

УДК 539.3

НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С МЯГКИМ ФУНКЦИОНАЛЬНО- ГРАДИЕНТНЫМ ПОКРЫТИЕМ ПРИ ВНЕДРЕНИИ ШТАМПА С ПЛОСКИМ ОСНОВАНИЕМ*

© 2015 г. **Айзикович С.М., Волков С.С., Васильев А.С.**

*Донской государственный технический университет,
Ростов-на-Дону, Российская Федерация*

saizikovich@gmail.com

Поступила в редакцию 31.03.2015

Определение напряженного состояния внутри покрытий при контактном воздействии – одна из центральных задач трибологии. Решение этой задачи дает возможность оптимально подобрать закон изменения упругих свойств в покрытии с целью снижения концентрации касательных напряжений в области сопряжения покрытия и подложки и тем самым уменьшить вероятность отслаивания покрытия и разрушения изделия.

Для описания напряженного состояния мягкого упругого функционально-градиентного покрытия использовано полуаналитическое решение контактной задачи о внедрении недеформируемого штампа с плоской подошвой в мягкий, неоднородный по глубине упругий слой, лежащий на однородном полупространстве, в предположении отсутствия трения между основанием штампа и упругим слоем. Решение является асимптотически точным как для больших, так и для малых значений относительной толщины покрытия. Показано, что полученное распределение контактных напряжений на поверхности покрытия дает возможность более точно исследовать напряженное состояние внутри покрытия. Предложенный метод позволяет учесть влияние деформируемости существенно более жесткой упругой подложки, с высокой точностью рассчитать и проанализировать напряженно-деформированное состояние по глубине полупространства с функционально-градиентным покрытием. Рассмотрен пример, когда на границе покрытие/подложка упругие свойства покрытия и подложки различаются на два порядка.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, функционально-градиентное покрытие, контактная задача, аналитическое решение.

Введение

Для улучшения трибологических свойств контактно взаимодействующих поверхностей элементов конструкций широко используются покрытия. Правильно подобранные покрытия позволяют снизить коэффициент трения и повысить устой-

*Фрагменты работы выполнены при поддержке грантами РФФИ 13-08-01435-а, 14-08-91166 ГФЕН_а, 14-07-00705-а, 15-07-05820-а, стипендией Президента РФ № СП-3708.2015.1 и госзаданием Минобрнауки РФ.

чивость взаимодействующих элементов конструкций при механическом, тепловом и других видах воздействий. Подбор покрытия необходимо осуществлять с учетом анализа напряжений, возникающих в нем. Например, известно, что зоны с максимальными растягивающими напряжениями часто рассматривают как фактор, который инициирует развитие трещин. Для однородных покрытий эта зона в ряде случаев находится на границе раздела между покрытием и подложкой [1].

Во многих работах напряженное состояние упругого слоя (полупространства) при контактном взаимодействии исследуется в предположении, что распределение контактных давлений под штампом заранее известно и приближенно соответствует распределению контактных давлений в задаче Герца [2, 3]. Однако в работе [1] показано, что для тонких покрытий использование решения Герца дает большую погрешность, так как для материалов с покрытиями, особенно для материалов с тонкими покрытиями, распределение контактных давлений под сферическим штампом в общем случае существенно отличается от распределения Герца [4].

В настоящей статье напряженное состояние упругого слоя описывается приближенным аналитическим решением высокой точности, полученным для распределения контактных давлений под штампом на поверхности функционально-градиентного покрытия. Решение эффективно во всей области значений геометрического параметра задачи [5, 6]. Полученное распределение контактных напряжений на поверхности покрытия дает возможность более точно исследовать напряженное состояние внутри покрытия. Используемый подход также позволяет учесть влияние деформируемости существенно более жесткой упругой подложки.

1. Постановка задачи

Недеформируемый штамп с плоской подошвой вдавливается в поверхность упругого, неоднородного по глубине слоя толщиной H , лежащего на однородном полупространстве. С неоднородным слоем связана цилиндрическая система координат r, φ, z , ось z направлена по нормали к поверхности и проходит через середину штампа. Под действием нормально приложенной силы P штамп вдавливается в поверхность слоя ($z = 0$). Силы трения между основанием штампа и упругим слоем отсутствуют.

Считаем, что модуль Юнга и коэффициент Пуассона можно представить в следующем виде:

$$E(z), \nu(z) = \begin{cases} E_1(z), \nu_1(z), & -H \leq z \leq 0, \\ E_2, \nu_2, & -\infty < z < -H, \end{cases}$$

$E_1(z), \nu_1(z)$ – произвольные гладкие функции, $E_2(z), \nu_2(z) = \text{const}$. Параметр $\beta = E_2/E_1(-H)$ характеризует скачок модуля Юнга на границе покрытия и подложки. Здесь и далее нижний индекс 1 соответствует неоднородному упругому слою (покрытию), индекс 2 – однородной подложке.

Под действием силы P штамп переместится в направлении, обратном направлению оси z , на величину δ . Вне зоны контакта поверхность покрытия свободна от напряжений. Граничные условия на поверхности полупространства ($z = 0$) при сделанных предположениях примут вид:

$$\tau_{zr}^1 = 0, \quad \begin{cases} \sigma_z^1 = 0, & r > a, \\ w^1 = -\delta, & r \leq a. \end{cases} \quad (1)$$

Считаем, что на границе между покрытием и подложкой ($z = -H$) выполнено условие сцепления:

$$\tau_{zr}^1 = \tau_{zr}^2, \quad \sigma_z^1 = \sigma_z^2, \quad w^1 = w^2, \quad u^1 = u^2. \quad (2)$$

Требуется определить распределение контактных давлений под штампом:

$$\sigma_z|_{z=0} = -q(r), \quad r \leq a, \quad (3)$$

а также рассчитать напряженное состояние по глубине покрытия и подложки. Здесь $q(r)$ – неизвестная функция напряжений, возникающих под штампом. Считаем, что при $r \rightarrow \infty$ и $z \rightarrow -\infty$ напряжения в полупространстве исчезают.

2. Построение решения

Используя интегральные преобразования Ханкеля:

$$\begin{aligned} u(r, z) &= -\int_0^\infty U(\gamma, z) J_1(\gamma r) \gamma d\gamma, & w(r, z) &= \int_0^\infty W(\gamma, z) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma, \\ q(r) &= \int_0^\infty Q(\gamma) J_0(\gamma r) \gamma d\gamma \end{aligned} \quad (4)$$

и вводя в рассмотрение следующие величины:

$$\begin{aligned} W_1^*(\gamma, z) &= -\Theta_1(0) \gamma W_1(\gamma, z), & U_1^*(\gamma, z) &= -\Theta_1(0) \gamma U_1(\gamma, z), \\ \Theta_1(z) &= \frac{E_1(z)}{2(1 - \nu_1^2(z))}, \end{aligned} \quad (5)$$

поставленную задачу сводим к решению интегрального уравнения:

$$\int_0^a q(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty W_1^*(\gamma, 0) J_0(\gamma r) J_0(\gamma \rho) du = \Theta_1(0) \delta, \quad r \leq a. \quad (6)$$

Деля в (6) замену переменных:

$$\gamma H = u, \quad \lambda = H/a, \quad r' = r/a, \quad \rho' = \rho/a, \quad W_1^*(u/H, 0) = L(u), \quad q(\rho'a) = \tau(\rho),$$

придем к безразмерному интегральному уравнению Фредгольма первого рода относительно неизвестной функции $\tau(\rho)$:

$$\int_0^1 \tau(\rho) \rho d\rho \int_0^\infty L(u) J_0(ur\lambda^{-1}) J_0(u\rho\lambda^{-1}) du = \lambda \Theta_1(0) \delta a^{-1}, \quad r \leq 1. \quad (7)$$

Здесь и далее штрих опускаем.

Используя двусторонний асимптотический метод [5–7], который основан на возможности с высокой точностью аппроксимировать трансформанту ядра выражением следующего вида:

$$L(u) \approx L_N(u) = \prod_{i=1}^N \frac{u^2 + A_i^2}{u^2 + B_i^2}, \quad A_i, B_i \in C, \quad (8)$$

получим в аналитическом виде приближенное решение интегрального уравнения (7).

Решение имеет вид:

$$\tau(r) = \frac{2\Theta_1(0)\delta}{\pi} \left(L_N^{-1}(0) \frac{1}{\sqrt{1-r^2}} + \sum_{i=1}^N C_i \left[\frac{\operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1})}{\sqrt{1-r^2}} - A_i \lambda^{-1} \int_r^1 \frac{\operatorname{sh}(A_i \lambda^{-1}) t dt}{\sqrt{t^2 - r^2}} \right] \right). \quad (9)$$

Доказано, что решение является асимптотически точным как для больших, так и для малых значений относительной толщины покрытия λ [5]. Подробнее точность построенного решения и связь ее с точностью аппроксимации трансформанты ядра при произвольном значении параметра λ анализируются в работе [6], где на примере задачи о кручении показано, что использование двустороннего асимптотического метода позволяет построить решение высокой точности даже для сложных законов изменения упругих свойств по глубине покрытия.

Неизвестные C_i определяются из системы линейных алгебраических уравнений вида:

$$\sum_{i=1}^N C_i \frac{A_i \operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1}) + B_i \operatorname{sh}(A_i \lambda^{-1})}{A_i^2 - B_k^2} = B_k^{-1} \lambda L_N^{-1}(0). \quad (10)$$

Система (10) получена из условия удовлетворения найденного решения (9) исходному уравнению (7).

Для построения распределения смещений по глубине покрытия используем формулы (4). С учетом замены переменных (5) получим:

$$\begin{aligned} u(r, z) &= \frac{a}{\Theta_1(0)} \int_0^\infty U^*(\gamma, z) T(\gamma) J_1(r\gamma) d\gamma, \\ w(r, z) &= -\frac{a}{\Theta_1(0)} \int_0^\infty W^*(\gamma, z) T(\gamma) J_0(r\gamma) d\gamma. \end{aligned} \quad (11)$$

Функции $U^*(\gamma, z)$ и $W^*(\gamma, z)$, а также производные от этих функций по переменной z строятся численно с использованием модификации метода моделирующих функций [8, 9]. Функция $T(\gamma)$ – образ преобразования Ханкеля контактных напряжений (9) – записывается следующим образом:

$$T(\gamma) = \frac{2\Theta_1(0)\delta}{\pi} \left(\sum_{i=1}^N \left[\frac{\operatorname{ch}(A_i \lambda^{-1}) \gamma \sin \gamma + A_i \lambda^{-1} \operatorname{sh}(A_i \lambda^{-1}) \cos \gamma}{\gamma^2 + A_i^2 \lambda^{-2}} \right] + L_N^{-1}(0) \frac{\sin \gamma}{\gamma} \right). \quad (12)$$

Связь между векторами напряжений и смещений имеет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2M(z) \frac{\partial u}{\partial r} + \Lambda(z)\theta, & \sigma_\varphi &= 2M(z) \frac{u}{r} + \Lambda(z)\theta, \\ \sigma_z &= 2M(z) \frac{\partial w}{\partial z} + \Lambda(z)\theta, & \tau_{rz} &= M(z) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right), \\ \theta &= \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \Lambda(z) &= \frac{E(z)\nu(z)}{(1+\nu(z))(1-2\nu(z))}, & M(z) &= \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))}. \end{aligned} \quad (13)$$

Введем обозначения:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{a}{\Theta_1(0)} \int_0^\infty U^*(\gamma, z) T(\gamma) J_1(r\gamma) d\gamma, & I_2 &= \frac{a}{\Theta_1(0)} \int_0^\infty T(\gamma) \frac{\partial U^*(\gamma, z)}{\partial z} J_1(r\gamma) d\gamma, \\ I_3 &= \frac{a}{\Theta_1(0)} \int_0^\infty T(\gamma) W^*(\gamma, z) J_0(r\gamma) d\gamma, & I_4 &= \frac{a}{\Theta_1(0)} \int_0^\infty T(\gamma) \frac{\partial W^*(\gamma, z)}{\partial z} J_0(r\gamma) d\gamma, \end{aligned}$$

$$I_5 = \frac{a}{\Theta_1(0)} \int_0^\infty T(\gamma) W^*(\gamma, z) J_1(r\gamma) d\gamma, \quad I_6 = \frac{a}{\Theta_1(0)} \int_0^\infty T(\gamma) U^*(\gamma, z) J_0(r\gamma) d\gamma. \quad (14)$$

Из (13) с учетом (4), (5) и (14) получим

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) &= -(\Lambda(z) + 2M(z))I_4(r, z) + \Lambda(z)I_6(r, z), \\ \sigma_r(r, z) &= (\Lambda(z) + 2M(z))I_6(r, z) - \Lambda(z)I_4(r, z) - \frac{2M(z)}{r}I_1(r, z), \\ \sigma_\phi(r, z) &= 2M(z)r^{-1}I_1(r, z) + \Lambda(z)(-I_4(r, z) + I_6(r, z)), \\ \tau_{rz}(r, z) &= M(z)(I_2(r, z) + I_5(r, z)). \end{aligned} \quad (15)$$

Расчет напряженного состояния неоднородного слоя сводится к вычислению интегралов $I_i(r, z)$, $i = 1, 6$.

3. Численные примеры

В качестве примера проанализируем напряженное состояние внутри мягкого ($\beta = 100$) неоднородного слоя с модулем Юнга, изменяющимся по одному из следующих законов:

$$\text{закон 1: } E_1^1(z) = 1;$$

$$\text{закон 2: } E_1^2(z) = 3,5 + 2,5 \cdot z/H;$$

$$\text{закон 3: } E_1^3(z) = \frac{1}{3,5} - \frac{2,5}{3,5} \frac{z}{H}.$$

Закон 1 соответствует однородному слою, закон 2 описывает линейное убывающее, а закон 3 – линейное возрастающее изменение модуля Юнга с глубиной. Коэффициент Пуассона покрытия и подложки считаем равным 0,3. Модуль Юнга на поверхности и в глубине покрытий для законов 2, 3 различается в 3,5 раза.

Для прогнозирования областей, максимально подверженных риску разрушения, рассмотрим главные напряжения, которые для данной задачи имеют вид:

$$\sigma_{I,III} = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_z) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_r - \frac{1}{2}\sigma_z\right)^2 + \tau_{rz}^2}, \quad \sigma_{II} = \sigma_\phi. \quad (16)$$

Ограничимся рассмотрением случая $\lambda = 1$, что соответствует толщине покрытия, равной радиусу зоны контакта.

Напряжения σ_I принимает наибольшие значения в окрестности края штампа ($r \approx a$), причем чем ближе к поверхности, тем больше его абсолютные значения и тем быстрее они возрастают при $r \rightarrow a$ (рис. 1). В приповерхностных слоях полупространства наблюдается еще одна зона возрастания величины σ_I : $1,1a \leq r \leq 1,7a$ (рис. 1а, б). На поверхности под штампом σ_I равны нулю.

На рис. 2, 3 приведены графики величин σ_I , σ_{II} в зависимости от глубины z при значениях радиальной координаты $r = 0,5a$; a ; $1,3a$; $2a$ для законов 1–3. В покрытии наибольшие значения напряжений σ_I наблюдаются на поверхности (для точек вне зоны контакта) или в ее окрестности (для точек под штампом) (рис. 2). В подложке максимальные значения достигаются в окрестности $z \approx -1,5H$. Увеличение концентрации напряжений σ_{II} наблюдается в зоне сопряжения покрытие–подложка

(рис. 3). Под штампом ($r \leq a$) величина σ_{II} обращается в ноль при $z = 0$, а вне штампа ($r > a$) резко возрастает вблизи поверхности ($z = 0$).

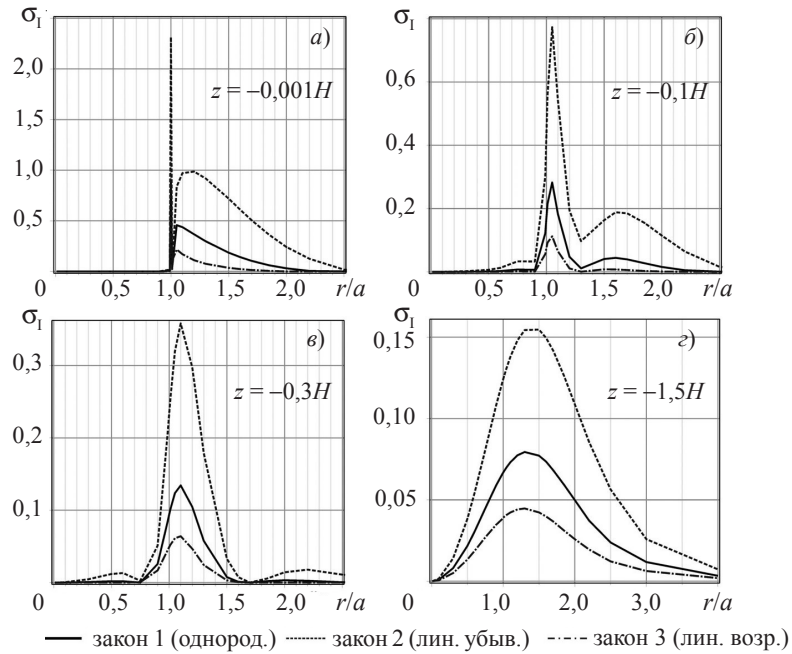


Рис. 1. Главные напряжения σ_I в неоднородном слое в зависимости от r

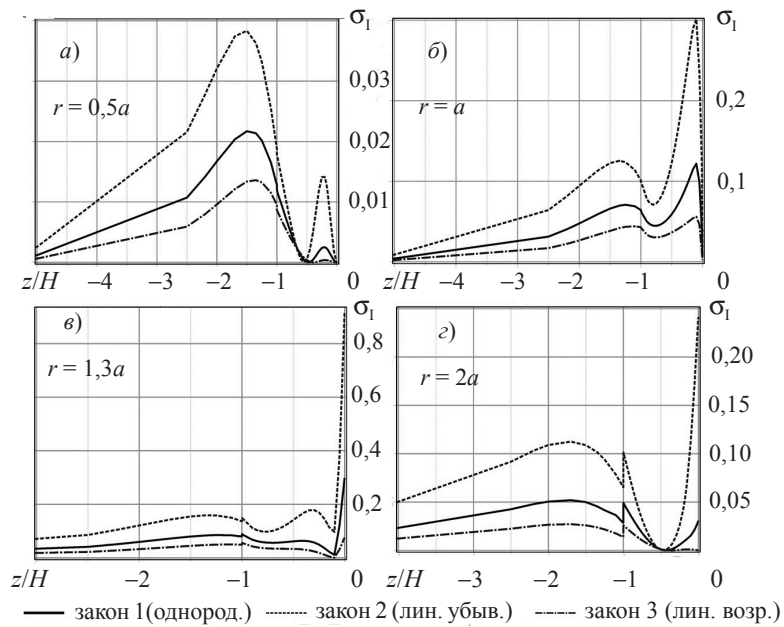


Рис. 2. Главные напряжения σ_I в неоднородном слое в зависимости от z

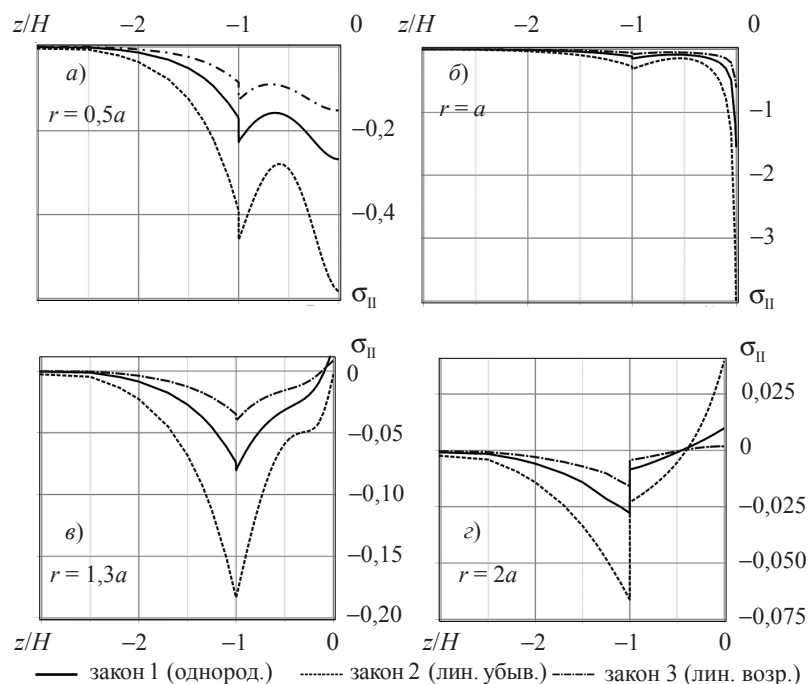


Рис. 3. Главные напряжения σ_{II} в неоднородном слое в зависимости от z

Заключение

Предложенный метод позволяет с высокой точностью рассчитать и проанализировать напряженно-деформированное состояние полупространства с функционально-градиентным покрытием. Подход позволяет оптимально выбрать закон изменения упругих свойств в покрытии, например с целью снижения концентрации касательных напряжений в области сопряжения покрытия и подложки, и тем самым уменьшить вероятность отслаивания покрытия и разрушения изделия.

Список литературы

1. Kulchytsky-Zhyhailo R., Rogowski G. *Stresses in hard coating due to a rigid spherical indenter on a layered elastic half-space* // Tribology International. 2010. Vol. 43 (9). P. 1592–1601.
2. Zhang X.C., Xu B.S., Wang H.D., Wu Y.X., Jiang Y. *Hertzian contact response of single-layer, functionally graded and sandwich coatings* // Materials and Design. 2007. Vol. 28. P. 47–54.
3. Schwarzer N., Richter F., Hecht G. *The elastic field in a coated half-space under Hertzian pressure distribution* // Surf. Coat. Technol. 1999. Vol. 114. P. 292–304.
4. Айзикович С.М., Александров В.М., Трубчик И.С., Кренев Л.И. *Внедрение сферического индентора в полупространство с функционально-градиентным упругим покрытием* // Докл. РАН. 2008. Т. 418, № 2. С. 188–192.
5. Айзикович С.М. *Асимптотическое решение одного класса парных уравнений* // ПММ. 1990. Т. 54. С. 872–877.
6. Айзикович С.М., Васильев А.С. *Двухсторонний асимптотический метод решения интегрального уравнения контактной задачи о кручении неоднородного по глубине упругого полупространства* // ПММ. 2013. Т. 77, № 1. С. 129–137.
7. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M., Jeng Y.-R. *Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity for inhomogeneous layers* // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2014. Vol. 94, Is. 9. P. 705–712.

8. Бабешко В.А., Глушков Е.В., Глушкова Н.В. *Методы построения матриц Грина для стратифицированного упругого полупространства* // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1987. Т. 27, № 1. С. 93–101.

9. Айзикович С.М. *Контактные задачи теории упругости для неоднородных сред*. М.: Физматлит, 2006. 240 с.

References

1. Kulchitsky-Zhyhailo R., Rogowski G. *Stresses in hard coating due to a rigid spherical indenter on a layered elastic half-space* // Tribology International. 2010. Vol. 43 (9). P. 1592–1601.

2. Zhang X.C., Xu B.S., Wang H.D., Wu Y.X., Jiang Y. *Hertzian contact response of single-layer, functionally graded and sandwich coatings* // Materials and Design. 2007. Vol. 28. P. 47–54.

3. Schwarzer N., Richter F., Hecht G. *The elastic field in a coated half-space under Hertzian pressure distribution* // Surf. Coat. Technol. 1999. Vol. 114. P. 292–304.

4. Aizikovich S.M., Alexandrov V.M., Trubchik I.S., Krenev L.I. *Introduction of a spherical indenter into a half-space with a functionally graded elastic coating* // Dokl. Physics. 2008. Vol. 53(1). P. 186–192.

5. Aizikovich S.M. *An asymptotic solution of a class of coupled equations* // J. Appl. Math. Mech. 1990. Vol. 54(5). P. 719–724.

6. Aizikovich S.M., Vasiliev A.S. *A bilateral asymptotic method of solving the integral equation of the contact problem of the torsion of an elastic half-space inhomogeneous in depth* // J. Appl. Math. Mech. 2013. Vol. 77(1). P. 91–97.

7. Vasiliev A.S., Volkov S.S., Aizikovich S.M., Jeng Y.-R. *Axisymmetric contact problems of the theory of elasticity for inhomogeneous layers* // ZAMM – Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. 2014. Vol. 94, Is. 9. P. 705–712.

8. Babeshko V.A., Glushkov E.V., Glushkova N.V. *Methods of constructing Green's matrix of a stratified elastic half-space* // USSR Comp. Math/ Math. Phys. 1987. Vol. 27. P. 60–65.

9. Aizikovich S.M. *Kontaknyye zadachi teorii uprugosti dlya neodnorodnykh sred*. М.: Fizmatlit, 2006. 240 с.

THE STRESSED-STRAINED STATE OF AN ELASTIC HALF-SPACE WITH A SOFT FUNCTIONALLY GRADED COATING PENETRATED BY A FLAT-BASE PUNCH

Aizikovich S.M., Volkov S.S., Vasiliev A.S.

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation

Determining the stressed state inside coatings under contact effects is one of the crucial issues of tribology. Solving this problem makes it possible to optimally choose the laws of change of elastic properties of the coating to minimize tangential stress concentration along the coating-substrate interface, thus minimizing the probability of separation of the coating and failure of the article.

To describe the stressed state of a soft elastic functionally graded coating, the authors use a semi-analytical solution of a contact problem of a non-deformable flat-base die penetrating a soft inhomogeneous through the thickness elastic layer covering a homogeneous half-space, in the assumption of the absence of friction between the base of the die and the elastic layer. The solution is asymptotically accurate both for big and small values of the relative coating thickness. It is shown that the obtained distribution of the contact pressures on the coating surface makes it possible to analyze the stressed state inside the coating in a more detail. The present method makes it possible to take into account the effect of deformability of a considerably harder elastic substrate, and to compute and analyze the stressed-strained state through the thickness of the half-space with a functionally graded coating with a high accuracy. An example is analyzed where the elastic properties of the coating and the substrate along their interface differ by more than two orders of magnitude.

Keywords: stressed-strained state, functionally graded coating, contact problem, analytical solution.