_k}{2\pi},$$

$$f(t)\approx\frac{e^{\alpha t}}{\pi t^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{F_{k+1}-F_k}{\Delta_k}\left(\cos(\omega_{k+1}t)-\cos(\omega_k t)\right)-\frac{G_{k+1}-G_k}{\Delta_k}\left(\sin(\omega_{k+1}t)-\sin(\omega_k t)\right)\right].$$

4. Численные эксперименты

Для демонстрации возможностей гранично-элементной методики приводятся результаты расчета трех задач: задачи о действии нестационарной нагрузки на поверхности сферической полости; задачи о действии нестационарной нагрузки на поверхности шара; задачи о действии нестационарной нагрузки на кубическую полость. Результаты расчетов сравнивались как с аналитическим решением (для сферической полости), так и с результатами других авторов [19, 21, 22]. Следует подчеркнуть, что результаты в [19, 21, 22] получены на основе второго подхода – с использованием шаговых процедур. Нагрузка, которая выбрана в задачах, показана на рис. 1.

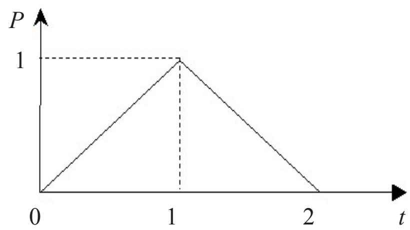

Рис. 1

Для сферической полости (шара) дискретная модель строилась следующим образом. Впишем в сферическую полость куб, каждую грань которого разобьем на 64 одинаковых четырехугольных восьмиузловых элемента. Таким образом, сфера аппроксимируется 384 биквадратичными элементами.

Дискретный аналог ГИУ строился с учетом трех плоскостей симметрии ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$), что позволило в качестве основного элемента границы выбрать фрагмент сферы (шара), соответствующий четверти грани куба.

Параметры моделей: модель Максвелла $\gamma = 0{,}05$, модель Кельвина–Фойгта $\beta = 5$, модель стандартного вязкоупругого тела $\omega = 0{,}5$, $\gamma = 0{,}05$, логарифмическая модель $k = 1$, степенная модель $k = 1$, $\alpha = 0{,}9$.

Параметры задач:

1. Задача о сферической полости: $R_{\text{сфер}} = 1{,}0$; $C_1 = 1{,}309307$; $C_2 = 0{,}6546537$; $\rho = 7{,}0$.

2. Задача о шаре: $R_{\text{шара}} = 1{,}0$; $C_1 = 2{,}0$; $C_2 = 1{,}0$; $\rho = 1{,}0$.

3. Задача о кубической полости: $R_{\text{ребро куба}} = 1{,}0$; $C_1 = 2{,}0$; $C_2 = 1{,}0$; $\rho = 1{,}0$.

На рис. 2–9 приведены численные результаты для центрально-симметричных задач (сферической полости и шара). Численные результаты для различных элементов, тем не менее, отличаются и, поэтому на рис. 2–9 приведены кривые минимальных и максимальных полученных значений перемещений.

На рис. 2–5 изображены решения задачи о действии нестационарной нагрузки на поверхности сферической полости. Точность методики такова, что несовпадение численного и аналитического решений на рис. 1–3, 5 графически незаметно. На рис. 4 кривая аналитического решения имеет более глубокий минимум.

На рис. 2 кривые *1* соответствуют упругой модели, кривые *2* – модели Максвелла. На рис. 3 кривые *1* соответствуют модели Кельвина–Фойгта, кривые *2* – модели стандартного вязкоупругого тела. Результаты, полученные для упругой модели и для классических (дифференциальных) моделей, отличаются по большей части амплитудой, а не качественно. В то же время видны существенные отличия для степенной (рис. 5) и логарифмической (рис. 4) моделей по сравнению с упругим случаем.

На рис. 6–9 изображены решения задачи о действии нестационарной нагрузки на поверхности шара.

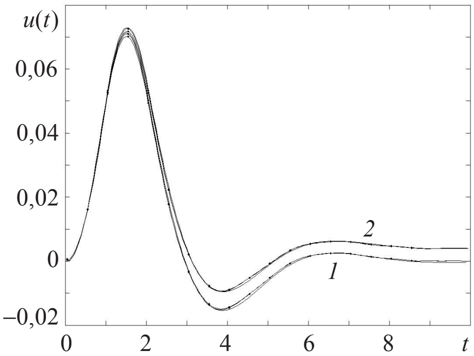

Рис. 2

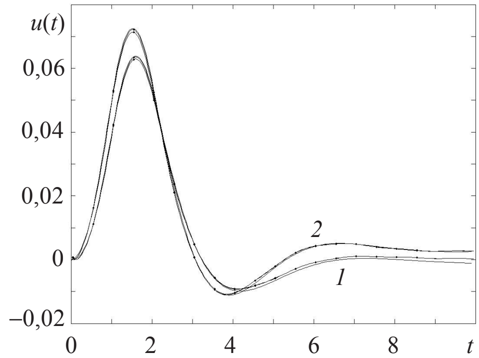

Рис. 3

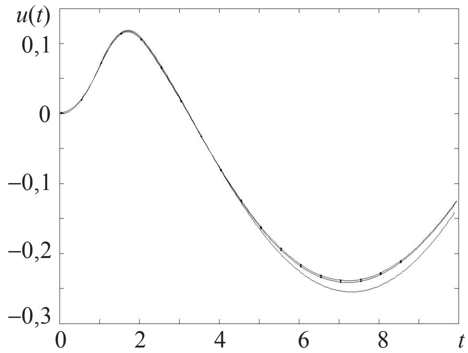

Рис. 4

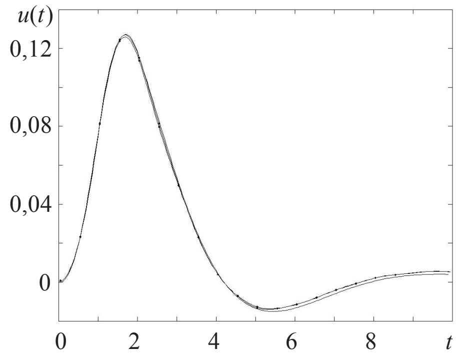

Рис. 5

На рис. 6 кривые *1* соответствуют упругой модели, кривые *2* – модели Максвелла. На рис. 7 кривые *1* соответствуют модели Кельвина–Фойгта, кривые 2 – модели стандартного вязкоупругого тела.

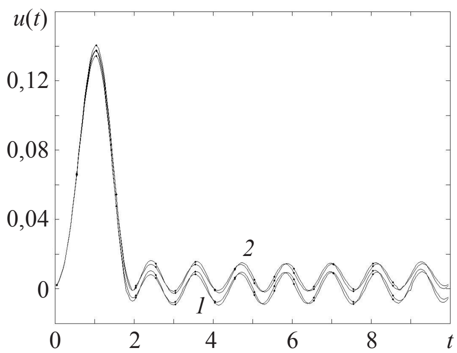

Рис. 6

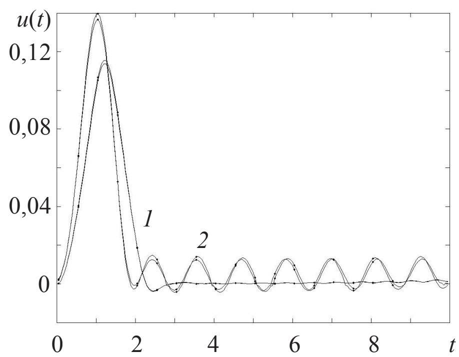

Рис. 7

Рис. 8 и 9 соответствуют решениям для логарифмической и степенной моделей соответственно.

Фойгтовская и логарифмическая модели сред не позволяют выйти колебательному процессу шара на стационарный режим (соответствующий низшей собственной частоте колебаний). При степенной модели среды колебания шара происходят с сильно затухающей амплитудой в нестационарном режиме.

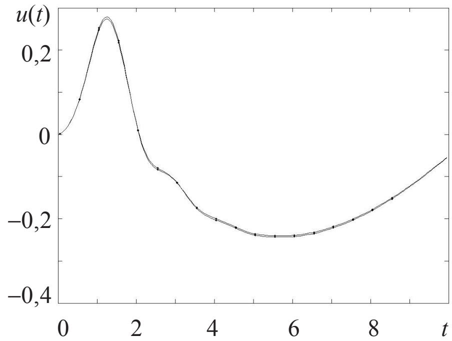

Рис. 8

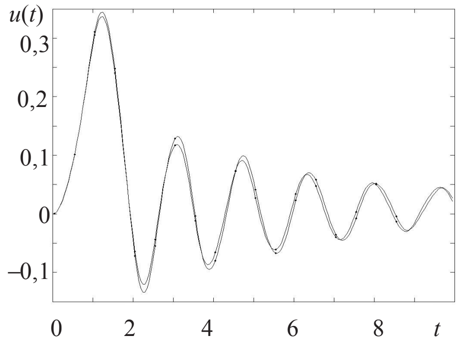

Рис. 9

На рис. 10 представлена кубическая полость.

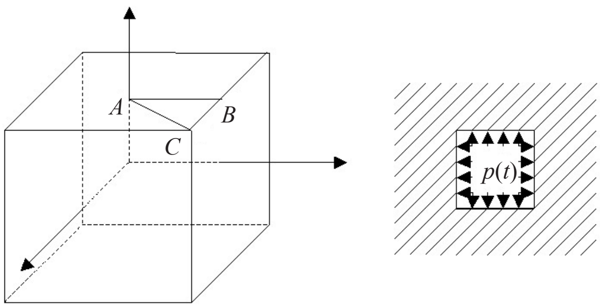

Рис. 10

На рис. 11–14 представлены решения задачи о действии нестационарной нагрузки на кубическую полость.

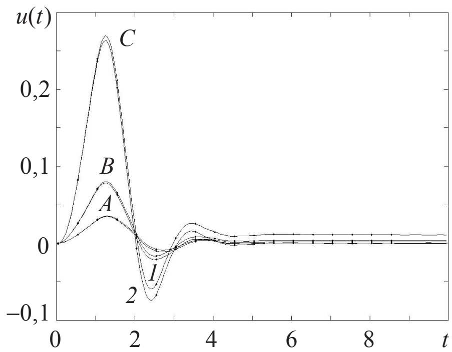

Рис. 11

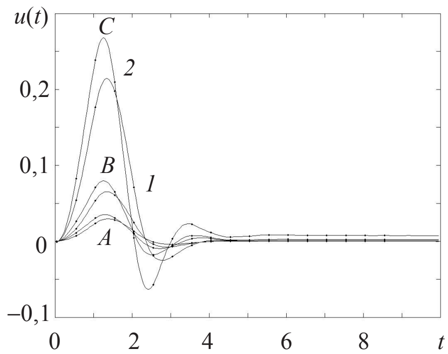

Рис. 12

В этой задаче нет абсолютной симметрии, поэтому были рассмотрены три наиболее интерестные точки и построены графики нормальных перемешений к плоскости ABC.

На графиках скачки с наиболее высокой амплитудой соответствуют точке C, с наиболее низкой – точке A. На рис. 11 кривая *1* соответствует упругой модели, кривая *2* – модели Максвелла. На рис. 12 кривая *1* соответствует модели Кельвина–Фойгта, кривая *2* – модели стандартного вязкоупругого тела. Рис. 13 и 14 соответствуют решениям для степенной и логарифмической моделей.

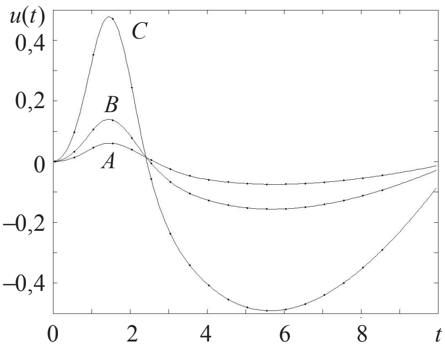

Рис. 13

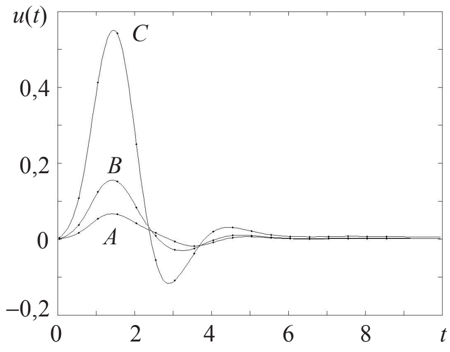

Рис. 14

Проведенные расчеты показывают, что точность полученных результатов высокая. Использование аппарата интегрального преобразования Лапласа совместно с методом ГИУ позволяет существенно упростить численное решение задач вязкоупругости методом граничных элементов по сравнению с методом гранично-временных элементов. Учет вязкоупругих свойств среды может существенно изменить картину динамического деформирования.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 05-01-08055, 05-01-00837) и ФЦНТП "Исследования и разработки по приоритетным направлениям науки и техники" (ЛОТ № 2005-Р4-112/001, XII очередь – научные школы, шифр темы Р4-112/001/404).

Литература

1. *Banaugh*, *R.P*. Diffraction of steady acoustic waves by surfaces of arbitrary shape / R.P. Banaugh, W. Goldsmith // J. Acoust. Soc. Amer. – 1963. – Vol. 35. – P. 1590–1601.

2. *Friedman*, *M*. Diffraction of a plane shock wave by an arbitrary rigid cylindrical obstacle/ M. Friedman, R.P. Shaw // J. Appl. Mech. – 1962. – Vol. 29. – P. 40–46.

3. *Shaw*, *R.P*. Boundary integral equation methods applied o wave problems / R.P. Shaw // Developments in boundary element methods Vol. 1 /By P.K. Banerjee, R. Butterfield. – London: Applied Science Publishers, 1979. – P. 121–153.

4. *Cruse*, *T.A*. A direct formulation and numerical solution of the general transient elasto-dynamic problem. I / T.A. Cruse, F.J. Rizzo // J. Math. Anal. Appl. – 1968. – Vol. 22, 1. – P. 244– 259.

5. *Cruse*, *T.A*. A direct formulation and numerical solution of the general transient elasto-dynamic problem. II / T.A. Cruse //J. Math. Anal. Appl. – 1968. – Vol. 22, 2. – P. 341–355.

6. *Manolis*, *G.D*. Dynamic stress concentration studies by the boundary integral equations method / G.D. Manolis, D.E. Beskos // Proc. 2nd Int. Symp. Innov. Num. Analysis in Appl. Eng. Sci. / Ed. by R.P. Shaw et al. – Virginia. – 1980. – P. 459–463.

7. *Manolis*, *G.D.* Dynamic stress concentration studies by the boundary integrals and Laplace transform / G.D. Manolis, D.E. Beskos // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1981. – Vol. 17, 4. – P. 573–599.

8. *Durbin*, *F*. Numerical inversion of Laplace transforms: an efficient improvement to Dubner and Abate's method / F. Durbin // The Computer Journal. – 1974. – Vol. 17, 4. – P. 371–376.

9. *Naraynan*, *G.V*. Numerical operational methods for time-dependent linear problems / G.V. Naraynan, D.E. Beskos // Int. J. Num. Meth. Ens. – 1982. – Vol. 18, 12. – P. 1829–1854.

10. *Tullberg*, *O*. BEMDYM - a boundary element program for two-dimensional elastodynamics / O. Tullberg // Boundary Elem. Proc. 5th Int. Conf. – Hiroshima. – 1983. – P. 835–845.

11. *Niwa*, *Y*. An analysis of transient stresses produced around cavities of arbitrary shape during the passage of traveling waves / Y. Niwa, S. Kobayashi, N. Azuma // Memo. Faculty of Eng. Kyoto Univ. – 1975. – Vol. 37. – P. 28–46.

12. *Kobayashi*, *S*. Some problems of the boundary integral equation method in elastodynamics / S. Kobayashi // Boundary Elem. Proc. 5th Int. Conf. – Hiroshima. – 1983. – P. 755–784.

13. *Niwa*, *Y*. Application of the boundary integral equation (BIE) method to transient re-sponse analysis of inclusions in a half space / Y. Niwa, S. Hirose, M. Kitahara // Wave motion. – 1986. – Vol. 8, № 1. – P. 77–91.

14. *Галабурдин*, *А.В*. Решение плоской динамической задачи теории упругости методом граничных интегральных уравнений / А.В. Галабурдин. – Ростов-на-Дону: Ростовский университет.1983. – Деп. В ВИНИТИ. – №5875–83 Деп.

15. *Ройтфарб*, *И.З.* Численный метод решения пространственных динамических задач теории упругости на основе метода потенциала / И.З. Ройтфарб, Чу Вьет Кыонг // Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев. – 1976. – С.32–38.

16. *Cole*, *D.M*. A numerical boundary integral equation method for elastodynamics / D.M. Cole, D.D. Kosloff, J.B. Minster // Bull. Seism. Soc. Amer. – 1978. – Vol. 68, 5. – P. 1331–1357.

17. *Niwa*, *Y*. An application of the integral equation method to two-dimensional elastodynamics / Y. Niwa, T. Fukui, S. Kato // Theor. Appl. Mech. – Univ. of Tokio press. – 1980. – Vol. 28. – P. 281–290.

18. *Manolis*, *G.D*. A comparative study on three boundary element method approaches to problem in elastodynamics / G.D. Manolis // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1983. – Vol. 19, 1. – P. 73–91.

19. *Угодчиков*, *А.Г*. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела / А.Г. Угодчиков, Н.М. Хуторянский. – Казань: Изд-во КГУ, 1986. – 296 с.

20. *Игумнов*, *Л.А*. Решение осесимметричных задач нестационарного динамического деформирования вязкоупругих элементов конструкций методом гранично-временных интегральных уравнений: автореф. дис… канд. тех. наук: 01.02.04 / Игумнов Леонид Александрович. – Горький, 1987. – 18 с.

21. *Турилов*, *В.В*. Расчет нестационарного динамического деформирования трехмерных упругих элементов конструкций методом гранично-временных элементов: автореф. дис… канд. тех. наук: 01.02.04 / Турилов Валерий Вячеславович. – Горький, 1986. – 20 с.

22. *Хуторянский*, *Н.М*. Метод гранично-временных элементов в пространственных задачах нестационарной динамики упругих и вязкоупругих тел: автореф. дис… д-ра техн. наук: 01.02.04 / Хуторянский Наум Маркович. – Рига, 1988. – 32 с.

23. *Karabalis*, *D.L*. Dynamic response of 3-D foundations by time domain boundary element method / D.L. Karabalis, D.E. Beskos // NSF Grant No. CEE-8024725, Department of Civil and Mineral Engineering. – Minnesota. Minneapolis. – University of Minnesota. 1984.

24. *Ahmad*, *S*. Time-domain transient elastodynamic analysis of 3-d solids by BEM / S. Ahmad, P.K. Banerjee // Int. J. Num. Meth. Eng. – 1988. – Vol. 26. – P. 1709–1728.

25. *Beskos*, *D.E*. Boundary element methods in dynamic analysis: Part II 1986-1996 / D.E. Beskos // Appl. Mech. Reviews. – 1997. – Vol. 50. – P. 149–197.

26. *Sutradhar*, *A*. Transient heat conduction in homogeneous and non-homogeneous materials by the Laplace transform Galerkin boundary element method / A. Sutradhar, G. H. Paulino, L.J. Gray // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 2002. – Vol. 26, 2. – P. 119–132.

27. *Mesquita*, *A.D*. A simple Kelvin and Boltzmann viscoelastic analysis of three-dimensional solids by the boundary element method / A.D. Mesquita, H.B. Coda // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 2003. – Vol. 27, 9. – P. 885–895.

28. *Marrero*, *M*. Numerical behavior of time domain BEM for three-dimensional transient elastodynamic problems / M. Marrero, J. Dominguez // Eng. Analysis with Boundary Elements. – 2003. – Vol. 27, 1. – P. 39–48.

29. Разработка метода граничных элементов и комплекса программ для расчета колебаний трехмерных конструкций, взаимодействующих с жидкостью: Отчет о НИР / НИИ механики ННГУ; рук. Хуторянский Н.М. – Н. Новгород, 1991. – 90 с. – № ГР Х35838. – Инв. № Г24571.

30. *Игумнов*, *Л.А*. Методика расчета метода граничных элементов для трехмерных квазистатических и стационарных динамических задач вязкоупругости / Л.А. Игумнов, И.М. Буравлев // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Численное моделирование физико-механических процессов: Межвуз. сб. / М.: ТНИ КМК. – 1995. –Вып. 52. – С. 37–46.

[11.07.2005]