

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ПО МАССЕ ФЕРМЫ ШМИТА С ТРЕМЯ ПАРАМЕТРАМИ*

© 2015 г.

Киселев В.Г.

*Научно-исследовательский институт механики
Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского,
Нижний Новгород, Российская Федерация*

kiselev@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 14.01.2015

В аналитическом виде решена тестовая задача оптимизации по массе трех-стержневой фермы Шмита с тремя управляемыми параметрами при ограничениях на напряжения сжатия и растяжения в стержнях. Рассмотрены несколько постановок задач: для одного направления действия внешней нагрузки из диапазона от 0 до 360 градусов, для действия поочередно всех нагрузок из этого диапазона, при исключении ограничений по напряжениям в стержнях нулевой площади сечения. Задачи поставлены и решены в безразмерном виде. Представлена миграция точки минимума массы в пространстве управляемых площадей сечений. Показано наличие нескольких локальных минимумов.

Ключевые слова: оптимизация по массе, тестовая задача, аналитическое решение.

Введение

Область инженерной оптимизации конструкций при различных критериях полезности привлекает внимание исследователей достаточно длительное время. Для создания, изучения, иллюстрации и проверки методов оптимизации актуальными являются поиск, постановка и решение простых тестовых задач и примеров. Хорошим примером и иллюстрацией методов решения для задач оптимизации конструкций служит трехстержневая ферма, называемая фермой Шмита.

Впервые упоминание об этой конструкции появилось в статье [1]. Затем конструкция обсуждалась во многих научных статьях и использовалась в учебниках по инженерной оптимизации как тестовый и иллюстративный пример. В статье [2] проводится анализ оптимальных по объему проектов фермы при ограничениях на напряжения, при предельном пластическом проектировании, в условиях совместности деформаций. Рассматриваются два управляемых параметра и вертикальная действующая сила. В монографии [3] задача рассматривается для двух целевых функций: веса и перемещения. В [4] ферма используется как тестовая задача при двух вариантах нагружения. В работе [5] ферма рассматривается при нескольких

* Выполнено при финансовой поддержке Минобрнауки России (Уникальный идентификатор проекта «RFMEFI57814X0036»).

вариантах нагружения в связи с топологической оптимизацией и сингулярными проектами. В учебнике [6] решается задача оптимизации фермы при ограничениях на перемещение и низшие границы площадей. В [7] задача оптимизации по массе при ограничениях на напряжения решена в аналитическом виде для двух управляемых параметров. В [8] ферма используется как иллюстрация для предельного пластического анализа, аппроксимаций и анализа чувствительности. В [9] рассмотрен другой внешний вид трехстержневой фермы.

В настоящей статье задача оптимизации по массе фермы Шмита решена в аналитическом виде при ограничениях на напряжения для трех управляемых параметров и угла действия нагрузки от 0 до 360°. Рассмотрены особые случаи: исключение ограничений на напряжения в стержнях нулевой площади сечения, учет всех нагрузок из диапазона.

1. Постановка задачи

Ферма Шмита представляет собой плоскую трехстержневую конструкцию (рис. 1).

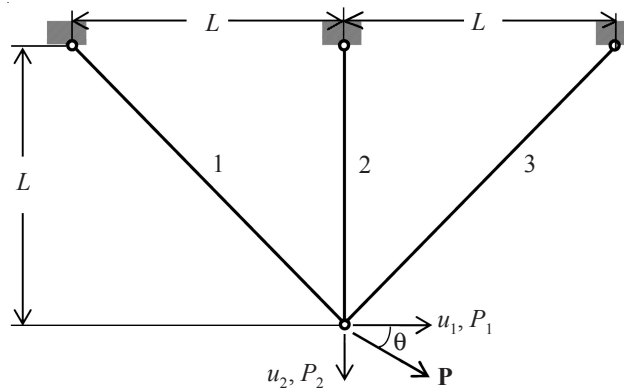


Рис. 1. Ферма Шмита

Три узла фермы полностью закреплены. Четвертый узел свободен, имеет 2 степени свободы – перемещения u_1 , u_2 , и к нему приложена сила величиной P под углом θ к горизонту. Угол θ отсчитывается по часовой стрелке и может изменяться в диапазоне от 0 до 360°; L – размер фермы; x_1 , x_2 , x_3 – площади поперечных сечений стержней; ρ , E , σ_d – плотность, модуль продольной упругости и допускаемое напряжение растяжения и сжатия материала фермы.

Цель проектирования – выбор площадей поперечных сечений стержней x_1 , x_2 , x_3 (управляемые параметры, переменные проектирования), таких, чтобы ферма имела минимальную массу и чтобы удовлетворялись ограничения на напряжения и площади сечений стержней.

Целевой функцией является масса конструкции

$$f = \rho L(\sqrt{2}x_1 + x_2 + \sqrt{2}x_3). \quad (1)$$

Горизонтальное и вертикальное смещения u_1 и u_2 свободного узла определяют из уравнений равновесия:

$$K(x)\mathbf{u} - \mathbf{P} = 0,$$

где $\mathbf{u} = \{u_1, u_2\}^T$, $K(x)$ – положительно определенная матрица жесткости, \mathbf{P} – вектор нагрузки:

$$K(x) = \frac{\sqrt{2}E}{4L} \begin{bmatrix} (x_1 + x_3) & (x_1 - x_3) \\ (x_1 - x_3) & (x_1 + 2\sqrt{2}x_2 + x_3) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P \cos \theta \\ P \sin \theta \end{Bmatrix}. \quad (2)$$

Напряжения в стержнях выражаются через перемещения u_1, u_2 :

$$\sigma_1 = \frac{E(u_1 + u_2)}{2L}, \quad \sigma_2 = \frac{Eu_2}{L}, \quad \sigma_3 = \frac{E(u_2 - u_1)}{2L}. \quad (3)$$

Площади поперечных сечений неотрицательны, откуда следуют ограничения:

$$g_1 = -x_1 \leq 0, \quad g_2 = -x_2 \leq 0, \quad g_3 = x_3 \leq 0. \quad (4)$$

Ограничения на напряжения сжатия и растяжения стержней примут вид:

$$g_{4,5} = \pm \frac{E(u_1 + u_2)}{2L} - \sigma_d \leq 0, \quad (5)$$

$$g_{6,7} = \pm \frac{Eu_2}{L} - \sigma_d \leq 0, \quad (6)$$

$$g_{8,9} = \pm \frac{E(u_2 - u_1)}{2L} - \sigma_d \leq 0. \quad (7)$$

Теперь задачу проектирования можно рассматривать как задачу выбора таких управляемых параметров x_1, x_2, x_3 , которые минимизируют массу (1) и удовлетворяют ограничениям (4)–(7).

2. Задача оптимизации в безразмерной форме

Введем следующие безразмерные переменные: площади сечений $\bar{x}_i = x_i \sigma_d / P$, масса $\bar{f} = f \sigma_d / (\rho L P)$, напряжения $\bar{\sigma}_i = \sigma_i / \sigma_d$, перемещения $\bar{u}_i = u_i E / (L \sigma_d)$.

В этом случае задача оптимизации фермы Шмита с тремя параметрами в соответствии с (1)–(7) формулируется следующим образом.

Найти величины $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, которые минимизируют функцию

$$\bar{f} = \sqrt{2}\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \sqrt{2}\bar{x}_3 \quad (8)$$

и удовлетворяют ограничениям:

1) положительности площадей

$$\bar{g}_1 = -\bar{x}_1 \leq 0, \quad \bar{g}_2 = -\bar{x}_2 \leq 0, \quad \bar{g}_3 = -\bar{x}_3 \leq 0; \quad (9)$$

2) допускаемых величин напряжений на растяжение и сжатие

$$\bar{g}_4 = \bar{\sigma}_1 - 1 \leq 0, \quad (10)$$

$$\bar{g}_5 = -\bar{\sigma}_1 - 1 \leq 0, \quad (11)$$

$$\bar{g}_6 = \bar{\sigma}_2 - 1 \leq 0, \quad (12)$$

$$\bar{g}_7 = -\bar{\sigma}_2 - 1 \leq 0, \quad (13)$$

$$\bar{g}_8 = \bar{\sigma}_3 - 1 \leq 0, \quad (14)$$

$$\bar{g}_9 = -\bar{\sigma}_3 - 1 \leq 0. \quad (15)$$

Безразмерные напряжения выражаются с помощью (3) через безразмерные перемещения:

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{\bar{u}_1 + \bar{u}_2}{2}, \quad \bar{\sigma}_2 = \bar{u}_2, \quad \bar{\sigma}_3 = \frac{\bar{u}_2 - \bar{u}_1}{2}. \quad (16)$$

Уравнения равновесия в безразмерной форме записываются с помощью (2) таким образом:

$$\frac{\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} (\bar{x}_1 + \bar{x}_3) & (\bar{x}_1 - \bar{x}_3) \\ (\bar{x}_1 - \bar{x}_3) & (\bar{x}_1 + 2\sqrt{2}\bar{x}_2 + \bar{x}_3) \end{bmatrix} \bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}. \quad (17)$$

С помощью (16), (17) исключаем из задачи переменные \bar{u}_1, \bar{u}_2 .

Для получения выражений безразмерных напряжений через безразмерные площади в системе Matlab был составлен следующий код:

```
syms teta x1 x2 x3 s1 s2 s3 K u P0
k2 = sqrt(2);
% Матрица жесткости
K = k2/4 * [x1+x3, x1-x3; x1-x3, x1+2*k2*x2+x3];
P0 = [cos(teta); sin(teta)];
% Решение K*u = P0
u = K \ P0;
% Напряжения
s1 = simplify(u(2)+u(1))/2
s2 = simplify(u(2))
s3 = simplify(u(2)-u(1))/2
```

Полученные выражения для безразмерных напряжений принимают вид:

$$\bar{\sigma}_1 = \frac{2\bar{x}_2 \cos \theta + \sqrt{2}\bar{x}_3 (\sin \theta + \cos \theta)}{\sqrt{2}\bar{x}_1\bar{x}_2 + 2\bar{x}_1\bar{x}_3 + \sqrt{2}\bar{x}_2\bar{x}_3}, \quad (18)$$

$$\bar{\sigma}_2 = \sqrt{2} \frac{\bar{x}_1 (\sin \theta - \cos \theta) + \bar{x}_3 (\sin \theta + \cos \theta)}{\sqrt{2}\bar{x}_1\bar{x}_2 + 2\bar{x}_1\bar{x}_3 + \sqrt{2}\bar{x}_2\bar{x}_3}, \quad (19)$$

$$\bar{\sigma}_3 = \frac{\sqrt{2}\bar{x}_1 (\sin \theta - \cos \theta) - 2\bar{x}_2 \cos \theta}{\sqrt{2}\bar{x}_1\bar{x}_2 + 2\bar{x}_1\bar{x}_3 + \sqrt{2}\bar{x}_2\bar{x}_3}. \quad (20)$$

Выражения (18)–(20) подставляются в ограничения (10)–(15), и задача оптимизации фермы Шмита с тремя параметрами ставится следующим образом.

Найти величины $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$, которые минимизируют функцию (8) и удовлетворяют ограничениям (9)–(15) при наличии соотношений (18)–(20). Задача содержит 3 управляемых параметра и 9 ограничений-неравенств. Все входящие функции дифференцируемы нужное количество раз везде, кроме точки $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (0, 0, 0)$.

3. Решение задачи

Необходимые условия Куна – Такера минимума массы в данной задаче представляют собой систему 12 нелинейных уравнений относительно 12 неизвестных. Решать ее в аналитическом общем виде затруднительно, и попытка не увенчалась успехом.

Получим некоторые свойства решения задачи графически в трехмерном пространстве $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ и затем используем эти свойства для аналитического решения.

Для построения поверхности постоянного уровня целевой функции и шести поверхностей ограничений на напряжения в пространстве $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3$ для определенного угла θ действия нагрузки в системе Matlab был составлен код:

```
% Ферма Шмита с тремя параметрами
clc; clf;
% Параметры
k2 = 2^(1/2);
xmax = 4.0; ymax = 4.0; nx = 150; ny = 150; Zmax = 3.0;
[X, Y] = meshgrid(0.0:xmax/nx:xmax, 0:ymax/ny:ymax);
teta1 = 0; teta = teta1/180*pi; % Угол действия нагрузки,
f0 = 2.1; % уровень целевой функции
% f=f0
Z = f0/k2-X-Y/k2;
Z(Z<0) = 0; % Обрезка
Z(Z>Zmax) = Zmax;
C = zeros(size(Z))+0.6; % Цвет
C(Z==0) = NaN;
C(Z==Zmax) = NaN;
surf(X, Y, Z, C)
hold on;
% Еще аналогичных кодов для s1=1, s2=1, s3=1, s1=-1, s2=-1, s3=-1
%Z = (X.*Y-k2*cos(teta)*Y) ./ (sin(teta)+cos(teta)-k2*X-Y);
%Z = (X.*Y+(cos(teta)-sin(teta))*X) ./ (sin(teta)+cos(teta)-k2*X-Y);
%Z = (-X.*(Y-sin(teta)+cos(teta))-k2*cos(teta)*Y) ./ (k2*X+Y);
%Z = -Y.*(X+k2*cos(teta)) ./ (sin(teta)+cos(teta)+k2*X+Y);
%Z = (-X.*(Y-cos(teta)+sin(teta))) ./ (sin(teta)+cos(teta)+k2*X+Y);
%Z = (-X.*Y-(sin(teta)-cos(teta))*X+k2*cos(teta)*Y) ./ (k2*X+Y);
view([100,100,100]);
colormap(jet)
colorbar
legend(strcat('f=', sprintf('%f', f0)), 's1=1', 's2=1', 's3=1',
's1=-1', 's2=-1', 's3=-1')
title(strcat('teta=', sprintf('%f', teta1)))
xlabel('x1'); ylabel('x2'); zlabel('x3');
```

Пример результата работы программы приведен на рис. 2. Темный треугольник на пересечении поверхностей ограничений – это видимая поверхность уровня целевой функции. Этот треугольник лежит рядом с точкой условного минимума массы.

Анализ рисунка показывает, что в точке минимума активны ограничения $\bar{\sigma}_3 = -1$ и $\bar{\sigma}_1 = 1$.

Сканируя диапазон угла действия нагрузок от 0 до 360°, подбирая при каждом угле значение уровня целевой функции, можно качественно определить положение точки минимума и активные в этой точке ограничения. Список активных ограничений зависит от отрезков угла θ в диапазоне [0, 360°]. Затем, символично решая систему трех нелинейных уравнений, активных ограничений-равенств, можно определить координаты точки минимума $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ аналитически точно.

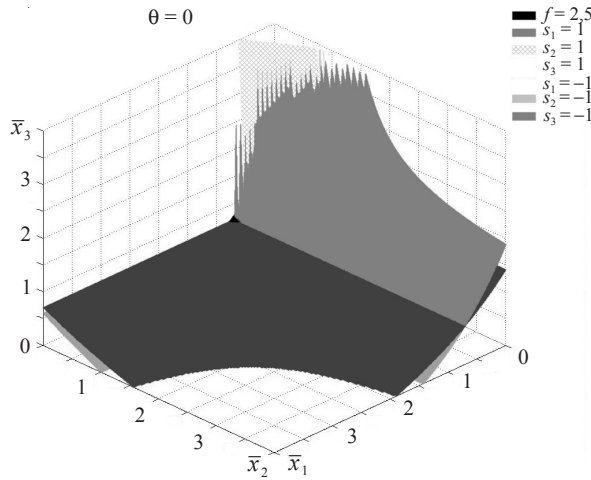


Рис. 2. Графическое решение задачи оптимизации

Аналитическое решение дает следующие формулы.

Если $0 \leq \theta \leq 45^\circ$, то активны ограничения $\bar{\sigma}_1 = 1, \bar{\sigma}_3 = -1$ и решение задачи дается следующими выражениями:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta + \sin \theta), \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \theta - \sin \theta), \quad \bar{f} = 2 \cos \theta. \quad (21)$$

Если $45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$, то активны ограничения $\bar{\sigma}_1 = 1, \bar{\sigma}_2 = 1$ и

$$\bar{x}_1 = \sqrt{2} \cos \theta, \quad \bar{x}_2 = \sin \theta - \cos \theta, \quad \bar{x}_3 = 0, \quad \bar{f} = \cos \theta + \sin \theta. \quad (22)$$

Если $90^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$, то верны выражения (22) с заменой: $\theta \rightarrow 180^\circ - \theta$, индексы $1 \leftrightarrow 3$.

Если $135^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$, то верны выражения (21) с заменой: $\theta \rightarrow 180^\circ - \theta$, индексы $1 \leftrightarrow 3$.

Если $180^\circ \leq \theta \leq 225^\circ$, то верны выражения (21) с заменой: $\theta \rightarrow \theta - 180^\circ$, индексы $1 \leftrightarrow 3$.

Если $225^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$, то верны выражения (22) с заменой: $\theta \rightarrow \theta - 180^\circ$, индексы $1 \leftrightarrow 3$.

Если $270^\circ \leq \theta \leq 315^\circ$, то верны выражения (22) с заменой: $\theta \rightarrow 360^\circ - \theta$.

Если $315^\circ \leq \theta \leq 360^\circ$, то верны выражения (21) с заменой: $\theta \rightarrow 360^\circ - \theta$.

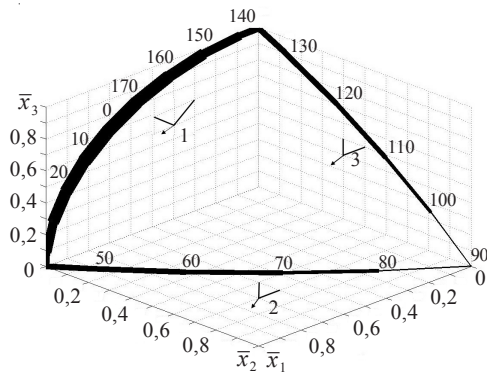


Рис. 3. Миграция точки минимума массы

В каждом оптимальном проекте один из трех стержней имеет нулевую площадь сечения. Кривая миграции точки минимума в пространстве $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ в зависимости от угла действия нагрузки θ показана на рис. 3.

Числа на кривой показывают угол действия нагрузки. Толщина линии от нуля до максимальной показывает минимальную массу в диапазоне от 1,0 до 2,0. Все части кривой лежат в координатных плоскостях. Нарисованы и отмечены цифрами конфигурации опти-

мальной фермы: 1 – отсутствует средний стержень, 2 – отсутствует правый стержень, 3 – отсутствует левый стержень.

4. Исключение ограничений на напряжения в стержнях с нулевой площадью сечения

Рассмотрим выражение (18) для напряжения в стержне 1 в случае, если площадь его поперечного сечения равна нулю ($\bar{x}_1 = 0$). Получаем

$$\bar{\sigma}_1|_{\bar{x}_1=0} = \frac{\sqrt{2} \cos \theta}{\bar{x}_3} + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\bar{x}_2}.$$

Это выражение способно формировать ограничение-неравенство для напряжения $\bar{\sigma}_1$. С другой стороны, стержень 1 при $\bar{x}_1 = 0$ отсутствует в конструкции и ограничения по напряжению в нем учитывать не логично. Логичным будет не учитывать ограничения на напряжения в отсутствующих стержнях. Снятие ограничений в задаче оптимизации может расширить допустимую область и привести к другому оптимальному проекту, лучшему, чем проект с дополнительными ограничениями. Возможен вариант появления новых локальных минимумов. Заметим, что ограничение для напряжения $\bar{\sigma}_1$ можно снять только при $\bar{x}_1 = 0$, то есть дополнительная допустимая область может появиться только в плоскости $\bar{x}_1 = 0$ и аналогично в плоскостях $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_3 = 0$. Размерность дополнительной области на 1 меньше.

Подобные соображения могут появиться при реальном численном проектировании. В результате не исключены проекты, которые могут быть улучшены по значению целевой функции за счет снятия ограничений. В частности, при топологической оптимизации элементы конструкции могут исчезать, но ограничения для них могут оставаться, внося коррективы в процесс оптимизации и влияя на конечный проект. Заметим, что условия снятия ограничений влияют на постановку задачи оптимизации, а не на процесс ее решения. Например, явление потери устойчивости для некоторых областей управляемых переменных не может возникать в принципе, и ставить ограничение по устойчивости там бессмысленно [10].

Сформулируем ограничения на напряжения для стержней 2 и 3 при $\bar{x}_1 = 0$:

$$\bar{\sigma}_2|_{\bar{x}_1=0} = \pm \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\bar{x}_2} \leq 1, \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_3|_{\bar{x}_1=0} = \mp \frac{\sqrt{2} \cos \theta}{\bar{x}_3} \leq 1. \quad (24)$$

В квадранте $\bar{x}_2 \geq 0$, $\bar{x}_3 \geq 0$ условия (23), (24) запишутся в виде:

$$\bar{x}_2 \geq |\sin \theta + \cos \theta|, \quad \bar{x}_3 \geq \sqrt{2} |\cos \theta|. \quad (25)$$

Снятие ограничения $\pm \bar{\sigma}_1|_{\bar{x}_1=0} \leq 1$ расширяет допустимую область в плоскости $\bar{x}_1 = 0$, если точка \bar{x}_2, \bar{x}_3 , полученная из (25) как равенств, нарушает снятое ограничение, и не расширяет допустимую область, если эта точка не нарушает это ограничение. Другими словами, имеет место неравенство:

$$\left| \frac{\sqrt{2} \cos \theta}{\sqrt{2} |\cos \theta|} + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{|\sin \theta + \cos \theta|} \right| \geq 1. \quad (26)$$

Неравенство (26) справедливо для диапазона углов $-45^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ или $135^\circ \leq \theta \leq 270^\circ$.

Для этого диапазона углов имеется локальный проект фермы с управляемыми параметрами $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (0, |\sin \theta + \cos \theta|, \sqrt{2} |\cos \theta|)$ и $\bar{f} = |3 \cos \theta + \sin \theta|$.

Аналогично при $\bar{x}_2 = 0$ можно получить условие

$$\left| \frac{\sin \theta - \cos \theta}{|\sin \theta - \cos \theta|} + \frac{\sin \theta + \cos \theta}{|\sin \theta + \cos \theta|} \right| \geq 1$$

для существования локального проекта в плоскости \bar{x}_1, \bar{x}_3 с параметрами

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} |\sin \theta + \cos \theta|, 0, \frac{\sqrt{2}}{2} |\sin \theta - \cos \theta| \right) \text{ и } \bar{f} = 2 |\sin \theta|$$

для диапазона углов $45^\circ \leq \theta \leq 135^\circ$ или $225^\circ \leq \theta \leq 315^\circ$.

Аналогично для диапазона углов $-90^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ или $90^\circ \leq \theta \leq 225^\circ$ существует локальный оптимальный проект с параметрами $(\sqrt{2} |\cos \theta|, |\sin \theta - \cos \theta|, 0)$ и $\bar{f} = |3 \cos \theta + \sin \theta|$.

На рис. 4 показана траектория положения всех точек локальных минимумов массы в зависимости от угла действия нагрузки.

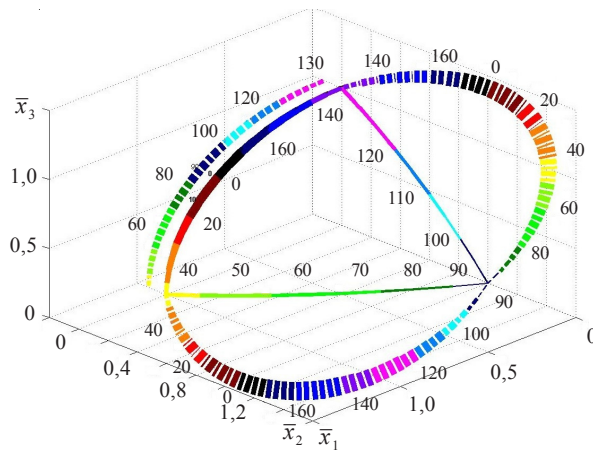


Рис. 4. Миграция локальных минимумов

Все точки находятся только в координатных плоскостях. Сплошная линия показывает движение точки минимума, если учитывать ограничения на напряжения во всех стержнях. Три прерывистые линии показывают движение точек новых локальных минимумов, если исключить из задачи ограничения на напряжения в стержнях с нулевой площадью. Одна прерывистая линия намеренно сдвинута, так как совпадает с участком сплошной линии. Числа близ линий и цвета линий показывают угол действия нагрузки в диапазоне от 0 до 180°. Толщина линий от нуля до максимума зависит от оптимальной безразмерной массы в пределах от 1,0 до 3,0 единиц. В задаче с исключенными ограничениями при каждом угле действия силы наблюдаются три локальных минимума. В данной задаче исключение ограничений никак не улучшило решение по массе.

5. Оптимизация для диапазона действующих нагрузок

Допустим, что угол θ действия нагрузки занимает диапазон $[0, 360^\circ]$ и оптимальная ферма Шмита должна выдерживать нагрузку с любым углом действия из этого диапазона.

В этой задаче нужно поставить ограничения на напряжения, экстремальные по углу действия нагрузки. Найдем величину экстремального по углу θ напряжения в стержне 1. Дифференцируем (18) по θ и приравниваем производную к нулю:

$$\frac{d\bar{\sigma}_1}{d\theta} = \frac{\sin \theta(-2\bar{x}_2 - \sqrt{2}\bar{x}_3) + \sqrt{2}\bar{x}_3 \cos \theta}{\sqrt{2\bar{x}_1\bar{x}_2} + 2\bar{x}_1\bar{x}_3 + \sqrt{2\bar{x}_2\bar{x}_3}} = 0,$$

отсюда

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\bar{x}_3}{\sqrt{2\bar{x}_2} + \bar{x}_3}. \quad (27)$$

Подставляя (27) в (18), получаем величину экстремального напряжения в стержне 1:

$$\bar{\sigma}_1^{\text{ex}} = \pm \sqrt{2} \frac{(\bar{x}_2^2 + \sqrt{2}\bar{x}_2\bar{x}_3 + \bar{x}_3^2)^{1/2}}{\bar{x}_1\bar{x}_2 + \sqrt{2\bar{x}_1\bar{x}_3} + \bar{x}_2\bar{x}_3}. \quad (28)$$

Аналогично получаем величины экстремальных по углу θ напряжений в стержнях 2 и 3:

$$\bar{\sigma}_2^{\text{ex}} = \mp \sqrt{2} \frac{(\bar{x}_1^2 + \bar{x}_3^2)^{1/2}}{\bar{x}_1\bar{x}_2 + \sqrt{2\bar{x}_1\bar{x}_3} + \bar{x}_2\bar{x}_3}, \quad (29)$$

$$\bar{\sigma}_3^{\text{ex}} = \mp \sqrt{2} \frac{(\bar{x}_1^2 + \sqrt{2}\bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_2^2)^{1/2}}{\bar{x}_1\bar{x}_2 + \sqrt{2\bar{x}_1\bar{x}_3} + \bar{x}_2\bar{x}_3}. \quad (30)$$

Путем графического анализа, аналогичного анализу из раздела 3 настоящей статьи, заключаем, что оптимальное решение находится на пересечении ограничений на экстремальные напряжения. Решая систему трех нелинейных уравнений

$$|\sigma_1^{\text{ex}}| = 1, \quad |\sigma_2^{\text{ex}}| = 1, \quad |\sigma_3^{\text{ex}}| = 1$$

с учетом выражений (28)–(30) с помощью Matlab, получаем безразмерные площади сечений в точке минимума $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (0,8165; 0,4226; 0,8165)$ и значение минимальной безразмерной массы $\bar{f} = 2,7321$.

Оптимальная ферма при многовариантном нагружении имеет три стержня.

Вновь рассмотрим снятие ограничений на напряжения в отсутствующих стержнях. Допустим, что в ферме отсутствует один из стержней 1, 2 или 3. Тогда в координатных плоскостях возникают дополнительные допустимые области и точки новых локальных минимумов массы.

С использованием (28)–(30) получаем три дополнительные допустимые области:

- 1) $\bar{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_2 \geq \sqrt{2}, \quad \bar{x}_3 \geq \sqrt{2};$
- 2) $\bar{x}_1 \geq 1, \quad \bar{x}_2 = 0, \quad \bar{x}_3 \geq 1;$
- 3) $\bar{x}_1 \geq \sqrt{2}, \quad \bar{x}_2 \geq \sqrt{2}, \quad \bar{x}_3 = 0.$

В этих областях имеются три локальных минимума массы с параметрами:

1) $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\bar{f} = 3,4142$;

2) $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (1, 0, 1)$, $\bar{f} = 2,8284$;

3) $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$, $\bar{f} = 3,4142$.

На рис. 5 показано сечение допустимой области в плоскости $\bar{x}_2 = 1,5$.

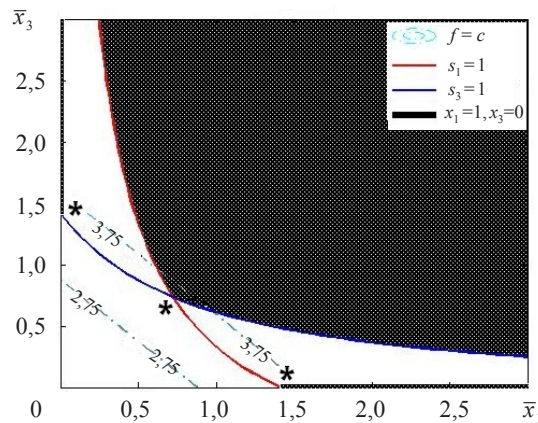


Рис. 5. Сечение допустимой области

Звездочками отмечены точки потенциальных локальных минимумов и приведены две штрихпунктирные линии постоянного уровня массы. Допустимая область невыпуклая, что приводит к нескольким локальным минимумам. Область содержит три части. Размерность двух частей на единицу меньше, чем размерность третьей части. В трехмерном пространстве эти три части соединяются, образуя связную допустимую область.

Заключение

Приведено аналитическое решение задачи оптимизации по массе трехстержневой фермы Шмита с тремя управляемыми параметрами при ограничениях на напряжения сжатия и растяжения в стержнях.

Задача решена:

- для одного варианта нагружения из диапазона угла действия нагрузки от 0 до 360°,
- для многовариантного нагружения при всех углах от 0 до 360°,
- для случая снятия ограничений на напряжения в отсутствующих стержнях.

Решение может использоваться для иллюстрации и проверки приемов и методов решения задач оптимизации конструкций.

Отмечено, что при снятии ограничений на напряжения в стержнях с нулевой площадью допустимая область увеличивается, становится невыпуклой и появляются новые точки локальных минимумов. Замеченные эффекты оптимизации могут наблюдаться при реальном проектировании конструкций.

Список литературы

1. Schmit L.A. Structural design by systematic synthesis // 2nd Conf. Electronic Computation, ASCE Structural Division. Pittsburgh, Pennsylvania, 1960. P. 105–132.

2. *Save M.A.* Remarks on minimum-volume designs of a three-bar truss // *J. Struct. Mech.* 1983. Vol. 11, No. 1. P. 101–110.
3. *Rao S.S.* Engineering optimization: Theory and practice. Fourth Edition ed. John Wiley & Sons, 2009. 830 p.
4. *Bremicker M., Papalambros P.Y., Loh H.T.* Solution of mixed-discrete structural optimization problems with a new sequential linearization algorithm // *Computers & Structures.* 1990. Vol. 37, No. 4. P. 451–461.
5. *Ohsaki M.* Optimization of finite dimensional structures. CRC Press, 2011. 405 p.
6. *Pedregal P.* Introduction to optimization. Springer-Verlag New York Inc., 2004. 244 p.
7. *Хог Э., Апора Я.* Прикладное оптимальное проектирование: Механические системы и конструкции: Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 478 с.
8. *Haftka R.T., Gurdal Z.* Elements of structural optimization. 3rd ed. Dordrecht: Kluwer Academic, 1992. 481 p.
9. *Christensen P.W., Klarbring A.* An introduction to structural optimization. Linköping: Springer Science, 2009. 211 p.
10. *Киселев В.Г., Любимов А.К., Сергеев О.А., Сергеева С.А.* Оптимизация стержневых конструкций со случайными несовершенствами при ограничениях по устойчивости // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2012. Вып. 74. С. 134–145.

References

1. *Schmit L.A.* Structural design by systematic synthesis // 2nd Conf. Electronic Computation, ASCE Structural Division. Pittsburgh, Pennsylvania, 1960. P. 105–132.
2. *Save M.A.* Remarks on minimum-volume designs of a three-bar truss // *J. Struct. Mech.* 1983. Vol. 11, No. 1. P. 101–110.
3. *Rao S.S.* Engineering optimization: Theory and practice. Fourth Edition ed. John Wiley & Sons, 2009. 830 p.
4. *Bremicker M., Papalambros P.Y., Loh H.T.* Solution of mixed-discrete structural optimization problems with a new sequential linearization algorithm // *Computers & Structures.* 1990. Vol. 37, No. 4. P. 451–461.
5. *Ohsaki M.* Optimization of finite dimensional structures. CRC Press, 2011. 405 p.
6. *Pedregal P.* Introduction to optimization. Springer-Verlag New York Inc., 2004. 244 p.
7. *Haug E., Arora Ya.* Prikladnoe optimal'noe proektirovanie: Mekhanicheskie sistemy i konstruksii: Per. s angl. M.: Mir, 1983. 478 s.
8. *Haftka R.T., Gurdal Z.* Elements of structural optimization. 3rd ed. Dordrecht: Kluwer Academic, 1992. 481 p.
9. *Christensen P.W., Klarbring A.* An introduction to structural optimization. Linköping: Springer Science, 2009. 211 p.
10. *Kiselev V.G., Lyubimov A.K., Sergeev O.A., Sergeeva S.A.* Optimizatsiya stержnevyykh konstruksiy so sluchaynymi nesovershenstvami pri ogranicheniyakh po ustoychivosti // Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhvuz. sb. / Nizhegorod. un-t, 2012. Vyp. 74. S. 134–145.

OPTIMIZATION OF MASS FOR SCHMIT TRUSS WITH THREE PARAMETERS

Kiselev V.G.

In analytical form, the problem of mass optimization for test three-bar Schmit truss is solved with three design variables subject to stress limits in compression and extension in bars. Some problem formulations are presented: for one of the external load direction from the range of 0 to 360 degrees, for the action alternately all load directions from this range, with the exception of the stress restrictions for zero cross-section bars. The problems are presented and solved in nondimensional form. The migration of mass minimum point for the space of project section squares is presented. The presence of multiple local minima is viewed.

Keywords: optimization by mass, test task, analytical solution.