

УДК 539.3

ВЛИЯНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЙ ВДОЛЬ ОБРАЗУЮЩЕЙ НА ПАРАМЕТРЫ ДВИЖЕНИЯ КОНИЧЕСКИХ УДАРНИКОВ В ГРУНТОВОЙ СРЕДЕ*

© 2015 г.

**Котов В.Л.¹, Константинов А.Ю.^{1,2},
Тарасова А.А.¹, Линник Е.Ю.¹**

*¹Научно-исследовательский институт механики
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Российская Федерация*

*²Государственный научно-исследовательский институт машиностроения
им. В.В. Бахирева, Дзержинск, Российская Федерация*

vkotov@inbox.ru

Поступила в редакцию 27.04.2015

Моделируется плоскопараллельное движение конических тел в упруго-пластической грунтовой среде на базе гипотезы локальности в рамках модели локального взаимодействия. Параметры квадратичной по скорости модели локального взаимодействия определяются на основе решения одномерной задачи о расширении сферической полости с постоянной скоростью из точки в безграничной среде. Модель упругопластической среды включает в себя линейные зависимости «давление – объемная деформация» и «предел текучести – давление». Ранее изучалось движение конического ударника по нормали и под углом к свободной поверхности полупространства, занимаемого упруго-пластической грунтовой средой. Было получено, что квадратичная по скорости модель локального взаимодействия, удовлетворительно описывающая осесимметричное движение ударника, применима и для представления начальной стадии наклонного внедрения в грунт. В настоящей статье показано, что угловая скорость вращения зависит от распределения напряжения вдоль образующей конуса при наклонном ударе. Анализируется поведение угловых скоростей во времени, отмечается удовлетворительное качественное и количественное соответствие результатов, полученных в трехмерных расчетах и в рамках модели локального взаимодействия при учете непостоянного распределения контактных напряжений вдоль образующей острого конуса.

Ключевые слова: конический ударник, удар, наклонное проникание, упруго-пластическая среда, модель локального взаимодействия, трехмерное моделирование.

* Выполнено при частичном финансировании в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки РФ (проект № 2014/134 2226), Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-593.2014.8) и РФФИ (13-08-00531_a, 13-08-00658_a, 15-38-20759_мол_a_вед).

Введение

Решение задач удара и проникания под углом к свободной поверхности пористых сред и геоматериалов проводится, в основном, численно-аналитическими методами [1–3], среди которых достаточно большой класс базируется на гипотезе локального взаимодействия [4]. Известны результаты расчетов силовых и кинематических характеристик взаимодействия конических ударников с грунтом при наклонном ударе в рамках модели локального взаимодействия (МЛВ) и трехмерной постановке [5–9]. Наблюдается достаточно хорошее качественное соответствие результатов и количественное совпадение осевой компоненты силы [10, 11]. Однако ошибка определения угловой скорости вращения, полученной в рамках рассматриваемых моделей, мала лишь на начальной стадии проникания [11]. При развитом проникании после полного погружения головной части конуса в грунт ошибка значительно возрастает. В настоящей работе анализируется влияние распределения напряжения вдоль боковой поверхности конического ударника на параметры его вращательного движения в упругопластической грунтовой среде.

1. Постановка задачи движения тела

Уравнения движения и вращения плоской фигуры вокруг центра масс C в проекциях на оси системы координат, связанной с телом, имеют вид [10, 11]:

$$M(\dot{v}_{Cr'} - \omega v_{Cz'}) = F_{r'}, \quad M(\dot{v}_{Cz'} + \omega v_{Cr'}) = F_{z'}, \quad J_C \dot{\omega} = K, \quad (1)$$

где M – масса тела; $v_{Cr'}$, $v_{Cz'}$ и $F_{r'}$, $F_{z'}$ – проекции векторов скорости v_C и силы F на оси подвижной системы координат r' и z' ; ω – проекция вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ на ось, перпендикулярную плоскости движения ($\omega_{r'} = \omega_{z'} = 0$) и проходящую через центр масс; J_C и K – момент инерции и момент сил относительно той же оси; точкой обозначено дифференцирование по времени.

В соответствии с одной из реализаций МЛВ предполагается, что нормальное напряжение, действующее на боковую поверхность конуса, может быть представлено в виде квадратичной зависимости от скорости, касательное напряжение определяется законом Кулона

$$\frac{\sigma_n}{\rho_0} = -h(v_n)(Av_n^2 + Bv_n + C), \quad \sigma_\tau = -k_f |\sigma_n| \operatorname{sgn} v_\tau, \quad (2)$$

где h – функция Хевисайда; A , B и C – постоянные коэффициенты, определяемые физико-механическими свойствами среды и скоростью ударника; ρ_0 – начальная плотность среды; k_f – коэффициент трения. Если $v_n < 0$, то $\sigma_n = 0$, что соответствует отрыву среды от тела. Коэффициенты A , B и C определяются в соответствии с известным подходом (spherical cavity expansion approximation) из решения задачи о расширении сферической полости в заданном диапазоне изменения скоростей [12–14].

Для конического ударника с углом полураствора β и высотой H после момента полного погружения тела и в случае его безотрывного обтекания потоком среды выражения (1) для компонент вектора силы сопротивления и момента сил с учетом (2) записываются [10] следующим образом:

$$\frac{F_{r'}}{S_0} = v_{Cr'} f_{r'}^0 + \omega f_{r'}^\omega, \quad \frac{F_{z'}}{S_0} = f_{z'}^0 + \omega f_{z'}^\omega, \quad \frac{K}{S_0} = v_{Cr'} k^0 + \omega k^\omega,$$

$$\begin{aligned}
f_{r'}^0 &= \gamma_1 \cos^2 \beta, & f_{r'}^\omega &= \left(\frac{1}{3} H - H \sin^2 \beta + z_C \cos^2 \beta \right) \gamma_1, \\
f_{z'}^0 &= C - B v_{Cz'} \sin \beta + A v_{Cz'}^2 \sin^2 \beta + \frac{1}{2} A v_{Cr'}^2 \cos^2 \beta, \\
f_{z'}^\omega &= A \left(\frac{1}{2} \gamma_2 H^2 \omega + \left(\frac{1}{3} - \sin^2 \beta \right) (\omega z_C + v_{r'}) H + z_C \cos^2 \beta \left(\frac{1}{2} \omega z_C + v_{Cr'} \right) \right), \\
k^0 &= \left(-\frac{2}{3} H + (z_C + H) \cos^2 \beta \right) \gamma_1, \\
k^\omega &= \left(\gamma_2 H^2 - \frac{4}{3} z_C H + 2 z_C H \cos^2 \beta + z_C^2 \cos^2 \beta \right) \gamma_1,
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\gamma_1 = A v_{Cz'} - \frac{1}{2} \frac{B}{\sin \beta}, \quad \gamma_2 = \frac{1}{2} \sin^2 \beta \operatorname{tg}^2 \beta - \frac{1}{3} \sin^2 \beta + \frac{1}{6} \cos^2 \beta,$$

$S_0 = \pi R^2$ – площадь основания тела, r_C, z_C – координаты центра масс ($r_C = 0$). Предположение о безотрывности обтекания конуса потоком упругопластической грунтовой среды подтверждается известными данными экспериментов [1, 6, 7] и численных расчетов [10, 11].

Решение системы уравнений плоскопараллельного движения твердого тела (1)–(3) осуществляется [10, 11] методом Рунге – Кутты четвертого порядка при заданных начальных условиях.

Для более достоверного определения угловой скорости вращения конического ударника модель (2) модифицируется. Так как предполагается зависимость нормального напряжения от скорости вдоль боковой поверхности тела вращения, то сила сопротивления движению кругового конуса с постоянной скоростью при $\omega = 0$ будет

$$F_z = 2\pi \operatorname{tg}^2 \beta \int_{-H}^0 \sigma_n (H + z) dz = \sigma_n S_0, \tag{4}$$

где σ_n – нормальное напряжение, постоянное вдоль боковой поверхности конуса и определяемое только скоростью его движения и коэффициентами A, B и C .

Однако то же самое значение осевой силы сопротивления (4) получается при отличном от постоянного распределения напряжений вдоль контактной поверхности. Например, при $\hat{\sigma}_n = ((1 + \delta) - 2\delta(1 + z/H)^2) \sigma_n$

$$F_z = 2\pi \operatorname{tg}^2 \beta \int_{-H}^0 \hat{\sigma}_n (H + z) dz = \sigma_n S_0 \tag{5}$$

при любых δ . В этом случае δ является дополнительным параметром, влияющим на угловую скорость вращения. Как показано в [14], распределение напряжений вдоль боковой поверхности острого конуса качественно и количественно близко к (5).

2. Результаты численных расчетов

Рассматривается задача проникания конического ударника по нормали и под углом $\theta = \pi/3$ к поверхности среды. Угол полураствора ударника $\beta = \pi/6$, масса $M = 40$ г, радиус основания конуса $R = 0,01$ м, высота $H = R/\operatorname{tg} \beta$, координаты центра масс $r_C = 0, z_C = -H/4$, момент инерции $J_C = 3M(4R^2 + H^2)/80$, начальная скорость $V_0 = 150$ м/с.

В начальный момент времени отлична от нуля только осевая компонента вектора скорости $V_z = V_0 = -15$ см/мс. Значения коэффициентов трехчленной МЛВ (2): $A = 1,2$, $B = 0,95V_0$ и $C = 0,034V_0^2$ [10, 11], коэффициент трения $k_f = 0$. Ранее было показано [10, 11] соответствие этих значений параметров МЛВ модели упругопластической среды с линейными зависимостями «давление – объемная деформация» и «предел текучести – давление» при скоростях удара 100–200 м/с.

На рис. 1а в зависимости от безразмерной площади маркерами приведены распределения напряжений вдоль образующей конического ударника, полученные в трехмерных расчетах нормального проникания в моменты времени 0,12, 0,2 и 0,3 мс (черный квадрат, светлый квадрат и черный треугольник соответственно), сплошными линиями приведены их линейные аппроксимации.

На рис. 1б приведены зависимости напряжений, отнесенные к величине σ_n , полученные по формуле (2) при соответствующих значениях скоростей проникания. В представленных координатах отмечается близкое к линейному распределение напряжения, определяемое выражением (5) при $\delta = 0,5$.

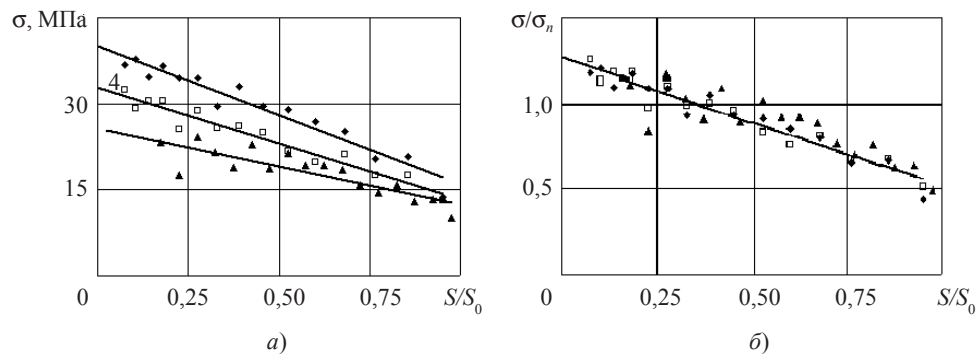


Рис. 1

Влияние величины δ на осевые параметры движения анализировалось на основе расчетов проникания конического ударника по нормали к свободной поверхности полупространства грунта. Постановка задачи и параметры модели соответствуют приведенным в [10]. На рис. 2 представлены осевые силы сопротивления (а) и скорости проникания (б), полученные в трехмерных расчетах (темные и светлые маркеры) и в рамках МЛВ (сплошная и штриховая линии соответствуют расчетам при $\delta = 0,5$ и 0).

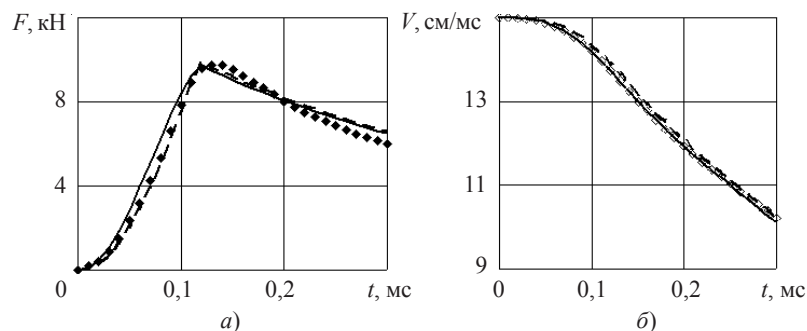


Рис. 2

Значение $\delta = 0$ соответствует постоянному распределению напряжения, определяемому МЛВ (2), $\delta = 0,5$ – модификации МЛВ (2) при учете (5). Отметим не-

существенное влияние распределения напряжения в форме (5) на силовые и кинематические параметры движения в осевом направлении.

Далее анализируется поведение угловых скоростей вращения во времени при различных положениях центра масс конуса с углом полураствора $\beta = \pi/6$, проникающего под углом $\theta = \pi/3$ к свободной поверхности грунта.

На рис. 3 приводятся угловые скорости вращения ω (а) и угол поворота ψ (б) в зависимости от времени (обозначения соответствуют принятым на рис. 2).

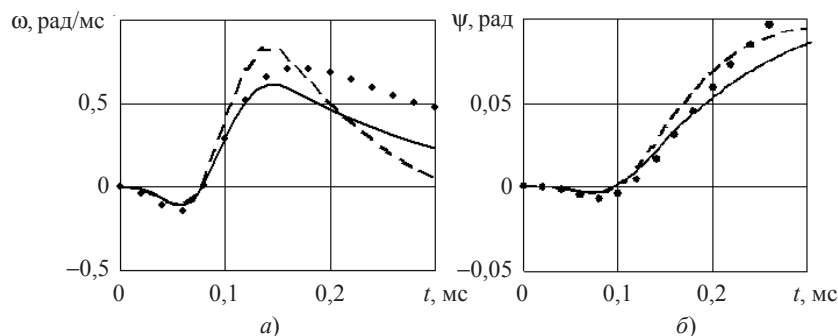


Рис. 3

Отметим, что результаты, полученные в рамках модификации МЛВ (5) при $\delta = 0,5$, лучше соответствуют результатам трехмерных расчетов, чем исходная МЛВ (2), предполагающая постоянное распределение напряжений вдоль поверхности ударника ($\delta = 0$). Наилучшее соответствие наблюдается на начальной стадии внедрения вплоть до полного погружения головной части тела (время погружения 0,15 мс).

Заключение

Применяемая МЛВ на базе полученного ранее решения задачи о расширении сферической полости хорошо описывает осевые компоненты векторов сил и скорости при проникании конических ударников как по нормали, так и под углом к свободной поверхности сжимаемой упругопластической среды. Однако угловая скорость вращения, возникающая при наклонном проникании, заметно отличается от результатов трехмерных расчетов. Результаты настоящей работы свидетельствуют о том, что распределение напряжений вдоль образующей конических ударников отличается от постоянного значения, полученного в рамках квадратичной МЛВ. Предложенная модификация МЛВ при учете линейного распределения напряжений в зависимости от изменения площади контактной поверхности конуса с углом полураствора $\beta = \pi/6$ позволила в два раза уменьшить ошибку определения угловой скорости на стадии развитого проникания.

Список литературы

1. Сагомоян А.Я. *Проникание*. М.: Изд-во МГУ, 1974. 299 с.
2. Баженов В.Г., Котов В.Л. *Математическое моделирование нестационарных процессов удара и проникания осесимметричных тел и идентификация свойств грунтовых сред*. М.: Физматлит, 2011. 208 с.
3. Баженов В.Г., Брагов А.М., Котов В.Л. *Экспериментально-теоретические исследования процессов проникания жестких ударников и идентификация свойств грунтовых сред* // Прикладная механика и техническая физика. 2009. Т. 50, № 6. С. 115–124.

4. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. *Ballistic impact: recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics. A Review* // Applied Mechanics Reviews. 2005. V. 58. P. 355–371.
5. Баженов В.Г., Котов В.Л. *Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе гипотезы плоских сечений* // Докл. РАН. 2008. Т. 423, № 4. С. 470–473.
6. Осипенко К.Ю. *Проникание тела вращения в упругопластическую среду* // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 2. С. 169–180.
7. Осипенко К.Ю. *Об устойчивости пространственного движения тела вращения в упругопластической среде* // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2012. № 2. С. 68–77.
8. Баженов В.Г., Котов В.Л. *Решение задач о наклонном проникании осесимметричных ударников в мягкие грунтовые среды на основе моделей локального взаимодействия* // Прикладная математика и механика. 2010. Т. 74. Вып. 3. С. 391–402.
9. Котов В.Л., Баландин В.В., Брагов А.М., Линник Е.Ю., Баландин В.В. *Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт* // Прикладная механика и техническая физика. 2013. Т. 54, №4. С. 114–125.
10. Котов В.Л., Константинов А.Ю., Кибец Ю.И., Тарасова А.А., Власов В.П. *Численное моделирование плоскопараллельного движения конических ударников в упругопластической среде* // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород ун-т, 2013. Вып. 75 (4). С. 47–55.
11. Котов В.Л., Константинов А.Ю. *Численное моделирование плоскопараллельного движения конических ударников в грунтовой среде на основе модели локального взаимодействия* // Вычислительная механика сплошных сред. 2014. Т. 7, №3. С. 225–233.
12. Котов В.Л. *Исследование применимости автотельного решения задачи о расширении сферической полости в сжимаемой среде для определения давления на поверхности контакта «ударник – грунт»* // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2008. Вып. 70. С. 123–131.
13. Котов В.Л., Линник Е.Ю., Тарасова А.А., Макарова А.А. *Анализ приближенных решений задачи о расширении сферической полости в грунтовой среде* // Проблемы прочности и пластичности / Нижегород. ун-т, 2011. Вып. 73. С. 58–63.
14. Баженов В.Г., Баландин В.В., Григорян С.С., Котов В.Л. *Анализ моделей расчета движения тел вращения минимального сопротивления в грунтовых средах* // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78. Вып. 1. С. 98–115.

References

1. Sagomonyan A.Ya. *Pronikanie*. M.: Izd-vo MGU, 1974. 299 s.
2. Bazhenov V.G., Kotov V.L. *Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnykh protsessov udara i pronikaniya osesimmetrichnykh tel i identifikatsiya svoystv gruntovykh sred*. M.: Fizmatlit, 2011. 208 s.
3. Bazhenov V.G., Bragov A.M., Kotov V.L. *Ekspiermental'no-teoreticheskie issledovaniya protsessov pronikaniya zhestkikh udarnikov i identifikatsiya svoystv gruntovykh sred* // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2009. T. 50, № 6. S. 115–124.
4. Ben-Dor G., Dubinsky A., Elperin T. *Ballistic impact: recent advances in analytical modeling of plate penetration dynamics-A Review* // Applied Mechanics Reviews. 2005. V. 58. P. 355–371.
5. Bazhenov V.G., Kotov V.L. *Reshenie zadach o naklonnom pronikanii osesimmetrichnykh udarnikov v myagkie gruntovye sredy na osnove gipotezy ploskikh secheniy* // Dokl. RAN. 2008. T. 423, № 4. S. 470–473.
6. Osipenko K.Yu. *Pronikanie tela vrashcheniya v uprugoplasticheskuyu sredu* // Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela. 2009. № 2. S. 169–180.
7. Osipenko K.Yu. *Ob ustoychivosti prostranstvennogo dvizheniya tela vrashcheniya v uprugoplasticheskoy srede* // Izv. RAN. Mekhanika tverdogo tela. 2012. № 2. S. 68–77.
8. Bazhenov V.G., Kotov V.L. *Reshenie zadach o naklonnom pronikanii osesimmetrichnykh udarnikov v myagkie gruntovye sredy na osnove modeley lokal'nogo vzaimodeystviya* // Prikladnaya matematika i mekhanika. 2010. T. 74. Vyp. 3. S. 391–402.

9. Kotov V.L., Balandin V.V., Bragov A.M., Linnik E.Yu., Balandin V.V. *Primenenie modeli lokal'nogo vzaimodeystviya dlya opredeleniya sily soprotivleniya vnedreniyu udarnikov v peschanyy grunt* // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2013. T. 54, №4. S. 114–125.

10. Kotov V.L., Konstantinov A.Yu., Kibets Yu.I., Tarasova A.A., Vlasov V.P. *Chislennoe modelirovanie ploskoparallel'nogo dvizheniya konicheskikh udarnikov v uprugoplasticheskoy srede* // Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhevuz. sb. / Nizhegorod un-t, 2013. Vyp. 75 (4). S. 47–55.

11. Kotov V.L., Konstantinov A.Yu. *Chislennoe modelirovanie ploskoparallel'nogo dvizheniya konicheskikh udarnikov v gruntovoy srede na osnove modeli lokal'nogo vzaimodeystviya* // Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred. 2014. T. 7, №3. S. 225–233.

12. Kotov V.L. *Issledovanie primenimosti avtomodel'nogo resheniya zadachi o rasshirenii sfericheskoy polosti v szhimaemoy srede dlya opredeleniya davleniya na poverkhnosti kontakta «udarnik – grunt»* // Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhevuz. sb. / Nizhegorod. un-t, 2008. Vyp. 70. S. 123–131.

13. Kotov V.L., Linnik E.Yu., Tarasova A.A., Makarova A.A. *Analiz priblizhennykh resheniy zadachi o rasshirenii sfericheskoy polosti v gruntovoy srede* // Problemy prochnosti i plastichnosti / Nizhegorod. un-t, 2011. Vyp. 73. S. 58–63.

14. Bazhenov V.G., Balandin V.V., Grigoryan S.S., Kotov V.L. *Analiz modeley rascheta dvizheniya tel vrashcheniya minimal'nogo soprotivleniya v gruntovykh sredakh* // Prikladnaya matematika i mekhanika. 2014. T. 78. Vyp. 1. S. 98–115.

THE EFFECT OF THE STRESS DISTRIBUTION ALONG THE GENERATRIX ON THE MOTION PARAMETERS OF CONICAL STRIKERS IN A SOIL MEDIUM

Kotov V.L.¹, Konstantinov A.Yu.^{1,2}, Tarasova A.A.¹, Linnik E.Yu.¹

¹Research Institute of Mechanics of State University of Nizhni Novgorod,
Nizhni Novgorod, Russian Federation

²Bakhirev State Research Institute of Engineering, Dzerzhinsk, Russian Federation

Plane parallel motion of conical bodies in an elastoplastic soil is modelled using the locality hypothesis in the frame of the local interaction model. The parameters of the local interaction model with a quadratic velocity are determined based on the solution of a one-dimensional problem of the constant-velocity expansion of a spherical cavity from a point in an infinite medium. The model of the elastoplastic medium includes linear relationships «pressure-volume deformation» and «yield strength-pressure». Earlier, inertial motion of a conical striker normal and oblique to the free surface of the half-space occupied by the elastoplastic soil medium was studied. It was found that the local interaction model with a quadratic velocity adequately enough describing the axisymmetric motion of the striker is also applicable for representing the initial stage of oblique penetration into the soil. The present article demonstrates that the angular rotation velocity depends on the distribution along the generatrix of the cone in an oblique impact. The behavior of angular velocities in time is analyzed; satisfactory quantitative and qualitative agreement is noted for the results obtained in 3D computations and in the frame of the modal interaction model accounting for the inconstant distribution of contact pressures along the generatrix of an acute cone.

Keywords: conical striker, impact, oblique penetration, elastoplastic medium, local interaction model, 3D modeling.