

УДК 539.374

ХАРАКТЕРНЫЕ ОСОБЕННОСТИ СЕМЕЙСТВ КРИВЫХ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ

© 2015 г.

Хохлов А.В.

*НИИ механики Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

andrey-khokhlov@ya.ru

Поступила в редакцию 19.01.2015

Аналитически исследованы общие свойства семейств теоретических диаграмм деформирования с постоянной скоростью нагружения или деформации для линейного интегрального определяющего соотношения вязкоупругости с произвольной функцией ползучести, проведен сравнительный анализ свойств диаграмм деформирования при постоянных скоростях нагружения и деформации и их зависимости от характеристик функции релаксации. В частности, доказано, что все теоретические диаграммы деформирования всегда монотонны и выпуклы вверх, их мгновенный и длительный модули не зависят от скоростей нагружения и деформации, а при стремлении скоростей нагружения и деформации к бесконечности семейства диаграмм деформирования всегда сходятся (снизу) к предельной прямой (мгновенной диаграмме деформирования). Выявлены характерные особенности диаграмм деформирования трех классов моделей: с регулярной, неограниченной и сингулярной функциями релаксации. Доказано, что у регулярных моделей диаграммы деформирования с постоянной скоростью деформирования лежат ниже, чем диаграммы деформирования с постоянной скоростью нагружения, полученной умножением скорости деформации на мгновенный модуль модели. Общие и специфические свойства диаграмм деформирования проиллюстрированы на примерах двух-, трех- и четырехзвенных классических моделей.

Выявлен набор атрибутивных свойств теоретических диаграмм деформирования, наличие которых надо установить у экспериментальных диаграмм перед попыткой моделирования поведения конкретных (классов) материалов в рамках линейной теории. Эти признаки могут служить индикаторами (не)адекватности линейной теории вязкоупругости, удобными для экспериментальной проверки, они позволяют точнее очертить область ее применимости.

Ключевые слова: функции ползучести и релаксации, скорость нагружения, теоретические диаграммы деформирования, мгновенный (длительный) модуль, регулярные и сингулярные модели, индикаторы адекватности линейной теории, вязкоупругость.

Настоящая статья – это продолжение цикла работ [1–4] по качественному анализу линейного определяющего соотношения (ОС) вязкоупругости. Качественный анализ теоретических кривых ОС – важная стадия аттестации любого ОС (см. [5–8]),

которая включает в себя выявление ограничений на материальные функции, арсенала возможностей ОС, списка моделируемых термомеханических эффектов и области адекватности, разработку способов идентификации, верификации и численной реализации, создание технического паспорта-руководства модели.

Цель статьи – изучение общих математических свойств семейств диаграмм деформирования (ДД) σ – ε при постоянных скорости нагружения (СН) и скорости деформирования (СД). Их исследование в общем виде и даже краткий перечень, к сожалению, отсутствуют в монографиях и обзорах по вязкоупругости и механике полимеров, в частности в [9–17]. В качестве примеров рассматриваются те же классические модели, что и в [3, 4], но внимание в настоящей статье сосредоточено на ДД при постоянных СН и их сопоставлении с ДД при постоянных СД.

В статье приняты следующие сокращения: ФР и ФП (КР, КП) – функции (кривые) релаксации и ползучести, ТДД – теоретическая, ЭДД – экспериментальная ДД материала, РеМ – регулярные модели (с ФП: $\Pi(0) \neq 0$); СиМ – сингулярные модели (ФР содержит слагаемое $\eta\delta(t)$ с δ -функцией); МСТ – модель стандартного тела (последовательное соединение моделей Максвелла и Фойгта; в англоязычной литературе – «модель Бюргерса»); $y(0) := y(0+)$ – предел справа в точке $t = 0$.

1. Линейное определяющее соотношение вязкоупругости

Напряжение и деформация связаны в линейной вязкоупругости интегральными операторами, инвариантными относительно сдвигов по времени [9–17]:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)d\varepsilon(\tau), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)d\sigma(\tau), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Эти ОС описывают одномерные изотермические процессы в структурно-стабильных материалах; $R(x)$ и $\Pi(x)$ ($x \geq 0$) называются функциями релаксации и ползучести. Операторами вида (1) задаются и трехмерные ОС изотропной вязкоупругости. На классе непрерывных кусочно-гладких при $t \geq 0$ функций операторы (1) действуют по формуле:

$$\sigma(t) = R(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau, \quad \varepsilon(t) = \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Обычно ФР и ФП предполагаются непрерывными положительными монотонными функциями при $x > 0$, ФР может иметь особенность в точке $x = 0$. В [1–4] детально исследованы свойства всех основных теоретических кривых ОС (1) с произвольными ФП и ФР (кривых ступенчатой ползучести, релаксации с начальной стадией деформирования, ДД при постоянных СД, скоростной чувствительности и др.) и выявлены дополнительные ограничения, обеспечивающие феноменологическую адекватность ОС (1): ФР и ФП положительны и дифференцируемы, ФР убывает и выпукла вниз, а ФП возрастает и выпукла вверх при $x > 0$.

Операторы (1) взаимно обратны, и потому ФП и ФР связаны уравнением

$$\int_0^t \dot{R}(t-\tau)\Pi(\tau)d\tau + R(0)\Pi(t) = 1, \quad \text{или} \quad \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)R(\tau)d\tau + \Pi(0)R(t) = 1, \quad t > 0. \quad (3)$$

Зная ФР, можно найти ФП из уравнения (3), и наоборот [3], поэтому одномерное ОС (1) содержит лишь одну материальную функцию. При $\Pi(0) \neq 0$ (3) и (2) – уравнения Вольтерры второго рода с ограниченными (если $R(0+) < \infty$) ядрами, и

потому они однозначно разрешимы в пространствах $L_1[0, b]$. Случай $\Pi(0) = 0$ приводит к уравнению Вольтерры первого рода, некорректным задачам, нерегулярным моделям с особенностью в нуле у ФР, КР и касательного модуля, вертикальности мгновенной ДД и т.п. [1–4].

Анализ показал, что целесообразно выделять три класса моделей:

1) регулярные – у которых $\Pi(0) > 0$ (и тогда $R(0) < \infty$);
 2) сингулярные – с ФР, содержащей слагаемое вида $\eta\delta(t)$, $\eta > 0$ (ФР $R = \eta\delta(t)$ задает ньютоновскую жидкость с ОС $\sigma = \eta\dot{\epsilon}$ и входит слагаемым в ФР «половины» реологических моделей – см. ниже);

3) нерегулярные модели с ФР, не содержащей слагаемого $\eta\delta(t)$, но имеющей интегрируемую особенность в точке $t = 0$ ($R(0+) = +\infty$).

Качественные свойства теоретических кривых моделей трех этих классов заметно отличаются друг от друга [1–4]. Третий класс занимает промежуточное положение между первыми двумя. К нему относится, например, ФР $R(t) = At^{-\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$ (ее ФП имеет вид $\Pi(t) = A^{-1}C(\alpha)t^\alpha$ и обладает не только свойством $\Pi(0) = 0$, как и СиМ, но и свойством $\Pi(0) = \infty$, переходным к $\Pi(0) \neq 0$, характеризующим РеМ).

2. Структурные реологические модели, их классы эквивалентности

В виде (1) представимы и все модели, собранные из линейных пружин и демпферов посредством последовательных и параллельных соединений. Схемы и названия всех двух-, трех- и четырехзвенных моделей (в терминологии нет единства) приведены в [4]. Можно доказать, что множество всех несократимых n -звенных моделей распадается ровно на два класса эквивалентности: РеМ- n и СиМ- n (структурно различные модели эквивалентны, если задаются одинаковыми семействами ФП или ФР). В частности, эквивалентны [1]: 1) трехзвенные РеМ Пойнтинга – Томсона и Кельвина [4], 2) две трехзвенные СиМ [4], 3) все четыре РеМ-4 [4] эквивалентны МСТ и параллельному соединению моделей Максвелла с разными временами релаксации, 4) все четыре СиМ-4 [4] эквивалентны последовательному соединению двух моделей Фойгта с разными временами ползучести (retardation time). Например, семейство ФП

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \alpha, \beta \geq 0, \gamma \in [0, \beta] \quad (4)$$

порождает все РеМ-4 при $\gamma \in (0; \beta)$, $\alpha, \beta > 0$, а при $\alpha = 0$ – РеМ-3. Так как $\Pi(0) = \beta - \gamma$, то ФП (4) порождает СиМ, когда $\gamma = \beta$: при $\lambda\beta = 0$ – ньютоновскую жидкость, при $\alpha = 0$ – модель Фойгта, а при $\alpha > 0$ получаются все СиМ-3 (см. раздел 7). При $\gamma = 0$ семейство (4) дает модель Максвелла (РеМ-2). Случай $\gamma < 0$ приводит к нарушению ограничения $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$, что влечет за собой возрастание кривой обратной ползучести (противоречие с данными испытаний материалов) [1, 2].

3. Общие свойства диаграмм σ – ϵ при постоянных скоростях деформирования

Уравнение ДД с постоянной СД получается подстановкой в ОС (1) процесса $\epsilon = at$: $\sigma(t) = a \int_0^t R(t - \tau) d\tau$ или $\sigma(t) = P(t)\epsilon$, где $P(t) = t^{-1} \int_0^t R(\tau) d\tau$, $t > 0$ – осреднение ФР. Исключив параметр $t = \epsilon/a$, получим семейство ДД в явной форме:

$$\sigma(\epsilon, a) = a \int_0^{\epsilon/a} R(\tau) d\tau, \quad \text{или} \quad \sigma(\epsilon, a) = \int_0^{\epsilon} R(x/a) dx, \quad \text{или} \quad \sigma(\epsilon, a) = P(\epsilon/a)\epsilon. \quad (5)$$

Легко показать, что $P(t)$ – убывающая непрерывно дифференцируемая функция; $P(t) > R(t)$ при $t > 0$, ибо $R(t)$ убывает ($P(t_*) = R(t_*)$ лишь когда $R(t) = \text{const}$ на $[0, t_*]$, то есть когда (1) вырождается в закон Гука). В [2] доказано, что всегда $P(t) > 1/\Pi(t) > R(t)$; $P(0+) = R(0)$, $P(+\infty) = R(+\infty)$; $\dot{P}(t) = t^{-1}(R(t) - P(t)) < 0$, $\dot{P}(0+) = \dot{R}(0+)/2$ (если $\dot{R}(0+) < \infty$); при $t \rightarrow \infty$ $\dot{P}(t) = o(t^{-1})$.

Секущий и касательный модули ДД (5): $\sigma(\varepsilon, a)/\varepsilon = P(\varepsilon/a)$, $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = R(\varepsilon/a)$.

Так как $\sigma'(\varepsilon) = \sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) > 0$, любая ДД возрастает по ε . Из убывания ФР следует, что при $a > 0$ модуль $\sigma'(\varepsilon)$ убывает по ε , потому любая ДД всегда выпукла вверх на луче $\varepsilon > 0$.

Семейство ДД (5) возрастает по a , так как $P(\varepsilon/a)$ возрастает по a .

ДД (5) зависит от СД a , но начальный касательный модуль (модуль сдвига, объемный модуль и т.п.) не зависит от СД: $E := \sigma'(0) = R(0)$. Если $R(0) < \infty$, любая ДД лежит ниже прямой $\sigma = E\varepsilon$, так как $P(t) < P(0) = R(0)$.

При $a \rightarrow +\infty$ семейство ДД (5) любой регулярной модели сходится к прямой $\sigma = E\varepsilon$ равномерно на любом отрезке оси ε :

$$\sup_{[0, \omega]} |\sigma(\varepsilon) - E\varepsilon| = \sup_{[0, \omega]} \varepsilon |P(\varepsilon/a) - E| = \omega |P(\omega/a) - E| \rightarrow 0$$

при $a \rightarrow \infty$, так как $P(x)$ убывает и $P(+0) = E$. Поэтому $\sigma = E\varepsilon$ – мгновенная ДД ОС (1). Если модель не регулярна, то $E = \infty$, касательная к любой ДД в нуле вертикальна, а семейство ДД $\sigma(\varepsilon, a)$ равномерно сходится при $a \rightarrow \infty$ к прямой $\varepsilon = 0$.

Касательный и секущий модули ДД стремятся при $\varepsilon \rightarrow \infty$ к пределу ФР $r = R(+\infty) = P(+\infty)$. Длительный модуль r тоже не зависит от СД. При $a \rightarrow 0$ семейство ДД (5) всегда сходится (сверху) к прямой $\sigma = r\varepsilon$ равномерно на любом отрезке полуоси $\varepsilon > 0$:

$$\sup_{[\alpha, \omega]} |\sigma(\varepsilon) - r\varepsilon| = \sup_{[\alpha, \omega]} \varepsilon |P(\varepsilon/a) - r| < \omega |P(\alpha/a) - r| \rightarrow 0$$

при $a \rightarrow 0$, так как $P(x)$ убывает.

Нарушение одного из установленных выше свойств у ЭДД материала – достаточный признак неприменимости ОС (1). В частности, оно не годится для материалов, у которых обнаруживается зависимость мгновенного или длительного модулей от СД (ряда керамических материалов, полимеров, композитов, костной ткани, твердого топлива и т.п.). Однако порой линейным ОС пытаются описать материалы, ЭДД которых имеют разные (это подчеркивается авторами) касательные в нуле при разных СД [13].

При $\varepsilon \rightarrow \infty$ имеем $\sigma/\varepsilon \rightarrow r$, и ДД обладает асимптотой лишь тогда, когда сходится интеграл $I = \int_0^{+\infty} [R(\tau) - r]d\tau$:

$$q = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} (\sigma - r\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_0^\varepsilon [R(x/a) - r]dx = a \int_0^{+\infty} [R(\tau) - r]d\tau.$$

Тогда любая ДД (5) имеет асимптоту $\sigma = r\varepsilon + q(a)$, ее угловой коэффициент не зависит от a , а $q(a) = aI$. Величина $q(a)$ возрастает, так как $I > 0$. Поскольку ФР убывает, то всегда $\sigma(\varepsilon, a) < r\varepsilon + Ia$, то есть $\sigma(\varepsilon, a)$ стремится к асимптоте снизу. В этом случае при $a \rightarrow 0$ семейство ДД сходится к прямой $\sigma = r\varepsilon$ равномерно на всем луче $\varepsilon \geq 0$, ибо $|\sigma(\varepsilon, a) - r\varepsilon| \leq Ia$.

Параметры E , r , $I/(E - r)$ определяют поведение ФР в точке $t = 0$ и при $t = \infty$ и среднюю скорость ее убывания (для моделей РеМ-2 и РеМ-3 $I/(E - r)$ совпадает с временем релаксации), а значит, управляют свойствами ДД и ТКР. Для идентифика-

ции ОС (1) (по ЭКР и ЭДД) удобно задавать ФР в виде семейства убывающих выпуклых вниз функций, зависящего от этих трех параметров (и, возможно, еще и от других). Например

$$R(t) = (E - r)e^{-\mu t} + r, \quad E > r \geq 0, \quad \mu > 0. \quad (6)$$

Семейство ФР (6) при $r > 0$ порождает все трехзвенные РеМ. Этой ФР, согласно (3), соответствует ФП (4) с $\alpha = 0$, $\beta = r^{-1}$, $\gamma = r^{-1} - E^{-1}$, $\lambda/\mu = 1 - \gamma\beta^{-1} = r/E$ (то есть всегда $\lambda < \mu$, время релаксации μ^{-1} меньше времени ползучести λ^{-1} , их отношение λ/μ принимает все значения из интервала $(0, 1)$). При $r = 0$ (6) вырождается в модель Максвелла.

Осреднение ФР (6) и ДД РеМ-3 имеет вид:

$$P(t) = (E - r)\mu^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\mu t}) + r, \quad \sigma(\varepsilon, a) = (E - r)\mu^{-1}a(1 - e^{-\mu\varepsilon/a}) + r\varepsilon. \quad (7)$$

При любом a ДД обладает асимптотой $\sigma = r\varepsilon + Ia$, $I = (E - r)\mu^{-1}$.

На рис. 1 приведены ДД РеМ-3 (черные кривые) с $r = 1$, $E = \eta = 10$, $\mu = 1$ ($\beta = 1$, $\gamma = 0,9$, $\lambda = 0,1$) и модели Максвелла (розовые ДД) для разных СД: $a = 0,01; 0,1; 0,2; 0,3; 1$. При $a \rightarrow \infty$ оба семейства ДД сходятся к прямой $\sigma = E\varepsilon$ (синяя линия). Асимптоты ДД Максвелла $\sigma = \eta a$ (зеленые прямые) совпадают с ДД вязкого элемента. Красные прямые – ДД модели Фойгта ($R = \eta\delta(t) + r$, $r = 1$, $\eta = 10$, $\sigma = r\varepsilon + \eta a$); они совпадают с асимптотами ДД РеМ-3 (7) при тех же СД. При $a \rightarrow \infty$ семейство ДД модели Фойгта сходится к вертикальному лучу $\varepsilon = 0$. При $a \rightarrow 0$ ДД РеМ-3 и модели Фойгта сходятся к прямой $\sigma = r\varepsilon$. При $\gamma \rightarrow \beta - 0$ имеем: $E \rightarrow \infty$, $\mu \rightarrow \infty$, $\lambda/\mu \rightarrow 0$; ФП, ФР и ДД РеМ-3 сходятся к ФП, ФР и ДД модели Фойгта с $r = \beta^{-1}$ и $\eta = \lim (E - r)/\mu = (\beta\lambda)^{-1}$; голубая кривая – ДД (7) при $\beta = 1$, $\gamma = 0,99$, $\lambda = 0,1$ (тогда $r = 1$, $E = 100$, $\eta = 10$ и $\mu = 10$) для СД $a = 0,3$.

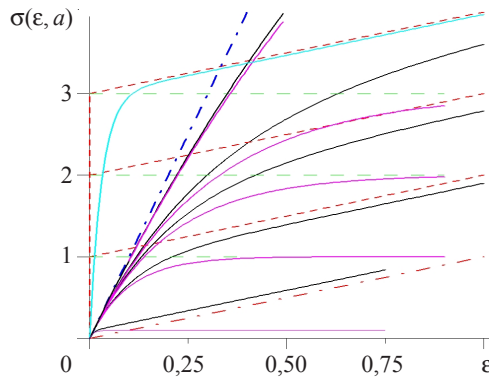


Рис. 1

4. Общие свойства диаграмм σ - ε при постоянных скоростях нагружения

ДД с постоянной СН получается подстановкой в ОС (1) процесса $\sigma = bt$:

$$\varepsilon(\sigma, b) = \int_0^{\sigma} \Pi(x/b) dx \quad \text{или} \quad \varepsilon(\sigma, b) = \Theta(\sigma/b)\sigma, \quad (8)$$

где

$$\Theta(t) = t^{-1} \int_0^t \Pi(\tau) d\tau, \quad t > 0.$$

Осреднение ФП $\Theta(t)$ – возрастающая непрерывно дифференцируемая функция при $t > 0$ и $\Theta(t) < \Pi(t)$, ибо $\Pi(t)$ возрастает; $\Theta(0+) = \Pi(0+)$, $\Theta(+\infty) = \Pi(+\infty)$, $\dot{\Theta}(0+) = = \dot{\Pi}(0+)/2$. Можно доказать [1], что всегда $\Theta(t)P(t) > 0,5$ и $P(t)/P(0) + \Theta(t)/\Theta(0) > 2$ при $t > 0$.

Касательный модуль $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b) = \varepsilon'_\sigma(\sigma, b)^{-1} = \Pi(\sigma/b)^{-1}$.

Так как $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b) > 0$, то ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ *возрастает по ε* . Поскольку ФП возрастает, то $\varepsilon'_\sigma(\sigma, b)$ возрастает по σ и убывает по b , а $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, b)$ убывает по ε и возрастает по b . Поэтому для любого $b > 0$ кривые $\varepsilon(\sigma, b)$ выпуклы вниз, а ДД $\sigma(\varepsilon, b)$ *всегда выпуклы вверх*. Семейство ДД (8) убывает по b , поскольку $\Theta(\sigma/b)$ убывает по b (ведь $\dot{\Theta}(t) > 0$), а семейство ДД в форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ *возрастает по b* (выше СН – выше ДД).

ДД (8) зависит от СН, но *мгновенный модуль* (модуль сдвига, объемный модуль и т.п.) *не зависит от скорости нагружения*: $E := \sigma'_\varepsilon(0, b) = \Pi(0)^{-1}$ (для ФП с $\Pi(0) = 0$ будет $E = \infty$). Любая ДД (8) лежит выше (по оси ε) прямой $\varepsilon = \Pi(0)\sigma$, так как $\Theta(t) > \Theta(0+) = \Pi(0)$, а все ДД в форме $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ лежат ниже (по оси ε) этой прямой.

При СН $b \rightarrow \infty$ семейство ДД $\varepsilon(\sigma, b)$ *любой регулярной модели сходится сверху* (а семейство $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ – снизу) к прямой $\varepsilon = \sigma/E$ равномерно на любом отрезке оси σ :

$$\sup_{[0, \omega]} |\varepsilon - \sigma/E| = \sup_{[0, \omega]} \sigma |\Theta(\sigma/b) - \Pi(0)| = \omega |\Theta(\omega/b) - \Pi(0)| \rightarrow 0 \text{ при } b \rightarrow \infty,$$

ибо $\dot{\Theta}(t) > 0$ и $\Theta(0+) = \Pi(0)$. Поэтому прямая $\sigma = E\varepsilon$ – мгновенная ДД, описываемая ОС (1). К ней же сходится и семейство ДД при постоянной СД, и семейство изохронных кривых ползучести [2, 3].

Так как для любой СН функция $\sigma'_\varepsilon(0, b)$ убывает по ε и ограничена снизу, то при $\varepsilon \rightarrow \infty$ существует предел $E_\infty(b)$. Если ФП ограничена, то $E_\infty = 1/\Pi_\infty = R_\infty = r > 0$; если же ФП не ограничена, то $E_\infty = 0$. Таким образом, *длительный модуль r не зависит от СН b* . Секущий модуль $E_s = \sigma/\varepsilon = \Theta(\sigma/b)^{-1}$ также стремится к r при $\sigma \rightarrow \infty$, так как $\Theta(+\infty) = \Pi(+\infty)$.

ДД (8) имеет асимптоту при $\sigma \rightarrow \infty$ лишь тогда, когда ФП ограничена и сходится интеграл $\int_0^{+\infty} [\Pi_\infty - \Pi(\tau)]d\tau = Y > 0$. Ее уравнение: $\varepsilon = \Pi_\infty\sigma - bY$, или $\sigma = r\varepsilon + rYb$, $r > 0$.

Угловой коэффициент не зависит от СН b и совпадает с коэффициентом асимптоты ДД (5) с постоянной СД. Все ДД (8) стремятся к асимптоте снизу. Этот результат (и большинство свойств ДД) аналогичен критерию существования асимптоты у ДД (5).

Из наличия у ДД (8) асимптоты $\sigma = r\varepsilon + rYb$ следует, что, когда СН $b \rightarrow 0$, семейство ДД $\sigma = \sigma(\varepsilon, b)$ сходится (сверху) к прямой $\sigma = r\varepsilon$, то есть к ДД упругой модели. Сходимость равномерна на всем луче $\varepsilon \geq 0$, так как $|\sigma(\varepsilon, b) - r\varepsilon| \leq brY$.

Необходимое ограничение $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$ на ФП [1, 2] также индуцирует ограничение на форму ДД (8): из него следует, что кривизна ДД $\kappa(\varepsilon)$ монотонно убывает и $\kappa(\infty) = 0$ [1].

Для моделей с ФП (4) осреднение ФП $\Theta(t) = 0,5\alpha t + \beta - \gamma\lambda^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\lambda t})$, а ДД имеет вид:

$$\varepsilon(\sigma, b) = 0,5\alpha b^{-1}\sigma^2 + \beta\sigma - \gamma\lambda^{-1}b(1 - e^{-\lambda\sigma/b}), \quad \sigma > 0. \quad (9)$$

Для РеМ-4 (МСТ) $\alpha \neq 0$ и $\gamma \in (0, \beta)$, ФП не ограничена, и ДД (9) не имеют асимптот. При $\alpha = 0$ и $\gamma \in (0, \beta]$ (РеМ-3, а при $\gamma = \beta$ – модель Фойгта) $\Pi(\infty) = \beta < \infty$,

$Y = \gamma/\lambda$, $r = \beta^{-1}$ и ДД имеет асимптоту $\sigma = r\varepsilon + \gamma(\lambda\beta)^{-1}b$. При $\gamma = \beta$ и $\alpha > 0$ (4) порождает все СиМ-3; у них $E := \sigma'_\varepsilon(0+, b) = \infty$, а асимптоты у ДД (9) нет, так как $\Pi(\infty) = \infty$.

На рис. 2 приведены ДД (9) при СН $b = 1$ для моделей (4) с $\lambda = 0,1$; $\beta = 1$. В порядке увеличения податливости: красная кривая – ДД модели Фойгта (с $\alpha = 0$, $\beta = 1$), синяя – ДД СиМ-3 (с $\alpha = 0,1$, $\gamma = \beta = 1$), голубая – РеМ-3 (с $\alpha = 0$; $\gamma = 0,5$), черная – РеМ-4 (с $\alpha = 0,1$; $\gamma = 0,5$), розовая – модель Максвелла (с $\gamma = 0$, $\alpha = 0,1$). Последняя служит границей между допустимыми и недопустимыми (см. раздел 2) ФП семейства (4) с $\gamma < 0$ (желтая кривая, $\gamma = -5$). Штрихпунктирные линии – ДД тех же моделей для меньшей СН $b = 0,1$. Необходимо отметить, что модели с $\alpha = 0$ (с ограниченной ФП и асимптотами ДД) менее чувствительны к СН.

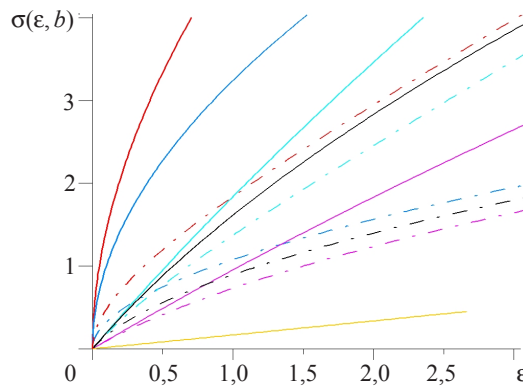


Рис. 2

5. ДД регулярных моделей Кельвина и стандартного тела (РеМ-3 и РеМ-4)

При $\alpha, \beta > 0$, $\gamma \in (0, \beta)$ ФП (4) порождает МСТ (РеМ-4). Ее ФР [2, 3] имеет вид:

$$R(t) = Ae^{-\mu_1 t} + Be^{-\mu_2 t}, \quad (10)$$

$$\mu_i = 0,5(\beta - \gamma)^{-1}(\alpha + \beta\lambda \mp \sqrt{D}) > 0,$$

$$D = (\alpha + \beta\lambda)^2 - 4(\beta - \gamma)\alpha\lambda = (\alpha - \beta\lambda)^2 + 4\gamma\alpha\lambda > 0,$$

$$A = \frac{\lambda - \mu_1}{\sqrt{D}} > 0, \quad B = \frac{\mu_2 - \lambda}{\sqrt{D}} > 0.$$

Всегда $0 < \mu_1 < 1 < \mu_2$ [1, 3], $\mu_2 - \mu_1 = (\beta - \gamma)^{-1}\sqrt{D}$.

ФР (10) положительна, убывает и выпукла вниз, то есть допустима; $r = R(\infty) = 0$, $\Pi(\infty) = \infty$, $R(0) = A + B = (\beta - \gamma)^{-1}$, $\Pi(0) = \beta - \gamma$, $\dot{R}(0) = -(\alpha + \lambda\gamma)(\beta - \gamma)^{-2}$, $\dot{\Pi}(0) = \alpha + \lambda\gamma$.

Так как (10) – сумма ФР двух моделей Максвелла, то МСТ эквивалентна параллельному соединению моделей Максвелла с различными временами релаксации $\tau_i = 1/\mu_i$.

ДД МСТ при постоянной СН задаются уравнением (9), асимптот не имеют.

Осреднение ФР (10) и ДД МСТ при постоянной СД имеет вид:

$$P(t) = A(\mu_1 t)^{-1}(1 - e^{-\mu_1 t}) + B(\mu_2 t)^{-1}(1 - e^{-\mu_2 t}),$$

$$\sigma(\varepsilon, a) = a[A\mu_1^{-1}(1 - e^{-\mu_1 \varepsilon/a}) + B\mu_2^{-1}(1 - e^{-\mu_2 \varepsilon/a})]. \quad (11)$$

ДД МСТ (11) – сумма ДД двух моделей Максвелла. Очевидно, что $r = 0$ и при $\varepsilon \rightarrow \infty$ ДД имеет горизонтальную асимптоту $\sigma = a[A\mu_1^{-1} + B\mu_2^{-1}]$, то есть $\sigma = a/\alpha$. При $a \rightarrow 0$ семейство ДД равномерно сходится к $\sigma \equiv 0$ на луче $\varepsilon \geq 0$. Таким образом, ДД МСТ (как и ее кривые релаксации) качественно не отличаются от ДД (и КР) модели Максвелла (но кривые ползучести МСТ уже не прямолинейны). При $a \rightarrow 0+$ (тогда $\mu_1 \rightarrow 0, \mu_2 \rightarrow \mu, A \rightarrow 1/\beta$) семейство ДД МСТ сходится к ДД РеМ-3 (6), а при $\gamma \rightarrow \beta-0$ (тогда $E = (\beta - \gamma)^{-1} \rightarrow \infty, \dot{R}(0) \rightarrow -\infty, \mu_1 \rightarrow \nu = \alpha\lambda/(\alpha + \beta\lambda), \mu_2 \rightarrow \infty, B \rightarrow \infty, \tau_2 \rightarrow 0$) – к ДД СиМ-3.

При $\alpha = 0$ и $\gamma \in (0, \beta)$ МСТ (4) вырождается в РеМ-3, то есть модель Кельвина (см. раздел 3): $\Pi(t) = \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \mu_1 = 0, \mu_2 = \mu = \beta\lambda/(\beta - \gamma), A = \beta^{-1}, B = \gamma\beta^{-1}(\beta - \gamma)^{-1}$ и $R(t) = A + B e^{-\lambda t}; \Pi(0) = \beta - \gamma, \Pi(\infty) = \beta, \dot{R}(0) = A + B = (\beta - \gamma)^{-1}, \dot{R}(\infty) = A = \beta^{-1} \neq 0; \lambda/\mu = \Pi(0)/\Pi(\infty)$. Отличия РеМ-3 от РеМ-4 и РеМ-2 – ограниченная ФП и ненулевой длительный модуль.

ДД РеМ-3 при постоянной СД задается уравнением (7), ее асимптота при $\sigma \rightarrow \infty$ имеет вид $\sigma = A\varepsilon + B\mu^{-1}a$ или $\sigma = \beta^{-1}\varepsilon + \gamma\beta^{-2}\lambda^{-1}a$. Осреднение ФП и ДД при постоянной СН:

$$\Theta(t) = \beta - \gamma\lambda^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\lambda t}), \quad \varepsilon(\sigma, b) = \beta\sigma - \gamma\lambda^{-1}b(1 - e^{-\lambda\sigma/b}). \quad (12)$$

ДД (12) имеет асимптоту $\varepsilon = \beta\sigma + \gamma\lambda^{-1}b$ или $\sigma = \beta^{-1}\varepsilon + \gamma\lambda^{-1}\beta^{-1}b$. Для СН $b = = E_\infty a = \beta^{-1}a$ асимптоты ДД при постоянных СН и СД совпадают. Для СН $b = = Ea = (\beta - \gamma)^{-1}a$ асимптота ДД (12) $\sigma = \beta^{-1}\varepsilon + \gamma\lambda^{-1}\beta^{-1}(\beta - \gamma)^{-1}a$ лежит выше, чем асимптота ДД (7).

На рис. 3 приведены ДД моделей РеМ-3 (7), (12) с $\lambda = 0,1, \beta = 1, \gamma = 0,9$ (тогда $\mu = 1, E = 10, r = A = 1$) при постоянных СД $a = 0,1; 0,2; 0,3$ (черные штриховые линии) и постоянных СН: черные сплошные линии – при $b = ra$ (когда ДД (7) и (12) имеют общие асимптоты $\sigma = \varepsilon + 9a$), а голубые – при $b = Ea = 10a$ (асимптоты ДД (12): $b = \varepsilon + 90a$). Прямая $\sigma = E\varepsilon$ (красный штрихпунктир) – мгновенная ДД, к которой сходятся снизу семейства ДД РеМ-3 (7) и (12) при $a \rightarrow \infty, b \rightarrow \infty$. Розовые кривые – ДД модели Максвелла ($r = 0, \gamma = 0$) с такими же $\mu = 1$ и $E = 10$ (то есть с $\alpha = \beta = 0,1$) при $a = 0,1$ и $b = Ea = 1$.

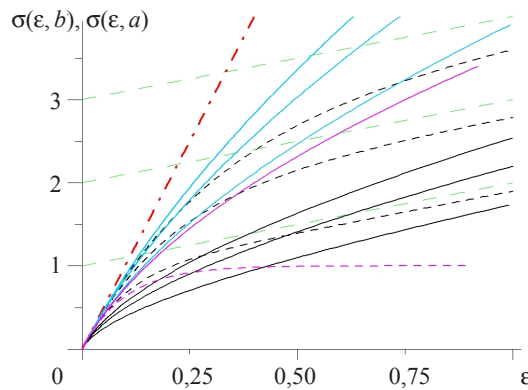


Рис. 3

6. Сравнение свойств семейств ДД при постоянных СН и СД

Проведенные исследования обнаружили многие качественные сходства ДД ОС (1) при постоянных СД и СН (5) и (9). В частности, доказано, что:

1) каждая из ДД $\sigma = y(\varepsilon, a)$ и $\sigma = z(\varepsilon, b)$ возрастает и выпукла вверх при всех $\varepsilon \geq 0$, ее кривизна $\kappa(\varepsilon)$ убывает и $\kappa(\infty) = 0$;

2) в точке $\varepsilon = 0$ все ДД имеют одинаковый мгновенный модуль $E = y'_\varepsilon(0, a) = R(0+) = 1/\Pi(0) = z'_\varepsilon(0, b)$ (общую касательную), если модель регулярна, и $E = \infty$, если модель не регулярна;

3) длительный модуль (предел касательного модуля при $\varepsilon \rightarrow \infty$) не зависит от СД и СН: $r = R(\infty) = 1/\Pi(\infty)$ (возможно, $r = 0$);

4) предельное значение секущего модуля σ/ε для любой ДД также равно r ;

5) при $a, b \rightarrow \infty$ оба семейства ДД (5) и (9) монотонно сходятся (снизу) к одной и той же прямой $\sigma = E\varepsilon$;

6) при $a, b \rightarrow 0$ семейства ДД сходятся (сверху) к прямой $\sigma = r\varepsilon$.

Были отмечены и несколько простейших различий между ДД (5) и (9). В частности, ДД при постоянной СН $\sigma = z(\varepsilon, b)$ никогда не обладает горизонтальной асимптотой, а ДД (5) обладает ею, если $r = 0$. Модель Максвелла и МСТ – примеры (регулярных) моделей, чьи ДД при постоянных СН не имеют наклонных асимптот (так как $\Pi(\infty) = \infty$), а ДД при постоянных СД имеют горизонтальные асимптоты. Аналогичным свойством обладает и СиМ-3 (но не СиМ-4).

Главное отличие состоит в том, что уравнение ДД (5) выражается через функцию релаксации и представляется в явном виде $\sigma = y(\varepsilon, a)$, а ДД (9) выражается через функцию ползучести и представляется лишь в форме $\varepsilon = g(\sigma, b)$, а не $\sigma = z(\varepsilon, b)$. Отсюда следует принцип суперпозиции ДД: при параллельном соединении моделей суммируются их ДД при постоянной СД (5) (ибо складываются ФР и их осреднения), а при последовательном соединении суммируются ДД при постоянной СН (9) (ибо складываются ФП). Этим способом можно сразу написать уравнения ДД многих классических моделей (включая обобщенные модели Максвелла и Фойгта), минуя вычисление осреднений результирующих ФР и ФП и даже не выписывая ФР и ФП.

Другое следствие: для ДД с постоянной СН (9) всегда $z(0+, b) = 0$, так как $\varepsilon = \Theta(\sigma/b)\sigma$, и всегда $\Theta(0+) = \Pi(0) < \infty$, а для ДД с постоянной СД (5) – не всегда. Действительно, для РеМ $R(0+) < \infty$, $P(0+) = R(0+)$ и $y(0+, a) = 0$; а если $R(t) = R_r(t) + \eta\delta(t)$, где $R_r(0) < \infty$, то ДД (5) – сумма регулярной ДД (с $y_r(0, a) = 0$) и ДД вязкого элемента $\sigma = \eta a$, и потому $y(0+, a) = \eta a > 0$. Если же ФР не содержит дельта-функции, но не ограничена и имеет при $t \rightarrow 0$ асимптотику $R(t) \sim At^{-\alpha}$ с $\alpha \in (0, 1)$, то $y'_\varepsilon(\varepsilon, a) \sim A(\varepsilon/a)^{-\alpha}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, интеграл для осреднения ФР сходится, $P(t) \sim Bt^{-\alpha}$, и ДД имеет при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотику $y \sim Ba^\alpha \varepsilon^{1-\alpha}$; поэтому $y(0+, a) = 0$, а $E := y'_\varepsilon(0+, a) = +\infty$.

Отсутствие общего явного представления $\sigma = z(\varepsilon, b)$ для ДД при постоянной СН (9) (даже для модели Фойхта уравнение $\varepsilon = g(\sigma, b)$ не разрешается относительно σ) затрудняет сравнение ДД. Тем не менее можно доказать [1], что у любой регулярной модели (с $E := R(0) < \infty$) ДД при постоянной СД $\sigma = y(\varepsilon, a)$ целиком лежит ниже ДД при постоянной СН $\sigma = z(\varepsilon, b)$ для СН $b = Ea$ (естественно сравнивать ДД для СД и СН, связанных линейно-упругой зависимостью). Таким образом, для любой регулярной ФР, отличной от постоянной, и любой СД $a > 0$ справедливо неравенство $z(\varepsilon, Ea) > y(\varepsilon, a)$ для всех $\varepsilon > 0$ (см. рис. 3). Для ДД любой СиМ при малых ε всегда выполняется обратное неравенство $z(\varepsilon, b) < y(\varepsilon, a)$ для любых СД и СН, ибо $y(0+, a) = \eta a > 0$, а $z(0, b) = 0$ (рис. 4, 5).

На рис. 4 показаны ДД при постоянной СН и при постоянной СД (штриховыми линиями) для вязкого элемента (синим цветом), модели Фойгта (красным цветом) и

модели Максвелла (розовым цветом) с $\eta = 5$, $E_F = E_M = 10$ (E_F модели Фойхта – длительный модуль $E_\infty = r$, а не мгновенный) при $a = 0,1; 0,2; 0,3$ и $b = Ea = 1, 2, 3$. Для вязкого элемента $\sigma(\varepsilon, a) = \eta a$, $\sigma(\varepsilon, b) = \sqrt{2\eta b \varepsilon}$. Для модели Фойхта: $\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + \eta a$, $\varepsilon(\sigma, b) = r^{-1}[\sigma - \lambda^{-1}b(1 - e^{-\lambda\sigma/b})]$, $\lambda = r/\eta$; $\sigma'_\varepsilon(0, b) = \infty$; ДД $\varepsilon(\sigma, b)$ имеют при $\sigma \rightarrow \infty$ асимптоту $\varepsilon = r^{-1}\sigma - r^{-1}\lambda^{-1}b$, она совпадает с ДД при постоянной СД $a = b/r$, поэтому ДД модели Фойхта при постоянной СН *целиком* лежит ниже ДД при постоянной СД. Когда $a \rightarrow 0$ или $b \rightarrow 0$, оба семейства ДД модели Фойхта сходятся (сверху) к прямой $\sigma = r\varepsilon$ (красный штрихпунктир), то есть к ДД упругого элемента; при $a \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow \infty$ оба семейства ДД сходятся к лучу $\varepsilon = 0$. Оба семейства ДД модели Максвелла – $\sigma(\varepsilon, a) = a\eta(1 - e^{-\mu\varepsilon/a})$ с $\mu = E\eta^{-1} = 2$ и $\varepsilon(\sigma, b) = 0,5\alpha b^{-1}\sigma^2 + \beta\sigma$ с $\alpha = \eta^{-1} = 0,2$, $\beta = E^{-1} = 0,1$ – сходятся при $a \rightarrow \infty$ и $b \rightarrow \infty$ к прямой $\sigma = E\varepsilon$ снизу.

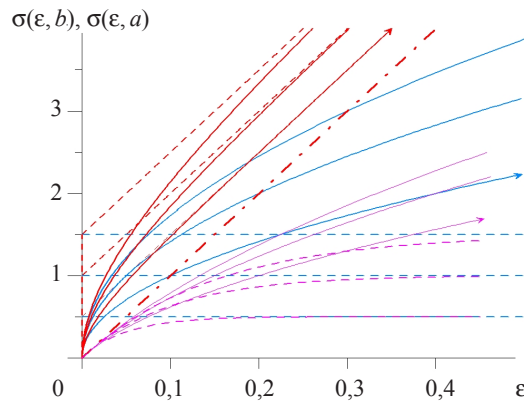


Рис. 4

7. Диаграммы деформирования трехзвенных сингулярных моделей (Сим-3)

ФП (4) порождает Сим, когда $\Pi(0) = 0$, то есть $\gamma = \beta$. При $\alpha = 0$ – это модель Фойхта, а если $\alpha > 0$, то (4) порождает обе Сим-3 с двумя демпферами [4]:

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \beta e^{-\lambda t}, \quad \alpha, \beta, \lambda > 0, \quad R(t) = \eta \delta(t) + A e^{-\nu t}, \quad (13)$$

$$\nu = \alpha \lambda (\alpha + \beta \lambda)^{-1} > 0, \quad \eta = (\alpha + \beta \lambda)^{-1} > 0, \quad A = \eta (\lambda - \nu) = \beta \lambda^2 \eta^2 = \nu^2 \beta \alpha^{-2} > 0.$$

ФР (13) находится по ФП из уравнения (3). Она лишь слагаемым $\eta \delta(t)$ отличается от ФР Максвелла, убывает и выпукла вниз при $t > 0$, $R(0+) = A$, $R(\infty) = 0$. Очевидно, что $\eta < \alpha^{-1}$ и $0 < \nu < \lambda$ (у РеМ-3, наоборот, $\mu > \lambda$, то есть время релаксации меньше времени ползучести).

Осреднение ФР:

$$P(t) = t^{-1}[\eta + A\nu^{-1}(1 - e^{-\nu t})] = \alpha^{-1}t^{-1}[1 - \eta\beta\lambda e^{-\nu t}].$$

ДД Сим-3:

$$\sigma(\varepsilon, a) = a\eta + aA\nu^{-1}(1 - e^{-\nu\varepsilon/a}) = a\alpha^{-1}[1 - \omega e^{-\nu\varepsilon/a}],$$

где $\omega = \eta\beta\lambda = \beta\lambda(\alpha + \beta\lambda)^{-1} < 1$.

ДД Сим-3 получается из ДД Максвелла сдвигом на $a\eta$ вверх. Имеет место $\sigma(0, a) = a\eta \neq 0$, $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, 0+) = A$, длительный модуль $r = 0$. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ ДД имеет

горизонтальную асимптоту $\sigma = a(\eta + Av^{-1})$, то есть $\sigma = a/\alpha$. При $a \rightarrow 0$ семейство ДД равномерно сходится на полуоси $\varepsilon \geq 0$ к $\sigma \equiv 0$, а при $a \rightarrow \infty$ – к вертикальному лучу $\varepsilon = 0$. Осреднение ФП (13) и ДД СиМ-3 при постоянной СН:

$$\Theta(t) = 0,5\alpha t + \beta - \beta\lambda^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\lambda t}), \quad \varepsilon(\sigma, b) = 0,5\alpha\beta^{-1}\sigma^2 + \beta\sigma - \beta\lambda^{-1}b(1 - e^{-\lambda\sigma/b}),$$

$\sigma(0, b) = 0$, $\sigma'_\varepsilon(0+, b) = \infty$, асимптот у ДД СиМ-3 при постоянных СН нет (так как $\Pi_\infty = \infty$).

На рис. 5а приведены ДД при СН $b = 1, 2, 3$ и при СД $a = 4, 8, 12$ (штриховые линии) для СиМ-3 (13) с $\gamma = \beta = 1, \lambda = 1$ и двумя значениями α : черные кривые для $\alpha = 1$ (тогда $v = 0,5, \eta = 0,5, A = \beta\lambda^2\eta^2 = 0,25$), синие – для $\alpha = 10$ (тогда $v = 10/11, \eta = 1/11, A = 1/121$). Стрелками помечены ДД с $b = 1$. При достаточно больших ε любая ДД при постоянной СН лежит выше любой ДД при постоянной СД (последние имеют асимптоты $\sigma = a/\alpha$, а первые растут неограниченно). При малых ε , наоборот, любая ДД при постоянной СД имеет вертикальный участок ($\sigma(0, a) = \eta a$) и лежит выше любой ДД при постоянной СН (для них $\sigma(0, b) = 0, \sigma'_\varepsilon(0, b) = +\infty$). Красные кривые – ДД модели Фойгта ($\alpha = 0$) при $b = 1, 2, 3$.

На рис. 5б приведены ДД при СН $b = 10$ и при СД $a = 10$ (штриховые линии) для СиМ (13) с $\gamma = \beta = 1, \lambda = 1$ и разными α : $\alpha = 10; 1; 0,1; 0,01$. Эти кривые иллюстрируют сходимость ДД СиМ-3 при $\alpha \rightarrow 0$ к ДД модели Фойгта для тех же СН и СД (две красные кривые).

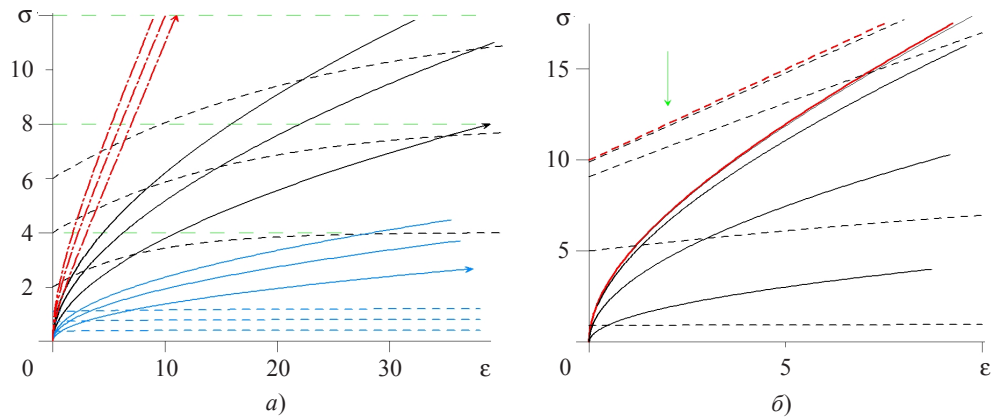


Рис. 5

8. ДД четырехзвенных сингулярных моделей (СиМ-4)

МСТ – последовательное соединение моделей Фойгта и Максвелла. Рассмотрим их *параллельное* соединение. Тогда ФР – сумма ФР Фойгта и Максвелла:

$$R(t) = \eta\delta(t) + r + Ae^{-vt}, \quad (14)$$

где $r = E_F > 0, \eta = \eta_F > 0, A = E_M > 0, v = E_M/E_F > 0$.

Эта ФР положительна, убывает и выпукла вниз при $t > 0, R(\infty) = r$. При $r = 0$ получается СиМ-3; при $A = 0$ или $v = 0$ или $v \rightarrow \infty$ – модель Фойгта. При $\eta = 0$ функция (14) вырождается в РеМ-3; если еще и $r = 0$ – в модель Максвелла (РеМ-2).

ФП СиМ-4 [2, 3]:

$$\Pi(t) = \beta_1(1 - e^{-\lambda_1 t}) + \beta_2(1 - e^{-\lambda_2 t}), \quad (15)$$

$$\lambda_i = 0,5\eta^{-1}(\eta v + A + r \mp \sqrt{D}) > 0, \quad \beta_1 = (v\lambda_1^{-1} - 1)/\sqrt{D} > 0, \quad \beta_2 = (1 - v\lambda_2^{-1})/\sqrt{D} > 0,$$

$$D = (\eta v + r + A)^2 - 4\eta r v = (\eta v + A - r)^2 + 4rA > 0.$$

Всегда $0 < \lambda_1 < v < \lambda_2$; $\lambda_2 - \lambda_1 = \eta^{-1}\sqrt{D}$, $\lambda_1\lambda_2 = rv\eta^{-1}$.

ФП (15) возрастает и выпукла вверх, то есть допустима. Она совпадает с ФП последовательного соединения двух моделей Фойгта с разными временами ползучести $\tau_i = 1/\lambda_i$; $\Pi(0) = 0$, $\Pi(\infty) = \beta_1 + \beta_2 = r^{-1}$. При $r \rightarrow 0$: $\lambda_1 \rightarrow 0$, $\lambda_2 \rightarrow v + A\eta^{-1}$, $\Pi(\infty) = r^{-1} \rightarrow \infty$, и ФР (14) и ФП (15) сходятся к ФР и ФП (13) модели СиМ-3.

Осреднение ФР (14) имеет вид:

$$P(t) = t^{-1}[\eta + rt + Av^{-1}(1 - e^{-vt})].$$

ДД СиМ-4 при постоянной СД:

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + a\eta + aAv^{-1}(1 - e^{-v\varepsilon/a}). \quad (16)$$

ДД (16) – это сумма ДД моделей Фойгта и Максвелла или ДД РеМ-3 и вязкого элемента, то есть получается из ДД РеМ-3 сдвигом вверх на $a\eta$; $\sigma(0, a) = a\eta \neq 0$, $\sigma'(\varepsilon, 0+) = r + A$. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ ДД имеет асимптоту $\sigma = r\varepsilon + a(\eta + Av^{-1})$. При $A \rightarrow 0$ (как и при $v \rightarrow \infty$) семейство ДД (16) сходится к ДД модели Фойгта $\sigma = r\varepsilon + a\eta$, а при $v \rightarrow 0$ – к $\sigma = (r + A)\varepsilon + a\eta$. При $a \rightarrow \infty$ семейство ДД (16) сходится к вертикальному лучу $\varepsilon = 0$, а при $a \rightarrow 0$ равномерно сходится (сверху) к прямой $\sigma = r\varepsilon$.

ДД при постоянной СН модели (14), (15) совпадает с суммой ДД двух моделей Фойгта:

$$\varepsilon(\sigma, b) = (\beta_1 + \beta_2)\sigma - b[\beta_1\lambda_1^{-1}(1 - e^{-\lambda_1\sigma/b}) + \beta_2\lambda_2^{-1}(1 - e^{-\lambda_2\sigma/b})]; \quad (17)$$

$\sigma'_\varepsilon(0+, b) = \infty$. ДД (17) имеет асимптоту $\varepsilon = r^{-1}\sigma - bB$, где $B = \beta_1\lambda_1^{-1} + \beta_2\lambda_2^{-1} = (\eta v + A)/(vr^2)$, то есть $\sigma = r\varepsilon + brB$. При $b = ra$ она совпадает с асимптотой ДД (16), так как $brB = a(\eta v + A)/v$. Поэтому ДД при постоянной СН (17) с $b = ra$ целиком лежит ниже ДД (16), как и у модели Фойгта (но в отличие от СиМ-3 (13), у которой ДД для любых СН и СД пересекаются, и ДД при постоянной СН асимптоты не имеет). При $b \rightarrow 0$ семейство ДД (17) сходится (сверху) к прямой $\varepsilon = r^{-1}\sigma$, то есть к той же прямой $\sigma = r\varepsilon$, что и семейство ДД (16) при $a \rightarrow 0$. Этим СиМ-4 (14) отличается от СиМ-3 (13), у которой $r = 0$, ФП не ограничена, и оба семейства ДД сходятся к $\sigma \equiv 0$, когда $a \rightarrow 0$ или $b \rightarrow 0$.

На рис. 6а приведены ДД СиМ-4 (14) с $\eta = A = v = 1$ и $r = 1$ при СД $a = 0,1; 1; 2; 3$ (штриховые линии) и СН $b = ar = a$. Красная штрихпунктирная линия – прямая $\sigma = r\varepsilon$, к которой сходятся семейства ДД (16) и (17) (и их асимптот) при $a \rightarrow 0$ и $b \rightarrow 0$. Две синие кривые – ДД СиМ-3 (с $r = 0$) при $a = 1$ и $b = 1$, то есть ДД СиМ-3 (13) с теми же $\eta = A = v = 1$ (тогда $a = 0,5$, $\beta = 0,25$, $\lambda = 2$). Голубые кривые на рис. 6а, б – ДД модели РеМ-3 (с $A = v = 1$, $r = 1$, $a = 1$), к которым сходятся сверху при $\eta \rightarrow 0$ ДД СиМ-4 (16) для $a = 1$ (они получаются сдвигом на $a\eta$).

На рис. 6б приведены ДД СиМ-4 (14) с $\eta = A = v = 1$ и разными r : $r = 1; 0,5; 0,1; 0,01$. СД $a = 1$ фиксирована (штриховые ДД), СН $b = ar$ (тогда у ДД общие асимптоты). Эти ДД иллюстрируют сходимост ДД СиМ-4 при $r \rightarrow 0$ к ДД СиМ-3 (13) (синяя штриховая линия). ДД при $r = 0,01$ уже сливается с предельной. Поскольку $b = ar \rightarrow 0$, ДД СиМ-4 (17) при $b = ar$ сходятся при $r \rightarrow 0$ к нулевой функции. При $v \rightarrow +\infty$ и $v \rightarrow 0$ семейство ДД (16) сходится к ДД моделей Фойгта $\sigma = r\varepsilon + a\eta$ и

$\sigma = (r + A)\varepsilon + a\eta$ (красные штриховые прямые); в секторе между ними лежат все ДД (16) с $\eta = A = r = 1$ и любым $\nu > 0$.

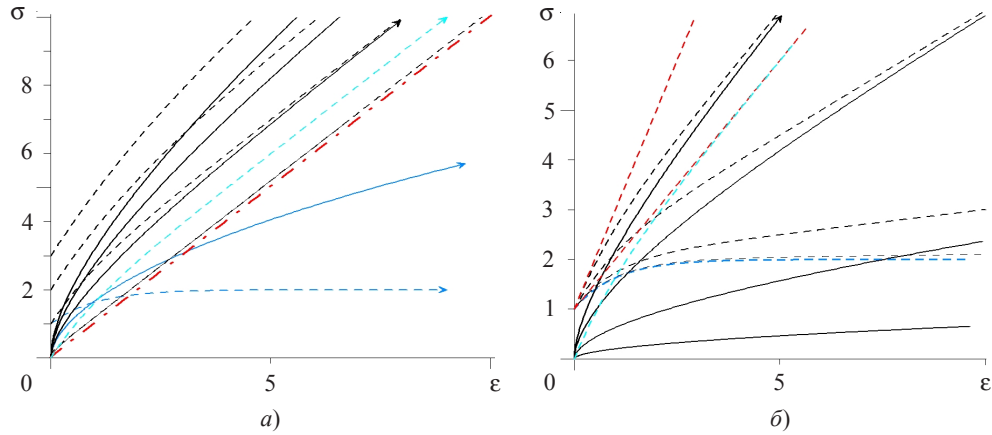


Рис. 6

Подробнее свойства ФП и ДД $\sigma(\varepsilon, a)$ СиМ-4 и СиМ-3 и их зависимость от параметров проанализированы в [4].

9. Диаграммы деформирования моделей с неограниченной функцией релаксации

Рассмотрим степенную ФР с $R(0) = \infty$, $R(\infty) = 0$ и соответствующую ей ФП [1]:

$$R(t) = At^{-\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1), \quad A > 0; \quad \Pi(t) = A^{-1}C(\alpha)t^\alpha, \quad C(\alpha) = (\alpha\pi)^{-1} \sin \alpha\pi. \quad (18)$$

Очевидно, что ФП (18) положительна, возрастает и выпукла вверх (допустима), $\Pi(0) = 0$, $\dot{\Pi}(0) = \infty$, $\Pi(\infty) = \infty$; $R(t)\Pi(t) = C(\alpha)$. Функция $C(\alpha)$ убывает на интервале $(0, 1)$, $C(0+) = 1$ и $C(1-0) = 0$.

$$\text{Осреднения ФР и ФП: } P(t) = A(1 - \alpha)^{-1}t^{-\alpha}, \quad \Theta(t) = A^{-1}C(\alpha)(\alpha + 1)^{-1}t^\alpha.$$

Уравнения ДД при постоянной СД и при постоянной СН:

$$\sigma(\varepsilon, a) = A(1 - \alpha)^{-1}a^\alpha\varepsilon^{1-\alpha}; \quad \sigma(\varepsilon, b) = A^{1/(\alpha+1)}B(\alpha)b^{\alpha/(\alpha+1)}\varepsilon^{1/(\alpha+1)}, \quad (19)$$

$B(\alpha) := [C(\alpha)^{-1}(\alpha + 1)]^{1/(\alpha+1)}$. Коэффициент $B(\alpha)$ возрастает на интервале $(0, 1)$, $B(0+) = A$, $B(1-0) = +\infty$. Касательный модуль $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = M(\alpha, A)\nu^\omega\varepsilon^{-\omega}$, где $\omega \in (0, 1)$ ($\nu = a$ или $\nu = b$, $\omega = \alpha$ или $\omega = \alpha/(\alpha + 1)$), $E := \sigma'_\varepsilon(0, \nu) = \infty$, $E_\infty = \sigma'_\varepsilon(\infty, \nu) = 0$. С ростом a касательный модуль в окрестности нуля растет, ДД (19) становятся круче. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ ДД не имеют асимптот. При $\nu \rightarrow 0$ оба семейства ДД сходятся к нулевой функции, а при $\nu \rightarrow \infty$ – к вертикальному лучу $\varepsilon = 0$ (рис. 7).

Разность показателей степени в ДД (19): $d(\alpha) = (\alpha + 1)^{-1} - (1 - \alpha) = \alpha^2(\alpha + 1)^{-1}$ положительна, она возрастает от $d(0+) = 0$ до $d(1-0) = 0,5$. Таким образом, показатель ДД при постоянной СН всегда больше: $(\alpha + 1)^{-1} > 1 - \alpha$ при $\alpha \in (0, 1)$ и $z(\varepsilon, b)/y(\varepsilon, a) = K\varepsilon^d$. Значит, при $\varepsilon \rightarrow \infty$ всегда $z(\varepsilon, b)/y(\varepsilon, a) \rightarrow \infty$ для любых СД и СН, то есть $z(\varepsilon, b) > y(\varepsilon, a)$ при достаточно больших ε . При малых ε картина обратная: при $\varepsilon \rightarrow 0$ всегда $z(\varepsilon, b)/y(\varepsilon, a) \rightarrow 0$.

Черные кривые на рис. 7а – ДД (19) модели (18) с $A = 1$, $\alpha = 0,9$ при $a = b = 0,1$; 1; 2; 3; 10 ($\sigma(\varepsilon, a)$ – штриховые линии). Голубые кривые – ДД для СН $b = 1$ при $\alpha = 0,8$; 0,7; 0,5, оранжевая – при $\alpha = 0,1$ (при $\alpha \in (0,4; 0,6)$ они почти совпадают).

Черные кривые на рис. 7б – ДД для $\alpha = 0,1$ при $a = b = 10^{+n}$, $n = 0, 1, 2, 3$. При малом α модель становится гораздо менее чувствительной к СН и СД, ДД спрямляются и сближаются, угол раствора веера быстро уменьшается, и при $\alpha \rightarrow 0$ он стягивается в прямую – ДД упругого элемента $\sigma = E\varepsilon$ с $E = A = 1$ (красная линия). Голубые и синие кривые – ДД с $a = b = 1$ для $\alpha = 0,5$ и $\alpha = 0,9$.

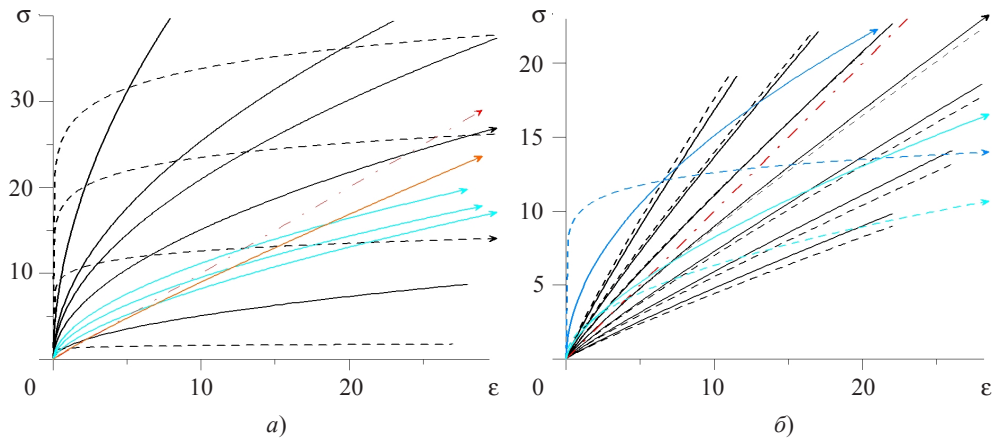


Рис. 7

Заключение

Изучены общие свойства и характерные особенности семейств ДД линейного ОС (1) с произвольной (убывающей) функцией релаксации, их зависимость от характеристик ФР и ФП (для всех трех основных классов моделей: с регулярной, неограниченной и сингулярной ФР), проведен сравнительный анализ свойств ДД при постоянных СН и СД. В частности, доказано, что все ДД всегда монотонны и выпуклы вверх, ДД смещаются вверх с ростом СД и СН, но их мгновенный и длительный модули не зависят от скоростей, при стремлении СД и СН к бесконечности семейства ДД сходятся к прямой $\sigma = E\varepsilon$ (если модель регулярна), а при стремлении скорости к нулю сходятся к прямой $\sigma = r\varepsilon$, $r = R(\infty)$. Поэтому линейное ОС вязкоупругости не способно описывать поведение материалов, чьи ЭДД имеют максимум или участок с выпуклостью вниз, или участок возрастания кривизны, и тех материалов, у которых по ЭДД достоверно установлена зависимость мгновенного или длительного модуля от СД или СН или отрицательная скоростная чувствительность.

Список литературы

1. Хохлов А.В. *Качественный анализ линейных определяющих соотношений вязкоупругости. Свойства теоретических кривых деформирования, функций ползучести и релаксации и их произведения: Отчет о НИР / Инв. № 5218. НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова. М., 2013. № ГР 01201152141. 93 с.*
2. Хохлов А.В. *Кривые обратной ползучести в рамках линейной вязкоупругости и необходимые ограничения на функцию ползучести // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2013. Вып. 75. Ч. 4. С. 257–267.*
3. Хохлов А.В. *Свойства произведения функции ползучести и функции релаксации в линейной вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т. 76, №4. С. 343–356.*
4. Хохлов А.В. *Общие свойства диаграмм деформирования линейных моделей вязкоупругости при постоянной скорости деформации // Проблемы прочности и пластичности. 2015. Т. 77, №1. С. 60–74.*

5. Хохлов А.В. *Качественный анализ определяющих соотношений как базовая стадия их аттестации* // Современные проблемы математики, механики, информатики: Матер. Международ. науч. конф. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 435–438.
6. Хохлов А.В. *Нелинейные модели вязкоупругости типа Максвелла. Особенности их поведения, скоростная чувствительность и возможность использования для описания ползучести и сверхпластичности материалов: Отчет о НИР / Инв. № 5193. НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова. М., 2013. № ГР 01201152141. 108 с.*
7. Хохлов А.В. *Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства теоретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти* // Изв. РАН. МТТ. 2007. № 2. С. 147–166.
8. Хохлов А.В. *Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности* // Изв. РАН. МТТ. 2008. №2. С. 140–160.
9. Бленд Д.Р. *Теория линейной вязкоупругости*. М.: Мир, 1965. 200 с.
10. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. *Основы математической теории термовязкоупругости*. М.: Наука, 1970. 280 с.
11. Кристенсен Р. *Введение в теорию вязкоупругости*. М.: Мир, 1974. 338 с.
12. Работнов Ю.Н. *Элементы наследственной механики твердых тел*. М.: Наука, 1977. 384 с.
13. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. *Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов*. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
14. Tschoegl N.W. *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior*. Berlin: Springer, 1989. 584 p.
15. Knauss W.G., Emri I., Lu H. *Mechanics of polymers: viscoelasticity* // Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics, ed. by W.N. Sharpe. N.Y.: Springer, 2008. P. 49–96.
16. Lakes R.S. *Viscoelastic materials*. UK: Cambridge Univ. Press, 2009. 462 p.
17. Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победря Б.Е. *Особенности поведения вязкоупругих моделей* // Изв. РАН. МТТ. 2004. №1. С. 119–157.

References

1. Khokhlov A.V. *Kachestvennyy analiz lineynykh opredelyayushchikh sootnosheniy vyazkouprugosti. Svoystva teoreticheskikh krivyykh deformirovaniya, funktsiy polzuchesti i relaksatsii i ikh proizvedeniya: Otchet o NIR / Inv. № 5218. NII mekhaniki MGU im. M.V. Lomonosova. M., 2013. № GR 01201152141. 93 s.*
2. Khokhlov A.V. *Krivye obratnoy polzuchesti v ramkakh lineynoy vyazkouprugosti i neobkhodimye ogranicheniya na funktsiyu polzuchesti* // Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhdvuz. sb. / Nizhegorod. un-t. 2013. Vyp. 75. Ch. 4. S. 257–267.
3. Khokhlov A.V. *Svoystva proizvedeniya funktsii polzuchesti i funktsii relaksatsii v lineynoy vyazkouprugosti* // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2014. T. 76, №4. S. 343–356.
4. Khokhlov A.V. *Obshchie svoystva diagramm deformirovaniya lineynykh modeley vyazkouprugosti pri postoyannoy skorosti deformatsii* // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2015. T. 77, №1. S. 60–74.
5. Khokhlov A.V. *Kachestvennyy analiz opredelyayushchikh sootnosheniy kak bazovaya stadiya ikh attestatsii* // Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Mater. Mezhdunarod. nauch. konf. Tula: Izd-vo TulGU, 2014. S. 435–438.
6. Khokhlov A.V. *Nelineynye modeli vyazkouprugosti tipa Maksvell. Osobennosti ikh povedeniya, skorostnaya chuvstvitel'nost' i vozmozhnost' ispol'zovaniya dlya opisaniya polzuchesti i sverkhplastichnosti materialov: Otchet o NIR / Inv. № 5193. NII mekhaniki MGU im. M.V. Lomonosova. M., 2013. № GR 01201152141. 108 s.*
7. Khokhlov A.V. *Opredelyayushchee sootnoshenie dlya reologicheskikh protsessov: svoystva teoreticheskikh krivyykh polzuchesti i modelirovanie zatukhaniya pamyati* // Izv. RAN. MTT. 2007. № 2. S. 147–166.
8. Khokhlov A.V. *Opredelyayushchee sootnoshenie dlya reologicheskikh protsessov s izvestnoy istoriey nagruzheniya. Krivye polzuchesti i dlitel'noy prochnosti* // Izv. RAN. MTT. 2008. №2. S. 140–160.

9. Blend D.R. *Teoriya lineynoy vyazkoprugosti*. M.: Mir, 1965. 200 s.
10. Il'yushin A.A., Pobedrya B.E. *Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkoprugosti*. M.: Nauka, 1970. 280 s.
11. Kristensen R. *Vvedenie v teoriyu vyazkoprugosti*. M.: Mir, 1974. 338 s.
12. Rabotnov Yu.N. *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel*. M.: Nauka, 1977. 384 s.
13. Koltunov M.A., Mayboroda V.P., Zubchaninov V.G. *Prochnostnye raschety izdeliy iz polimernykh materialov*. M.: Mashinostroenie, 1983. 239 s.
14. Tschoegl N.W. *The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior*. Berlin: Springer, 1989. 584 p.
15. Knauss W.G., Emri I., Lu H. *Mechanics of polymers: viscoelasticity* // Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics, ed. by W.N. Sharpe. N.Y.: Springer, 2008. P. 49–96.
16. Lakes R.S. *Viscoelastic materials*. UK: Cambridge Univ. Press, 2009. 462 p.
17. Georgievskiy D.V., Klimov D.M., Pobedrya B.E. *Osobennosti povedeniya vyazkoprugikh modeley* // Izv. RAN. MTT. 2004. №1. S. 119–157.

SPECIFIC FEATURES OF STRESS-STRAIN CURVES AT CONSTANT STRESS RATE OR STRAIN RATE YIELDING FROM LINEAR VISCOELASTICITY

Khokhlov A.V.

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russian Federation

The qualitative analysis of linear integral constitutive equation of viscoelasticity with an arbitrary creep compliance function is continued. General equation and basic properties of quasi-static theoretic stress-strain curves (SSC) at constant stress rate are analytically studied herein and compared with properties of SSC at constant strain rate. It is proved for any increasing creep function that: 1) every SSC is an increasing and convex-up function of time (without extremum or inflection points); 2) SSC rise up as stress rate increase; 3) the instantaneous and long-term equilibrium moduli (i.e. the limit values of SSC derivative at zero and infinity points) don't depend on a stress rate; 4) SSC family of any regular model converges uniformly to the linear function (instantaneous SSC of the model) as stress rate tends to infinity; SSC family of any non-regular model converges to vertical line; 5) if stress rate tends to zero, SSC family descends and converges uniformly to the linear function with the slope equal to equilibrium modulus (it may be zero if relaxation modulus tends to zero at infinity). All these properties are also proved to be valid for SSC at constant strain rate.

Three main three classes of linear models (i.e. regular, unbounded and singular) are considered and distinctive features of their SSC are marked. It is proved for any regular model that SSC at a constant stress rate lies higher than its SSC at the corresponding constant strain rate (equal to the stress rate divided by the model instantaneous modulus).

General properties and peculiarities of SSC families and their dependence on creep function parameters are illustrated by examination of classical rheological models.

The specific features of SSC (and other basic curves) of the linear integral constitutive equation are highlighted that can indicate its applicability or non-applicability being compared with the list of typical properties of a certain material test curves. The list of indicators helps to check linear theory abilities to provide an adequate description of basic rheological phenomena and typical test curves of viscoelastoplastic materials.

Keywords: creep compliance, relaxation modulus, integral constitutive equation, stress rate, strain rate, theoretic stress-strain curves, instantaneous modulus, regular and singular models, adequacy indicators for linear viscoelasticity.