

УДК 539.3

## ВОССТАНОВЛЕНИЕ КРИВОЙ УПРОЧНЕНИЯ МАТЕРИАЛА ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТА НА СЖАТИЕ

© 2015 г. Берендеев Н.Н.<sup>1</sup>, Зимин Н.В.<sup>2</sup>, Леонтьев Н.В.<sup>1</sup>,  
Любимов А.К.<sup>1</sup>, Смирнов И.А.<sup>2</sup>, Сторожев Е.В.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Нижегородский государственный университет  
им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород, Российская Федерация

<sup>2</sup>ЗАО «Время-Ч», Нижний Новгород, Российская Федерация

ljubimov@mm.unn.ru

Поступила в редакцию 24.12.2014

Предложена расчетно-экспериментальная методика восстановления кривой упрочнения металлов с малой твердостью, для которых невозможно проведение экспериментов по растяжению образца. Методика основана на идентификации параметров кривой упрочнения на базе первичной диаграммы сжатия. Параметры кривой определяются из решения задачи минимизации среднеквадратичного отклонения модельных значений от экспериментальных значений диаграммы сжатия. Верификация методики выполнена на основе экспериментальных данных для меди М1. Для индия, металла с малой твердостью, восстановлена кривая упрочнения.

*Ключевые слова:* кривая упрочнения, индий, медь, диаграмма испытаний (сжатие), цилиндрический образец, идентификация, мультилинейная модель, прогнозирующие свойства модели.

### Введение

В связи с постоянным повышением требований к условиям эксплуатации элементов машин и сооружений возникает необходимость исследования работы конструкций с учетом возможности появления необратимых деформаций. Одной из основных характеристик, используемых при описании процесса пластического деформирования материалов, является функция упрочнения (кривая упрочнения на растяжение) [1]. Методы построения кривой достаточно полно изучены [1]. Однако получение кривой упрочнения на растяжение для металлов с малой твердостью связано со значительными экспериментальными трудностями. В частности, это имеет место для индия, относящегося к группе легких металлов. Для подобных материалов представляется проблематичным проведение эксперимента в условиях осевого растяжения в соответствии с требованиями стандарта [1]. В свою очередь, при получении кривой упрочнения в экспериментах на сжатие необходимо использовать цилиндрические образцы длиной не менее трех диаметров [2]. Применение таких образцов приводит к тому, что в процессе нагружения пластическая деформация локализуется в малых областях и образец теряет устойчивость (рис. 1). Эта пробле-

ма может быть нивелирована при использовании образцов с отношением длины к диаметру как два к одному или один к одному. Но для подобных образцов невозможно прямыми способами перейти от диаграммы

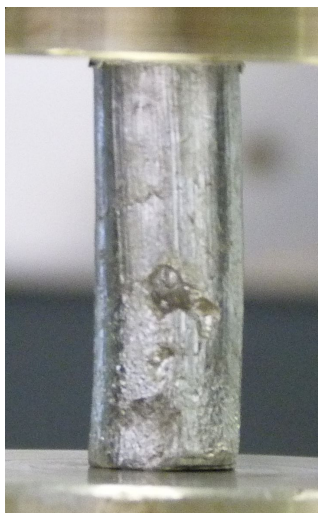


Рис. 1

сжатия к кривой упрочнения в связи с неоднородностью распределения напряжений как по поперечным, так и по продольным сечениям образца (в образцах отсутствуют зоны, удовлетворяющие принципу Сен-Венана).

Актуальной становится задача о «непрямом» определении кривой упрочнения на основе результатов эксперимента на сжатие. Эффективным способом решения задачи является расчетно-экспериментальный подход, основные положения которого и некоторые примеры его успешного применения изложены в работах [3–6].

В рамках указанного подхода одним из возможных путей получения кривой упрочнения на растяжение для материалов с малой твердостью является сочетание методов математического моделирования и результатов экспериментов на сжатие цилиндрических

образцов с отношением диаметра к высоте образца, равным единице. Ниже предлагается расчетно-экспериментальная методика восстановления кривой упрочнения на растяжение, использующая в качестве исходной информации данные, полученные в экспериментах на сжатие цилиндрических образцов.

## 1. Методика восстановления

Задача о восстановлении кривой упрочнения материала на растяжение может рассматриваться как задача построения модели некоторого процесса, определяемого системой переменных, на основе регистрации входных и выходных сигналов. Задачи такого типа относятся к задачам идентификации [7].

Решение задачи идентификации включает в себя три основные составляющие: получение экспериментальных данных, выбор структуры модели, используемой для описания процесса, и определение оптимальной в некотором смысле модели методами математического моделирования с использованием информации, полученной в эксперименте. В результате реализации всех составляющих находится конкретная модель из множества допустимых, причем такая, которая в соответствии с выбранным критерием оптимальности наилучшим способом воспроизводит данные эксперимента. Естественно, что полученную таким образом модель нельзя считать окончательной и она не является истинным описанием исходного явления. Ее надо рассматривать как возможный способ адекватного описания тех сторон изучаемого явления, которые представляют наибольший интерес с точки зрения поставленной задачи.

Сформулируем методику восстановления кривой упрочнения с учетом взгляда на нее как на задачу идентификации. Методика определения кривой упрочнения на растяжение материалов, для которых невозможно получить кривую упрочнения в соответствии со стандартными процедурами [1], предполагает реализацию следующих составляющих.

**Получение экспериментальных данных.** Основной исходной информацией является диаграмма испытаний (сжатие) для исследуемого материала, то есть график зависимости нагрузки от деформации (укорочения) образца, получаемый на испытательной машине в соответствии с требованиями стандарта [2]. Испытания проводятся с использованием цилиндрических образцов типа III [1] с гладкими торцами.

**Выбор структуры модели.** В качестве модели, описывающей искомую кривую упрочнения на растяжение, выберем широко используемую мультилинейную аппроксимацию. В этом случае для описания кривой совокупностью  $k$  линейных отрезков необходимо задать вектор параметров  $\Theta(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2k+2}, k)$ . Компоненты вектора параметров соответствуют координатам точек концов отрезков на плоскости  $\sigma$ – $\varepsilon^p$ . Таким образом, определяется множество моделей, параметры которых рассматриваются как варьируемые величины, обеспечивающие настройку модели на имеющиеся экспериментальные результаты.

**Определение оптимальной модели.** Выбор оптимальной модели включает в себя следующие этапы.

Этап 1. На основе графика зависимости нагрузки от деформации (укорочения) образца, полученного в эксперименте, строится условная диаграмма сжатия. Причем в соответствии со стандартом [2] построение диаграммы выполняется только на участке до появления бочкообразности образца. Контроль потери устойчивости осуществляется как визуально, так и с учетом требований стандарта по величине условной деформации. Для полученной в эксперименте диаграммы определяется ее мультилинейная аппроксимация, задаваемая вектором параметров  $\Theta(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{2k+2}, k)$ .

Этап 2. Формулируется краевая задача о нахождении напряженно-деформированного состояния, возникающего в цилиндрическом образце при осевом сжатии. Геометрия образца, граничные условия, механические характеристики материала при этом соответствуют условиям проведения натурального эксперимента. Задача рассматривается в осесимметричной постановке, материал обладает упруго-пластическими свойствами с изотропным упрочнением, учитывается конечность деформаций. Формулировка краевых условий на верхнем и нижнем торцах образца выполнена с учетом наличия сухого трения.

Этап 3. Формулируется задача оптимизации [8] по определению значения вектора параметров  $\Theta^*(\theta_1^*, \theta_2^*, \dots, \theta_{2k+2}^*, k^*, \gamma^*)$ , который обеспечивает выполнение условия

$$\Omega(\Theta^*) = \min \Omega(\Theta). \quad (1)$$

Здесь  $\Omega(\Theta)$  – интегральная характеристика, в качестве которой обычно выбирается среднеквадратичная ошибка, определяющая величину отклонения модельной зависимости нагрузки от абсолютной деформации (укорочения) образца от зависимости, полученной в натурном эксперименте при различных значениях коэффициента трения. Дополнительная компонента вектора параметров – коэффициент сухого трения  $\gamma$ , который является неизвестной величиной.

Отметим, что возможен выбор и других критериев оптимальности, например, можно рассматривать минимизацию величины максимального отклонения между значениями расчетной и экспериментальной нагрузки. В качестве ограничения выступает требование того, чтобы параметры обеспечивали неубывание кривой упрочнения, а в качестве начального значения вектора параметров принимается зада-

ваемая вектором  $\Theta^0(\theta_1^0, \theta_2^0, \dots, \theta_{2k+2}^0, k^0, \gamma^0)$  мультилинейная аппроксимация диаграммы, полученная на этапе 1.

Этап 4. Решается задача параметрической оптимизации, сформулированная на этапе 3, при этом численные значения полей напряжений, деформаций, перемещений и других характеристик определяются с использованием программных комплексов, использующих конечно-элементный подход в соответствии с краевой задачей, сформулированной на этапе 2.

Этап 5. Выполняется содержательный анализ полученных результатов с точки зрения непротиворечивости с известными результатами в этой области.

## 2. Экспериментальные образцы и оборудование

Для верификации методики использовалась медь М1, являющаяся пластичным материалом. Свойства этого материала допускают проведение испытаний как на осевое растяжение, так и на сжатие образцов [1, 2]. Образцы, применявшиеся в экспериментах на осевое растяжение меди М1, соответствовали типу III в ГОСТ 1497-84 [1] с диаметром рабочей части 5 мм и длиной рабочей части 50 мм. Цилиндрические образцы, использованные в экспериментах на осевое сжатие меди, имели диаметр 10 мм и высоту 10 мм. Эксперименты проводились на универсальной испытательной машине ГРМ-1. Для измерения удлинения образцов в процессе растяжения использовался контактный тензомер SANDNER EXA 20-2.5.

Для определения кривой упрочнения индия выполнялись эксперименты на осевое сжатие. Было испытано три образца с выбранным в методике отношением длины к диаметру, а также один образец с отношением длины к диаметру в соответствии со стандартом [2]. Образец из индия, выполненный в соответствии с ГОСТ 25.503-97 [2], имел диаметр 10 мм и высоту 30 мм. При экспериментальном исследовании использовалась универсальная испытательная машина LLOYD INSTRUMENTS LR5KPlus.

## 3. Численное моделирование

При проведении численных исследований была использована система конечно-элементного анализа ANSYS WORKBENCH 14.5.7. Выполнено численное моделирование эксперимента по осевому сжатию цилиндрического образца. С учетом условий нагружения и геометрии образца задача рассматривалась в осесимметричной постановке. При численном моделировании использовался плоский восьмиузловой конечный элемент [9].

Общий вид конечно-элементной модели в численном эксперименте представлен на рис. 2, где 1 – область образца, 2 – область захвата и 3 – зона контакта. Учитывалось наличие между образцом и захватом трения. Величина силы трения определялась коэффициентом сухого трения  $\gamma$ .

Нагружение образца задавалось перемещением вверх вдоль оси у нижней грани захвата. Захват, выполненный из стали, моделировался как упругое тело с модулем Юнга  $E = 200$  ГПа и коэффициентом Пуассона  $\nu = 0,3$ .

Образец, выполненный из меди, моделировался как упругопластическое тело с изотропным упрочнением, которое описывалось мультилинейной кривой. Поверхность пластичности имеет вид

$$\sigma_i^2 - [\Phi(\varepsilon_i^p)]^2 = 0, \quad (2)$$

где  $\sigma_i$  – интенсивность напряжений,  $\Phi(\varepsilon_i^p)$  – функция упрочнения. В случае мультилинейной аппроксимации из  $k$  участков имеем

$$\Phi(\varepsilon_i^p) = \begin{cases} \sigma_1 + \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{\varepsilon_2^p - \varepsilon_1^p} \varepsilon_i^p, & \varepsilon_1^p \leq \varepsilon_i^p < \varepsilon_2^p, \\ \sigma_l + \frac{\sigma_{l+1} - \sigma_l}{\varepsilon_{l+1}^p - \varepsilon_l^p} \varepsilon_i^p, & \varepsilon_l^p \leq \varepsilon_i^p < \varepsilon_{l+1}^p, \\ \sigma_k + \frac{\sigma_{k+1} - \sigma_k}{\varepsilon_{k+1}^p - \varepsilon_k^p} \varepsilon_i^p, & \varepsilon_k^p \leq \varepsilon_i^p < \varepsilon_{k+1}^p. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь  $\sigma_l, \varepsilon_l^p$  ( $l = \overline{1, k+1}$ ) – координаты точек, описывающих кривую упрочнения при растяжении.

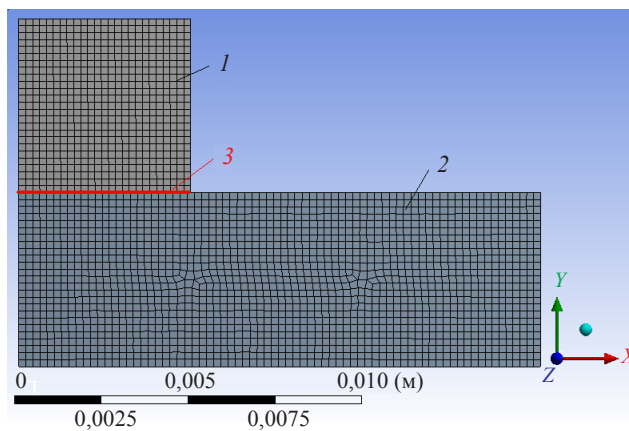


Рис. 2

#### 4. Верификация методики

Выбор «оптимальной» модели, в нашем случае мультилинейной аппроксимации диаграммы упрочнения, определяется решением задачи параметрической оптимизации – задачи определения параметров модели с учетом результатов натурных экспериментов. После определения оптимальных параметров, то есть решения достаточно формальной математической задачи, требуется рассмотреть вопрос о верификации выбранной модели: установление достоверности выдвинутого утверждения на основе эмпирической проверки. При этом важными являются два аспекта: во-первых, в какой степени модель согласуется с известной информацией об экспериментальных результатах в данной области и, во-вторых, насколько успешно полученная модель решает поставленную цель.

Основным подтверждением «успешности» модели является возможность получения с ее использованием численного решения прикладных задач и его соответствие известным решениям. Естественным подтверждением правильности выбранной структуры модели, оценок ее параметров должно быть сопоставление полученных результатов моделирования кривой упрочнения с известными результатами экспериментальных исследований.

С целью установления степени достоверности разработанной методики по восстановлению диаграммы были проведены исследования для пластического материала – меди марки М1. На основе выполненных экспериментов для цилиндрических

образцов построена кривая упрочнения на растяжение [1]; получена экспериментальная диаграмма испытания (сжатия) для цилиндрических образцов [2]; восстановлена модельная кривая упрочнения на растяжение; проведено сравнение кривых упрочнения, полученных в эксперименте и на основе математического моделирования.

На рис. 3 показаны диаграмма, полученная в численном эксперименте (кривая 1), уровень сжимающей нагрузки, при котором возникает бочкообразность образца (линия 2), экспериментальная диаграмма испытания (сжатия) для цилиндрических образцов (кружочки).

На рис. 4 представлены экспериментальная кривая упрочнения на растяжение (кривая 1) и кривая упрочнения, восстановленная по предложенной методике (кривая 2). В качестве начального приближения при решении задачи оптимизации была выбрана мультилинейная аппроксимация кривой упрочнения, построенная на основе диаграммы испытания (сжатия) для цилиндрических образцов (кривая 3). В соответствии с требованием стандарта [2] учитывался только участок диаграммы до наступления бочкообразности.

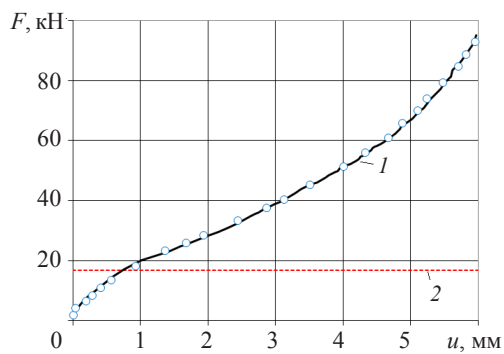


Рис. 3

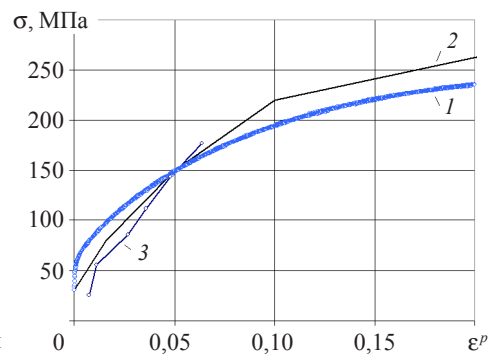


Рис. 4

На рис. 5, 6 показаны распределения нормальных напряжений по площадкам, нормальным к оси образца, и интенсивности напряжений в продольном сечении сжимаемого цилиндрического образца (ось  $y$  направлена вдоль оси образца, а ось  $x$  – вдоль радиуса) до наступления бочкообразности (с учетом осевой симметрии).

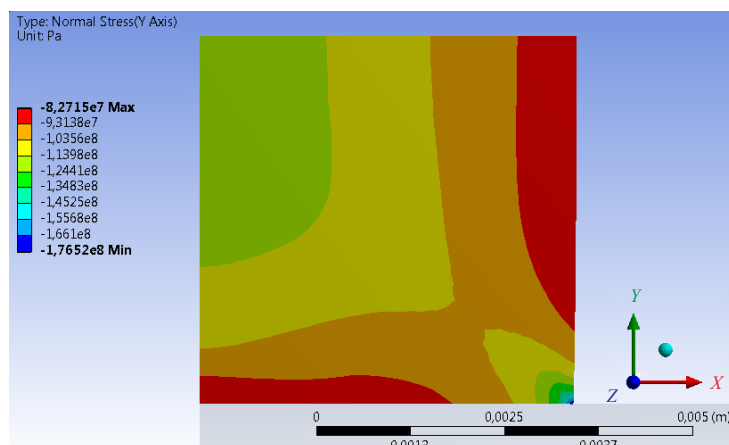


Рис. 5

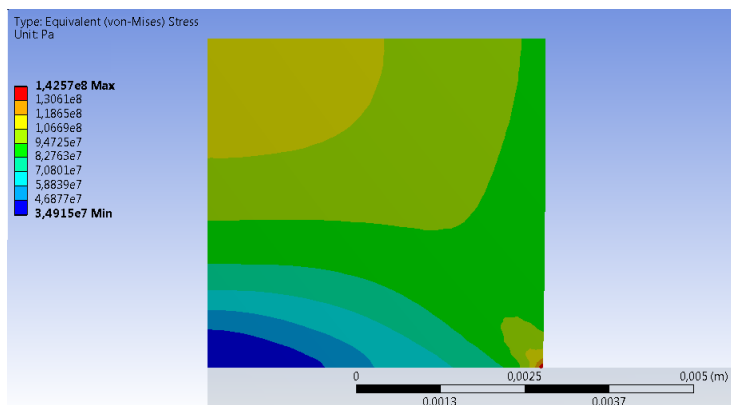


Рис. 6

Решение краевой задачи проводилось с использованием конечно-элементного подхода. Полученное решение указывает на существенную неоднородность полей напряжений и интенсивности напряжений.

Анализ полученных результатов натурных и численных экспериментов (см. рис. 4) позволяет сделать вывод о том, что максимальное отличие восстановленной кривой от экспериментальной не превышает 12%. Особо подчеркнем следующее немаловажное обстоятельство. Начальное приближение (см. рис. 4, кривая 3) определялось по диаграмме сжатия на участке до появления бочкообразности, а восстановленная кривая упрочнения (см. рис. 4, кривая 2) определена на том же интервале, что и экспериментальная кривая упрочнения. Таким образом, предложенная методика позволяет не только восстанавливать кривую упрочнения на участке до появления бочкообразности, но и успешно прогнозировать ее за пределы, устанавливаемые требованиями стандарта [2], то есть модель обладает прогнозирующими свойствами.

## 5. Восстановление кривой упрочнения для индия

В силу своих механических свойств индий часто применяется для герметизации уплотнений в конструкциях. Для выбора рационального варианта уплотнения используются конечно-элементные методы расчета напряженно-деформированного состояния в условиях пластического деформирования. Как уже отмечалось, получение кривой упрочнения по результатам опытов на растяжение для индия не представляется возможным. С использованием предложенной методики были выполнены исследования, позволившие восстановить кривую упрочнения на растяжение по результатам опытов на сжатие цилиндрических образцов.

На рис. 7 показан образец из индия, находящийся в захватах испытательной машины LR5KPlus, в момент наступления бочкообразности.

Экспериментальная диаграмма испытания (сжатия) для цилиндрических образцов (обозначена кружочками), а также диаграмма сжатия, полученная в численном эксперименте (кривая 1), показаны на рис. 8. Прямая 2 определяет уровень сжимающей нагрузки, при котором возникает бочкообразность в образце.

Восстановленная по предложенной методике кривая упрочнения для индия представлена на рис. 9 (кривая 1). В качестве начального приближения при решении задачи оптимизации была выбрана мультилинейная аппроксимация кривой

упрочнения, построенная на основе диаграммы испытания (сжатия) для цилиндрических образцов (рис. 9, кривая 2).

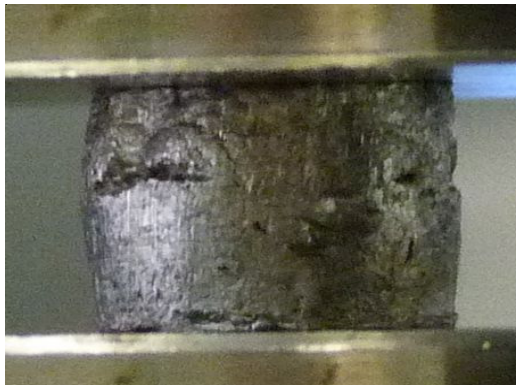


Рис. 7

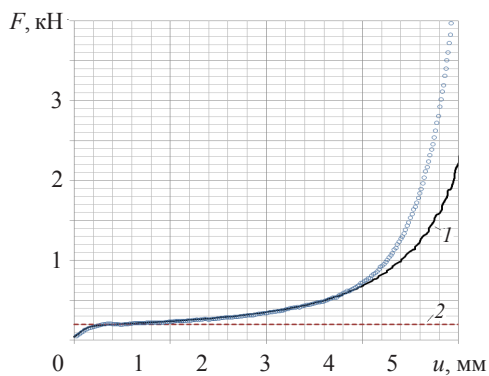


Рис. 8

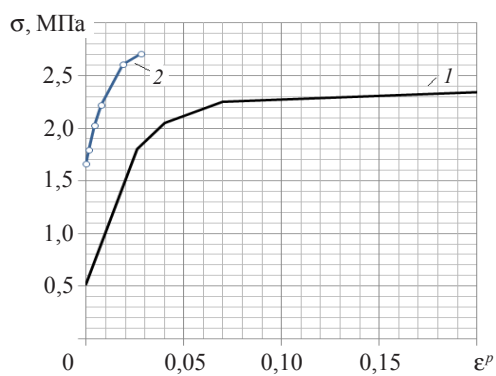


Рис. 9

### Заключение

Выполненные исследования показали достоверность и эффективность предложенной расчетно-экспериментальной методики восстановления кривой упрочнения металлов с малой твердостью, для которых невозможно проведение экспериментов по растяжению цилиндрических образцов. Выявлены прогнозирующие свойства модели. С использованием методики получены новые результаты по восстановлению кривой упрочнения для индия.

### Список литературы

1. ГОСТ 1497-84 (ИСО 6892-84) Металлы. Методы испытаний на растяжение.
2. ГОСТ 25.503-97 Расчеты и испытания на прочность. Методы механических испытаний металлов. Метод испытания на сжатие.
3. *Mahnken R.* Identification of material parameters for constitutive equations. Encyclopedia of Computational Mechanics / Ed. by E. Stein, R. Borst, T.J.R. Hughes. V. 2. Solids and Structures. John Wiley & Sons, 2004. P. 637–655.
4. *Крамарев Л.Н., Жегалов Д.В.* Экспериментальное и численное исследование упругопластических процессов пенетрирования // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2008. Вып. 70. С. 79–88.



5. Баженов В.Г., Баранова М.С., Павленкова Е.В., Жегалов Д.В. Развитие и апробация методики построения динамических диаграмм деформирования при многократном прохождении волны деформаций в мерном стержне газодинамической копровой установки // Вестник Нижегородского университета. 2012. №4. С. 166–170.

6. Berendeev N.N., Leont'ev N.V., Lyubimov A.K. The finding of the complex construction damping characteristics under random loading / Int. Conf. for Mathematical Modeling and Optimization in Mechanics: Book of Abstracts. University Jyvaskyla, March 6–7, 2014 / Eds. P. Neittaanmaki, S. Repin, T. Tuovinen // Reports of the department of mathematical information technology Series A. Collection. № A1/2014. P. 23–26.

7. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория для пользователя: Пер. с англ. / Под ред. Я.З. Цыпкина. М.: Наука, 1991. 432 с.

8. Малков В.П., Угодчиков А.Г. Оптимизация упругих систем. М.: Наука, 1981. 286 с.

9. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 542 с.

10. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и программное обеспечение. М.: Мир, 2001. 575 с.

#### References

1. GOST 1497-84 (ISO 6892-84) Metally. Metody ispytaniy na rastyazhenie.

2. GOST 25.503-97 Raschety i ispytaniya na prochnost'. Metody mekhanicheskikh ispytaniy metallov. Metod ispytaniya na szhatie.

3. Mahnken R. Identification of material parameters for constitutive equations. Encyclopedia of Computational Mechanics / Ed. by E. Stein, R. Borst, T.J.R. Hughes. V. 2. Solids and Structures. John Wiley & Sons, 2004. P. 637–655.

4. Kramarev L.N., Zhegalov D.V. Eksperimental'noe i chislennoe issledovanie uprugoplasticheskikh protsessov penetrirovaniya // Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhdvuz. sb. / Nizhegorod. un-t, 2008. Vyp. 70. S. 79–88.

5. Bazhenov V.G., Baranova M.S., Pavlenkova E.V., Zhegalov D.V. Razvitie i aprobatsiya metodiki postroeniya dinamicheskikh diagramm deformirovaniya pri mnogokratnom prokhozhdenii volny deformatsiy v mernom sterzhne gazodinamicheskoy koprovoy ustanovki // Vestnik Nizhegorodskogo universiteta. 2012. №4. S. 166–170.

6. Berendeev N.N., Leont'ev N.V., Lyubimov A.K. The finding of the complex construction damping characteristics under random loading / Int. Conf. for Mathematical Modeling and Optimization in Mechanics: Book of Abstracts. University Jyvaskyla, March 6–7, 2014 / Eds. P. Neittaanmaki, S. Repin, T. Tuovinen // Reports of the department of mathematical information technology Series A. Collection. № A1/2014. P. 23–26.

7. Lyung L. Identifikatsiya sistem. Teoriya dlya pol'zovatelya: Per. s angl. / Pod red. Ya.Z. Tsyapkina. M.: Nauka, 1991. 432 s.

8. Malkov V.P., Ugodchikov A.G. Optimizatsiya uprugikh sistem. M.: Nauka, 1981. 286 s.

9. Zenkevich O. Metod konechnykh elementov v tekhnike. M.: Mir, 1975. 542 s.

10. Kakhaner D, Mouler K., Nesh S. Chislennyye metody i programmnoe obespechenie. M.: Mir, 2001. 575 s.

#### RECONSTRUCTION OF THE HARDENING CURVE OF A MATERIAL BASED ON THE RESULTS OF COMPRESSION EXPERIMENTS

**Berendeyev N.N., Zimin N.V., Leontyev N.V., Lyubimov A.K.,  
Smirnov I.A., Storozhev E.V.**

A computational-experimental methodology is presented for reconstructing the hardening curve of low-hardness metals which cannot be tested in tension. The methodology is based on identifying the hardening curve parameters using a primary compression diagram. The parameters of the curve are determined from the solution of the problem of minimization of the mean quadratic deviation of modeling values from experimental values of the compression diagram. The methodology is

verified using experimental data for M1 copper. The hardening curve for indium – a low-hardness metal – has been reconstructed.

*Keywords:* hardening curve, indium, copper, test diagram (compression), cylindrical specimen, identification, multi-linear model, predicting properties of the model.