

УДК 539.374

ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ О РЕЗАНИИ ПРИ УСЛОВИИ ТЕКУЧЕСТИ КУЛОНА – МОРА

© 2015 г. **Анисимов А.Н.¹, Егорова Ю.Г.², Хромов А.И.²**¹Амурский гуманитарно-педагогический государственный университет,
Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация²Комсомольский-на-Амуре государственный технический университет,
Комсомольск-на-Амуре, Российская Федерация

egorova_jg@mail.ru

Поступила в редакцию 15.12.2014

Проведен жесткопластический анализ задачи о резании без разрушения с изолированной линией скольжения, напряжения на которой удовлетворяют условию пластичности Кулона – Мора. Определены поля напряжений, скоростей и деформаций. Построено локальное продолжение поля напряжений в заготовку и стружку. Выявлена область существования полного решения, предложен критерий выбора предпочтительного решения. Даны зависимости распределения деформаций и изменения плотности в стружке в зависимости от переднего угла резца.

Ключевые слова: теория пластичности, плоская деформация, жесткопластическое тело, резание без разрушения.

Жесткопластический анализ задачи о резании при условиях текучести Треска и Мизеса основан на предположении о существовании единственной линии сдвига (изолированной линии скольжения). При такой постановке задачи существуют два основных кинематически допустимых решения [1, 2]. В работе [3] эти решения исследовались с точки зрения их полноты. Было выявлено, что они имеют существенные ограничения. Также было предложено решение, обеспечивающее существование статически допустимого продолжения поля напряжений в жесткие области и минимизирующее объемную плотность диссипации энергии на плоскости сдвига.

В настоящей статье подход, предложенный в [3], используется при решении задачи о резании при условии текучести Кулона – Мора.

Рассмотрим обобщенную задачу о резании с учетом необратимой сжимаемости (рис. 1) в предположении, что существует изолированная линия скольжения, на которой выполняется условие текучести Кулона – Мора [4]:

$$\frac{1}{4}(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + \sigma_{12}^2 = \left(k + \frac{\sin \rho}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right)^2,$$

где σ_{ij} – составляющие тензора напряжений; k – коэффициент сцепления; $\rho = \pi/2 - 2\varphi$ – угол внутреннего трения; φ – угол наклона наибольшей главной компоненты тензора деформаций к оси x .

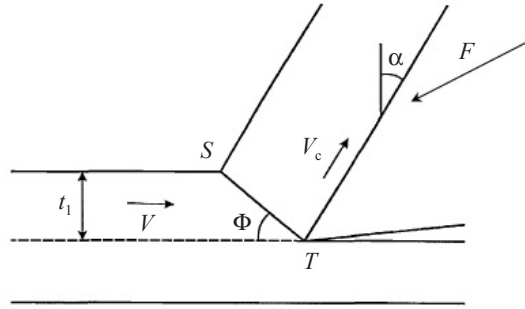


Рис. 1

Будем полагать, что заготовка перемещается слева направо со скоростью V .
Уравнения равновесия в осях t , n , связанных с линией скольжения ST , таковы:

$$\tau_{nt}ST = F \cos(\Phi + \lambda - \alpha), \quad \sigma_n ST = F \sin(\Phi + \lambda - \alpha),$$

где τ_{nt} – касательное напряжение на ST ; F – полная сила со стороны реза; Φ – угол плоскости сдвига; λ – угол трения ($\mu = \operatorname{tg} \lambda$, где μ – коэффициент трения); α – передний угол реза; σ_n – нормальное напряжение на ST .

Касательное и нормальное напряжения вдоль ST связаны соотношением

$$\tau_{nt} \cos \rho = k + \sigma_n \sin \rho,$$

поэтому

$$F = ST \frac{k}{\cos(\Phi + \lambda - \alpha - \rho)}, \quad F_c = \frac{kt_1 \cos(\lambda - \alpha)}{\sin \Phi \cdot \cos(\Phi + \lambda - \alpha - \rho)},$$

где F_c – горизонтальная составляющая силы F ; t_1 – толщина срезаемого слоя.

Скорости частиц слева и справа от ST (знаки « \leftarrow » и « \rightarrow » соответственно) равны:

$$V_{t-} = V \cos \Phi, \quad V_{n-} = V \sin \Phi, \quad V_{t+} = V_c \sin(\alpha - \Phi), \quad V_{n+} = V_c \cos(\alpha - \Phi),$$

где V_c – скорость стружки.

Учитывая, что на ST величина $[V_n \cos \rho - V_t \sin \rho]$ непрерывна, получим

$$V_c = \frac{V \sin(\Phi - \rho)}{\cos(\alpha - \Phi + \rho)}.$$

За меру деформаций примем тензор конечных деформаций Альманси:

$$E_{ij} = \frac{1}{2}(\delta_{ij} - x_{k,i}^0 x_{k,j}), \quad (1)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, x_i^0 и x_i – соответственно лагранжевы и эйлеровы координаты частицы.

Компоненты тензора (1) при переходе частицы материала через ST в предположении, что материал ниже ST не деформирован, определяются так [5]:

$$E_{ij}^{0+} = \delta_{ij} - (W_1 t_i + W_2 n_i) n_j, \quad W_1 = \frac{[V_t]}{G + V_{n+}}, \quad W_2 = \frac{[V_n]}{G + V_{n+}},$$

где W_1 и W_2 – соответственно объемные плотности энергии сдвиговых и объемных деформаций, отнесенные к k ; $[V_t]$ и $[V_n]$ – соответственно разрывы касательной и нормальной компонент скорости; G – нормальная скорость ST .

Примем за характеристики деформаций главные значения E_1, E_2 тензора (1).

Изменение плотности среды в результате деформации составит $\rho_c = \rho_c^0 \times \sqrt{(1-2E_1)(1-2E_2)}$ (ρ_c^0 – начальная плотность).

Следуя [3], рассмотрим возможность построения локального продолжения поля напряжений в окрестности жесткопластической границы ST в тело заготовки и стружку при условии текучести Кулона – Мора. Общий метод построения продолжения был предложен в [6], идея этого метода изложена в [7].

Определим положение свободных поверхностей Σ и Σ' в окрестности точки пересечения ST и свободной поверхности MSN (рис. 2).

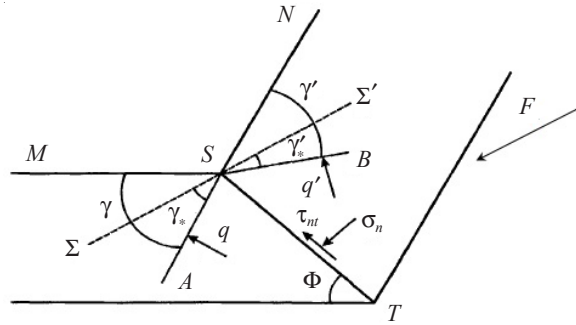


Рис. 2

Рассмотрим площадки AS и SB , расположенные под углами $\pi/2 - \phi$ и ϕ к ST . На них действуют равномерно сжимающие напряжения

$$|q| = (1 + \sin \rho)s + k, \quad |q'| = (1 - \sin \rho)s - k, \quad (2)$$

где $s = (\sigma_{11} + \sigma_{22})/2$.

ASM и BSN – клинья под односторонним давлением q и q' . Минимальный угол раствора клина γ_* , выдерживающего нагрузку q , определяется так:

$$|q| = \begin{cases} \frac{k}{\sin \rho} \left(1 - \frac{1 - \sin \rho}{1 + \sin \rho} e^{2 \operatorname{tg} \rho (\pi/2 - \gamma_*)} \right), & \gamma_* \geq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2k(1 + \cos(\gamma_* - 2\theta))}{1 + \sin^2 \rho + 2 \sin \rho \cos(\gamma_* - 2\theta)}, & \gamma_* \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad (3)$$

где $2\theta = \arcsin(\sin \rho \cdot \sin \gamma_*) + \pi$.

Углы γ_* и γ_*' , рассчитанные для q и q' , определяют положения Σ и Σ' в окрестности точки S . При $\gamma \geq \gamma_*$, $\gamma' \geq \gamma_*'$ продолжение может быть построено (достаточные условия существования продолжения).

На ST $\sigma_n = \operatorname{tg}(\Phi + \lambda - \alpha) \tau_{nt}$, поэтому

$$s = \frac{k(\operatorname{tg}(\Phi + \lambda - \alpha) + \operatorname{tg} \rho)}{\cos \rho - \sin \rho \cdot \operatorname{tg}(\Phi + \lambda - \alpha)}. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (2), получим давление, действующее вдоль AS :

$$q = k \left(\frac{(1 + \sin \rho)(\operatorname{tg}(\Phi + \lambda - \alpha) + \operatorname{tg} \rho)}{\cos \rho - \sin \rho \cdot \operatorname{tg}(\Phi + \lambda - \alpha)} + 1 \right). \quad (5)$$

Учитывая, что $\gamma = \pi/2 + \phi - \Phi$, и подставляя (5) в (3), получим достаточные условия существования продолжения поля напряжений в окрестности S в тело заготовки:

$$\begin{aligned} \frac{(1+\sin\rho)(\operatorname{tg}(\Phi+\lambda-\alpha)+\operatorname{tg}\rho)}{\cos\rho-\sin\rho\cdot\operatorname{tg}(\Phi+\lambda-\alpha)}+1 &\leq \frac{1}{\sin\rho}\left(1-\frac{1-\sin\rho}{1+\sin\rho}e^{2\operatorname{tg}\rho(\Phi-\varphi)}\right), \quad \Phi\leq\varphi, \\ \frac{(1+\sin\rho)(\operatorname{tg}(\Phi+\lambda-\alpha)+\operatorname{tg}\rho)}{\cos\rho-\sin\rho\cdot\operatorname{tg}(\Phi+\lambda-\alpha)}+1 &\leq \frac{2(1-\sin(\varphi-\Phi-2\theta))}{1+\sin^2\rho-2\sin\rho\cdot\sin(\varphi-\Phi-2\theta)}, \quad \Phi\geq\varphi, \end{aligned} \quad (6)$$

где $2\theta = \arcsin(\sin\rho\cdot\cos(\varphi-\Phi)) + \pi$.

Аналогично получим достаточные условия для области *NST*:

$$\begin{aligned} 1-\frac{(1-\sin\rho)(\operatorname{tg}(\Phi+\lambda-\alpha)+\operatorname{tg}\rho)}{\cos\rho-\sin\rho\cdot\operatorname{tg}(\Phi+\lambda-\alpha)} &\leq \frac{1}{\sin\rho}\left(1-\frac{1-\sin\rho}{1+\sin\rho}e^{2\operatorname{tg}\rho(\alpha-\Phi+\varphi)}\right), \quad \Phi\geq\alpha+\varphi, \\ 1-\frac{(1-\sin\rho)(\operatorname{tg}(\Phi+\lambda-\alpha)+\operatorname{tg}\rho)}{\cos\rho-\sin\rho\cdot\operatorname{tg}(\Phi+\lambda-\alpha)} &\leq \frac{2(1-\sin(\Phi-\alpha-\varphi-2\theta))}{1+\sin^2\rho-2\sin\rho\cdot\sin(\Phi-\alpha-\varphi-2\theta)}, \quad \Phi\leq\alpha+\varphi, \end{aligned} \quad (7)$$

где $2\theta = \arcsin(\sin\rho\cdot\cos(\Phi-\alpha-\varphi)) + \pi$.

Рассмотрим необходимые условия существования продолжения в *MST*. Пусть τ – среднее касательное напряжение на *MT*. Из равновесия *MST* получаем

$$\tau = (\cos\beta - \sin\beta \cdot \operatorname{ctg}\Phi)(\tau_n \cdot \cos\beta + \sigma_n \sin\beta).$$

При $\beta = 0$ $\tau = \tau_n$, поэтому для $\beta > 0$ необходимым условием будет $d\tau/d\beta|_{\beta=0} \leq 0$. Отсюда следует

$$\operatorname{ctg}\Phi \geq \operatorname{tg}(\Phi + \lambda - \alpha). \quad (8)$$

Аналогично получаем необходимые условия для области *NST*:

$$\operatorname{ctg}(\pi/2 + \Phi - \alpha) \leq \operatorname{tg}(\Phi + \lambda - \alpha). \quad (9)$$

Продолжение поля напряжений в *NST* в окрестности *T* можно построить по [2]. Предполагается, что материал у контактной области условно находится в пластическом состоянии. Пластическая область – треугольник изогональных линий. Угол наклона линий к резу η связан с μ соотношением

$$\mu = \operatorname{tg}\lambda = \frac{\cos(\rho + 2\eta)}{1 + \sin(\rho + 2\eta)},$$

поэтому $\eta = \pi/4 - \lambda - \rho/2$. Так как $\Phi = \alpha + \eta - \rho$, то $\Phi = \alpha + \pi/4 - \lambda - 3\rho/2$.

Таким образом, локальное продолжение в *NST* может быть построено при

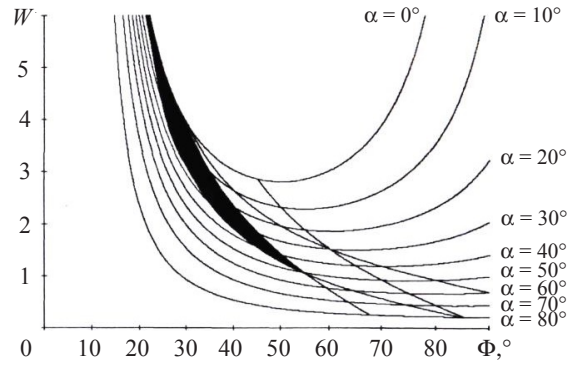
$$\Phi \leq \alpha + \pi/4 - \lambda - 3\rho/2. \quad (10)$$

Для полноты решения угол Φ должен удовлетворять условиям (6)–(10).

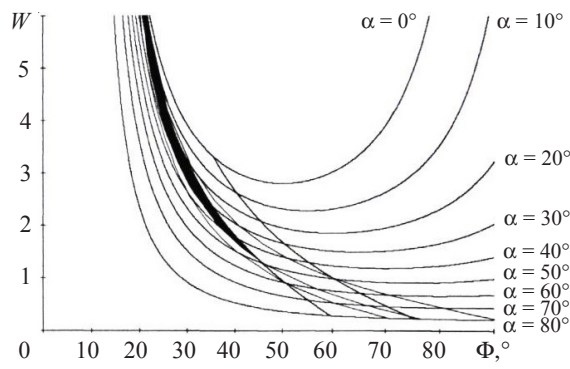
На рис. 3 показана зависимость объемной плотности энергии $W(\Phi) = |W_1(\Phi)| + |W_2(\Phi)|$ для различных углов α ($\rho = 10^\circ$; $\mu = 0$ (рис. 3а), $\mu = 0,35$ (рис. 3б)). Здесь $W_1(\Phi)$ и $W_2(\Phi)$ – объемные плотности энергии сдвиговой и объемной деформаций. Закрашенный участок – это область существования полного решения.

Для выбора предпочтительного решения предположим, что величина W в области существования полного решения минимальна. Это происходит тогда, когда свободная поверхность Σ в области *MST* совпадает со свободной поверхностью материала, при этом Φ определяется из условий (8) в виде равенств.

На рис. 4 представлено распределение деформаций частиц в стружке для случая, когда W минимальна, в зависимости от α ($\rho = 10^\circ$), а на рис. 5 – график изменения плотности материала ρ_c в стружке в зависимости от α .



a)



б)

Рис. 3

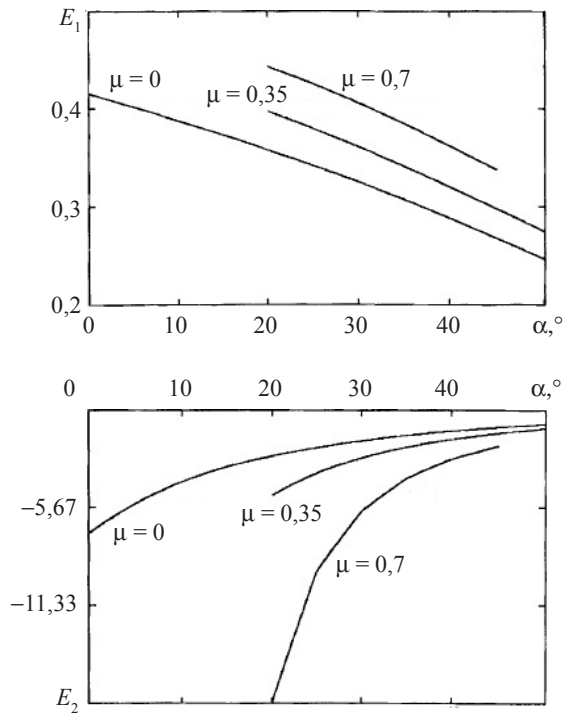


Рис. 4

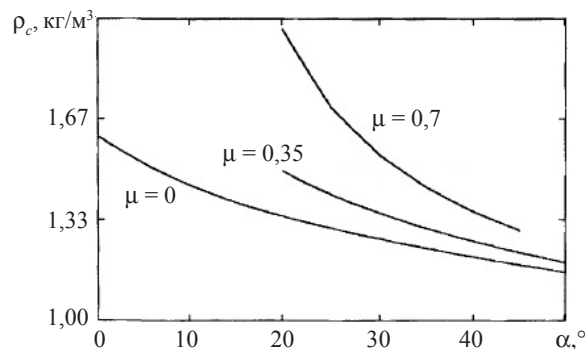


Рис. 5

Выводы

Рассмотрена жесткопластическая модель задачи о резании без разрушения с единственной линией сдвига, на которой выполняется условие текучести Кулона – Мора. Определены поля напряжений, скоростей и деформаций. Построено локальное продолжение поля напряжений в тело заготовки и стружку. Определена область существования полного решения и предложен критерий выбора предпочтительного решения.

Список литературы

1. Ernst H., Merchant M.E. *Chip formation, friction and high quality machined surfaces* // Trans. A.S.M. 1941. V. 29. P. 299–378.
2. Lee E.H., Shaffer B.W. *The theory of plasticity applied to a problem of machining* // J. Appl. Mech., Trans. A.S.M.E. 1951. V. 73. P. 405–413.
3. Егорова Ю.Г., Кабалдин Ю.Г., Хромов А.И. *О жесткопластической модели задачи резания металлов* // Прикладные задачи механики деформируемого твердого тела и прогрессивные технологии в машиностроении: Сб. науч. трудов Института машиноведения и металлургии ДВО РАН. Владивосток: Дальнаука, 1997. С. 55–70.
4. Соколовский В.В. *Теория пластичности*. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
5. Анисимов А.Н., Хромов А.И. *Выглаживание жесткопластической поверхности клинообразным штампом при условии текучести Кулона – Мора* // Прикладная механика и техническая физика. 2010. Т. 51, №2. С. 176–182.
6. Bishop J.F.W. *On the complete solution to problems deformation of a plastic-rigid material* // J. Mech. and Phys. Solids. 1953. V. 2, №1. P. 43–53.
7. Хромов А.И. *Деформация и разрушение жесткопластических тел*. Владивосток: Дальнаука, 1996. 181 с.

References

1. Ernst H., Merchant M.E. *Chip formation, friction and high quality machined surfaces* // Trans. A.S.M. 1941. V. 29. P. 299–378.
2. Lee E.H., Shaffer B.W. *The theory of plasticity applied to a problem of machining* // J. Appl. Mech., Trans. A.S.M.E. 1951. V. 73. P. 405–413.
3. Egorova Yu.G., Kabaldin Yu.G., Khromov A.I. *O zhestkoplasticheskoy modeli zadachi rezaniya metallov* // Prikladnye zadachi mekhaniki deformiruемого tverdogo tela i progressivnyye tekhnologii v mashinostroenii: Sb. nauch. trudov Instituta mashinovedeniya i metallurgii DVO RAN. Vladivostok: Dal'nauka, 1997. S. 55–70.
4. Sokolovskiy V.V. *Teoriya plastichnosti*. M.: Vysshaya shkola, 1969. 608 s.
5. Anisimov A.N., Khromov A.I. *Vyglazhivanie zhestkoplasticheskoy poverkhnosti*

klinoobraznym shtampom pri uslovii tekuchesti Kulona – Mora // Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika. 2010. T. 51, №2. S. 176–182.

6. Bishop J.F.W. *On the complete solution to problems deformation of a plastic-rigid material // J. Mech. and Phys. Solids. 1953. V. 2, №1. P. 43–53.*

7. Khromov A.I. *Deformatsiya i razrushenie zhestkoplasticheskikh tel. Vladivostok: Dal'nauka, 1996. 181 s.*

RIGID-PLASTIC ANALYSIS OF CUTTING PROBLEM SUBJECT TO A COULOMB–MOHR YIELD CONDITION

Anisimov A.N.¹, Egorova Yu.G.², Khromov A.I.²

¹*Amur State University of Humanities and Pedagogy, Komsomolsk-on-Amur,
Russian Federation*

²*Komsomolsk-on-Amur State Technical University, Komsomolsk-on-Amur,
Russian Federation*

Rigid-plastic analysis of cutting problem with isolated slip line is done. Stresses on the slip line satisfy a Coulomb–Mohr yield condition. Stress field, velocity field and strain field are determined. Local continuation of stress field to a blank body and to cuttings is constructed. Full solution area is identified, the criteria of preferred solution selection is offered. The dependencies of strain distribution and density changing in cuttings are done.

Keywords: theory of plasticity, plain deformation, rigid-plastic body, cutting without fracture.