

УДК 539.374

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ДИАГРАММ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ ПРИ ПОСТОЯННОЙ СКОРОСТИ ДЕФОРМАЦИИ*

© 2015 г.

Хохлов А.В.

*НИИ механики Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

andrey-khokhlov@ya.ru

Поступила в редакцию 05.10.2014

Аналитически исследовано линейное интегральное определяющее соотношение вязкоупругости с произвольной функцией релаксации, изучены общие качественные свойства семейства теоретических диаграмм деформирования с постоянной скоростью деформации, их зависимость от характеристик функции релаксации. В частности, доказано, что все теоретические диаграммы деформирования всегда монотонны и выпуклы вверх, их мгновенный и длительный модули не зависят от скорости деформирования, а при стремлении скорости деформации к бесконечности семейства теоретических диаграмм деформирования всегда сходятся к предельной прямой (мгновенной теоретической диаграмме деформирования). Выявлена специфика теоретических диаграмм деформирования трех классов моделей: с регулярной, неограниченной и сингулярной функциями релаксации; общие свойства теоретических диаграмм деформирования проиллюстрированы на примерах двух-, трех- и четырехзвенных реологических моделей.

Выявлен набор характерных (атрибутивных) свойств теоретических диаграмм деформирования, наличие которых надо установить у экспериментальных диаграмм деформирования перед попыткой моделирования поведения конкретных (классов) материалов в рамках линейной теории. Эти признаки могут служить индикаторами (не)адекватности линейной теории вязкоупругости, удобными для экспериментальной проверки, и позволяют точнее очертить область ее применимости. В частности, доказано, что линейная теория не способна описывать поведение материалов, у которых диаграмма деформирования имеет максимум или участок выпуклостью вниз, и тех материалов, у которых достоверно установлена зависимость мгновенного или длительного модуля от скорости деформирования.

Ключевые слова: интегральные операторы, функции ползучести и релаксации, теоретические диаграммы деформирования, касательный модуль, регулярные и сингулярные модели, индикаторы адекватности линейной теории.

Настоящая статья является продолжением цикла работ [1–4], посвященных качественному анализу линейного определяющего соотношения (ОС) вязкоупру-

* Выполнено при поддержке РФФИ (грант № 12-08-01227-а).

гости с произвольной функцией релаксации.

Качественный анализ теоретических кривых ОС – важная стадия аттестации любого ОС [1, 5–8], выявления арсенала его возможностей и области адекватности, разработки способов идентификации, верификации и численной реализации, создания технического паспорта-руководства модели. Он необходим для формулировки общих требований к способам аналитического представления экспериментальных данных и материальных функций, а также для корректного описания определяющими соотношениями комплекса термомеханических эффектов, присущих некоторому классу материалов.

Цель настоящей статьи – изучение общих математических свойств семейств теоретических диаграмм деформирования при постоянных скоростях деформации (их исследование в общем виде и даже краткий перечень отсутствуют в монографиях и обзорах по вязкоупругости и механике полимеров, в частности в [9–17]). В качестве примеров в статье рассматриваются те же классические модели, что и в [4] (их свойства детально исследованы в [2–4]).

В статье приняты следующие сокращения: ОС – определяющее соотношение, ФР и ФП (КР, КП) – функции (кривые) релаксации и ползучести, СД – скорость деформации, ДД – диаграмма деформирования при постоянной СД (ТДД – теоретическая ДД, ЭДД – экспериментальная ДД материала), МСТ – модель стандартного тела (последовательное соединение моделей Максвелла и Фойгта; в англоязычной литературе – модель Бюргерса), РеМ – регулярные модели (с ФП: $\Pi(0) \neq 0$); СиМ – сингулярные модели (ФР содержит слагаемое $\eta\delta(t)$ с δ -функцией); $y(0) := y(0+)$ – предел справа в точке $t = 0$.

1. Линейное определяющее соотношение вязкоупругости

Напряжение и деформация связаны в линейной вязкоупругости интегральными операторами, инвариантными относительно сдвигов по времени [9–17]:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau)d\varepsilon(\tau), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau)d\sigma(\tau), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Эти ОС описывают одномерные изотермические процессы в структурно-стабильных материалах. Их ядра $R(x)$ и $\Pi(x)$, $x \geq 0$, называются функциями релаксации и ползучести. Операторами вида (1) задаются и трехмерные ОС вязкоупругости в изотропном случае. На множестве непрерывных кусочно-гладких при $t \geq 0$ функций операторы (1) действуют по формулам:

$$\sigma(t) = R(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau, \quad \varepsilon(t) = \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Обычно ФР $R(x)$ и ФП $\Pi(x)$, $x > 0$, предполагаются непрерывными положительными монотонными функциями (тогда они дифференцируемы почти всюду, а их производные интегрируемы по Лебегу), ФР может иметь особенность в точке $x = 0$.

В [1–3] детально исследованы свойства всех основных теоретических кривых ОС (1) с произвольными ФП и ФР (кривых обратной ползучести, ступенчатой ползучести, релаксации с начальной стадией деформирования, диаграмм деформирования при постоянных и кусочно-постоянных скоростях деформации или нагруже-

ния, скоростной чувствительности и др.) и выявлены дополнительные ограничения, обеспечивающие феноменологическую адекватность ОС (1): ФР и ФП положительны и дифференцируемы при $x > 0$, ФР убывает и выпукла вниз, а ФП возрастает и выпукла вверх.

Операторы (1) взаимно обратны, и потому ФП и ФР связаны зависимостями

$$\int_0^t \dot{R}(t-\tau)\Pi(\tau)d\tau + R(0)\Pi(t) = 1, \quad \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)R(\tau)d\tau + \Pi(0)R(t) = 1, \quad t > 0. \quad (3)$$

Эти уравнения эквивалентны. Зная ФР, можно найти ФП из (3), и наоборот [4]. Поэтому одномерное ОС (1) содержит лишь одну материальную функцию. При $\Pi(0) \neq 0$ (3) и (2) – уравнения Вольтерры второго рода с ограниченными (если $R(0+) < \infty$) ядрами, и потому они однозначно разрешимы в пространствах $L_1[0, b]$. Случай $\Pi(0) = 0$ приводит к уравнению Вольтерры первого рода и нерегулярным моделям с особенностью в нуле у ФР, КР и касательного модуля, к неограниченности обратного оператора, вертикальности мгновенной ДД и т.п. (качественные свойства их теоретических кривых существенно отличаются от свойств кривых регулярных моделей [1–4]).

2. Структурные реологические модели, их классы эквивалентности

В виде (1) представимы все модели, собранные из линейно-упругих и вязких элементов посредством последовательных и параллельных соединений. Их ФП – суммы линейных функций и экспонент с отрицательными показателями, а в ФР могут входить еще и сингулярные слагаемые. Если вязкий элемент ($R(t) = \eta\delta(t)$, $\Pi(t) = t/\eta$) или любая СиМ подключены параллельно к произвольной модели (тогда ФР складываются), то слагаемое $\eta\delta(t)$ входит в ФР (рис. 1б, з). Например, семейство ФП

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad \gamma \in [0, \beta], \quad (4)$$

при $\gamma \in (0; \beta)$, $\alpha, \beta > 0$ порождает все регулярные четырехзвенные модели (рис. 1в). При $\alpha = 0$ и $\gamma \in (0; \beta)$ – трехзвенные РеМ Кельвина и Пойнтинга – Томсона (рис. 1а). Так как $\Pi(0) = \beta - \gamma$, то ФП (4) порождает СиМ только тогда, когда $\gamma = \beta$: при $\lambda = 0$ или $\beta = 0$ – модель ньютоновской жидкости, при $\alpha = 0$ – модель Фойгта ($R = \eta\delta(t) + r$), а если $\alpha > 0$, получаются все трехзвенные СиМ (рис. 1б) с ФР $R = \eta\delta(t) + Ae^{-\nu t}$. При $\gamma = 0$ (4) превращается в модель Максвелла ($R = Ee^{-\mu t}$). Случай $\gamma < 0$ приводит к нарушению ограничения $\ddot{\Pi}(t) \leq 0$, что влечет за собой возрастание кривой обратной ползучести [2, 3].

Хотя модель Пойнтинга – Томсона «формально не получается из МСТ предельным переходом» [17], можно заметить, что ее ФП ((4) с $\alpha = 0$) совпадает с ФП модели Кельвина (в англоязычной литературе именно она называется стандартным телом), получающейся при $\eta_M \rightarrow \infty$. Математически эквивалентны (задаются одним и тем же семейством ФП с одинаковыми диапазонами параметров) и две трехзвенные СиМ (рис. 1б); отличаются только выражения параметров через жесткости пружин и вязкости демпферов. Можно доказать, что для любого n множество несократимых n -звенных моделей распадается ровно на два класса эквивалентности: РеМ и СиМ. В частности, все четыре структурно различные четырехзвенные РеМ (рис. 1в) эквивалентны МСТ, а все четыре четырехзвенные СиМ (рис. 1з) эквива-

лентны последовательному соединению двух моделей Фойгта с разными временами ползучести [2].

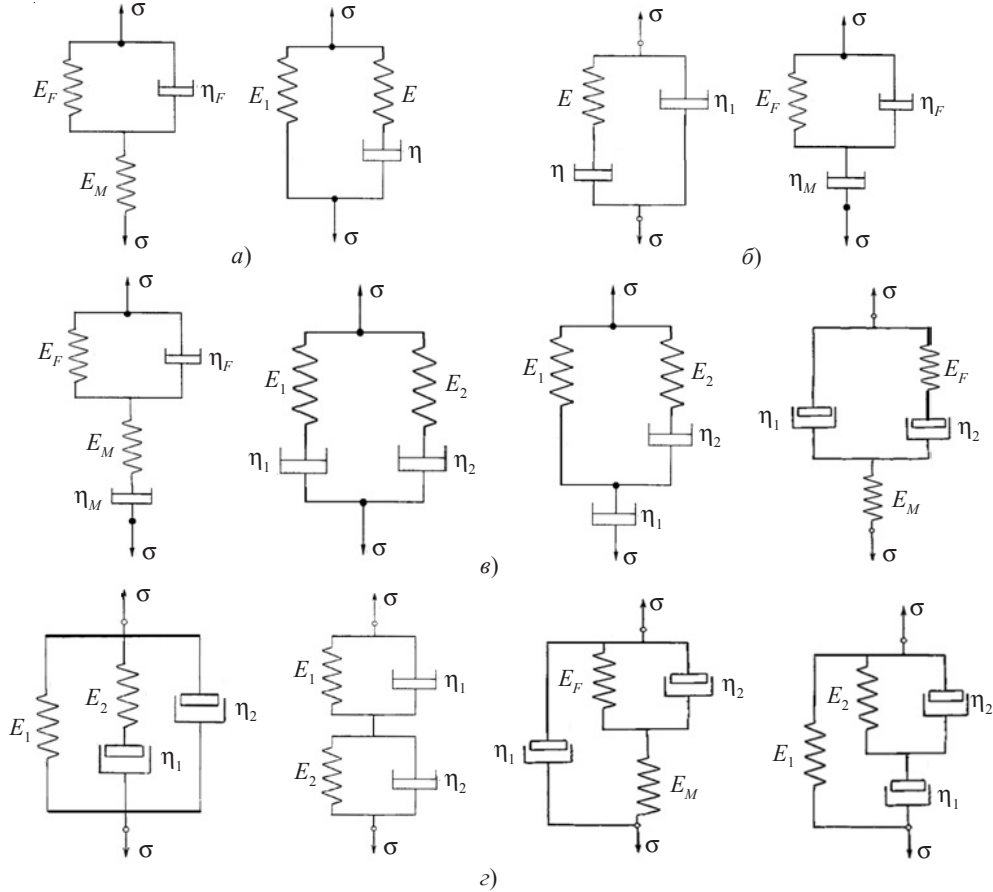


Рис. 1

3. Общие свойства диаграмм $\sigma - \varepsilon$ при постоянных скоростях деформирования

Чтобы вывести уравнение ДД с постоянной СД, подставим в ОС (1) процесс $\varepsilon = at$:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t - \tau) a d\tau = a \int_0^t R(x) dx \quad \text{или} \quad \sigma(t) = P(t)\varepsilon,$$

где

$$P(t) = t^{-1} \int_0^t R(\tau) d\tau \quad (t > 0)$$

– осреднение ФР (оно удобнее первообразной для исследования ДД, так как через него выражается секущий модуль, а его свойства гораздо ближе к свойствам функции $R(t)$). Исключив параметр $t = \varepsilon/a$, получим семейство ДД в явной форме:

$$\sigma(\varepsilon, a) = a \int_0^{\varepsilon/a} R(\tau) d\tau \quad \text{или} \quad \sigma(\varepsilon, a) = \int_0^{\varepsilon} R(x/a) dx, \quad \text{или} \quad \sigma(\varepsilon, a) = P(\varepsilon/a)\varepsilon. \quad (5)$$

$P(t)$ – убывающая непрерывно дифференцируемая функция при $t > 0$, $P(t) > R(t)$, ибо $R(t)$ убывает ($P(t_*) = R(t_*)$, лишь когда $R(t) = \text{const}$ на $[0, t_*]$, то есть когда (1) вырождается в закон Гука). В [2] доказано, что всегда $P(t) > 1/\Pi(t) > R(t)$; $P(0+) = R(0)$, $P(+\infty) = R(+\infty)$; $\dot{P}(t) = t^{-1}(R(t) - P(t)) < 0$, $\dot{P}(0+) = \dot{R}(0+)/2$ (если $\dot{R}(0+) < \infty$); при $t \rightarrow \infty$ $\dot{P}(t) = o(t^{-1})$.

Секущий и касательный модули ДД (5): $\sigma(\varepsilon, a)/\varepsilon = P(\varepsilon/a)$, $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = R(\varepsilon/a)$.

Так как $\sigma'(\varepsilon) = \sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) > 0$, любая ДД возрастает по ε . Из убывания ФР следует, что при $a > 0$ $\sigma'(\varepsilon)$ убывает по ε . Потому любая ДД всегда выпукла вверх на луче $\varepsilon > 0$.

Семейство ДД (5) возрастает по a , поскольку $P(\varepsilon/a)$ возрастает по a ($\dot{P}(t) < 0$). Любая ДД лежит ниже прямой $\sigma = R(0)\varepsilon$, так как $P(t) < P(0) = R(0)$. Диаграмма деформирования (5) зависит от скорости деформирования a , но начальный модуль (модуль сдвига, объемный модуль и т.п. – в зависимости от физического смысла σ и ε) не зависит от СД: $E = \sigma'(0) = R(0)$ (полагаем, что $R(0) < \infty$).

При $a \rightarrow +\infty$ семейство ДД (5) любой регулярной модели сходится к прямой $\sigma = E\varepsilon$ равномерно на любом отрезке оси ε :

$$\sup_{[0, \omega]} |\sigma(\varepsilon) - E\varepsilon| = \sup_{[0, \omega]} \varepsilon |P(\varepsilon/a) - E| = \omega |P(\omega/a) - E| \rightarrow 0 \text{ при } a \rightarrow \infty,$$

так как $P(x)$ убывает и $P(+0) = E$. Поэтому $\sigma = E\varepsilon$ – мгновенная ДД. К ней же сходятся и семейства ДД при постоянной скорости нагружения и изохронных кривых ползучести [2, 3]. Если модель не регулярна, то $E = \infty$, касательная к любой ДД в нуле вертикальна, а семейство ДД $\varepsilon(\sigma, a)$ равномерно сходится при $a \rightarrow \infty$ к прямой $\varepsilon = 0$.

Касательный и секущий модули ДД (5) стремятся при $\varepsilon \rightarrow \infty$ к пределу ФР $r = R(+\infty) = P(+\infty)$. Длительный модуль r тоже не зависит от СД. При $a \rightarrow 0$ семейство ДД (5) всегда сходится (сверху) к прямой $\sigma = r\varepsilon$ равномерно на любом отрезке полуоси $\varepsilon > 0$:

$$\sup_{[\alpha, \omega]} |\sigma(\varepsilon) - r\varepsilon| = \sup_{[0, \omega]} \varepsilon |P(\varepsilon/a) - r| < \omega |P(\alpha/a) - r| \rightarrow 0 \text{ при } a \rightarrow 0,$$

так как $P(x)$ убывает.

Необходимое ограничение $\ddot{R}(t) \geq 0$ на ФР [2, 3] также индуцирует ограничение на форму ДД: из него следует, что кривизна ДД $\kappa(\varepsilon)$ монотонно убывает и $\kappa(\infty) = 0$ [2].

Нарушение одного из установленных выше свойств у ЭДД материала – достаточный признак неприменимости ОС (1). В частности, оно не годится для материалов, у которых обнаруживается зависимость мгновенного или длительного модулей от СД (ряда керамических материалов, полимеров, композитов, костной ткани, твердого топлива и т.п.). Однако порой линейными ОС пытаются описать материалы, ЭДД которых имеют разные (это подчеркивается авторами) касательные в нуле при разных СД [13].

По ДД, в принципе, можно определить ФР: из (5) $P(\varepsilon/a) = \sigma(\varepsilon/a)/\varepsilon$, а зная $P(x)$, можно вычислить и $R(x)$ (например, $R(x) = P(x) + xP'(x)$), а затем при необходимости откорректировать погрешность с помощью второй ДД при другом значении СД.

При $\varepsilon \rightarrow \infty$ $\sigma/\varepsilon \rightarrow r$, и ДД (5) имеет асимптоту тогда и только тогда, когда интеграл $I = \int_0^{+\infty} [R(\tau) - r]d\tau$ сходится:

$$q = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} (\sigma - r\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon} [R(x/a - r)] dx = \int_0^{+\infty} [R(\tau) - r] d\tau.$$

Тогда любая ДД имеет асимптоту $\sigma = r\varepsilon + q(a)$, ее угловой коэффициент не зависит от СД, а $q(a) = aI$, $I > 0$. Так как ФР убывает, то всегда $\sigma(\varepsilon, a) < r\varepsilon + Ia$, то есть $\sigma(\varepsilon, a)$ стремится к асимптоте снизу. Из наличия у ДД (5) асимптоты следует, что при $a \rightarrow 0$ семейство ДД сходится к прямой $\sigma = r\varepsilon$ равномерно на всем луче $\varepsilon \geq 0$, так как $|\sigma(\varepsilon, a) - r\varepsilon| \leq Ia$.

Когда у ДД есть асимптота, естественно аппроксимировать ДД двухзвенной ломаной. Конечно, ЭДД материала может оборваться из-за разрушения образца еще до того, как обозначится склонность ЭДД к асимптоте. Оценим, насколько быстро ТДД выходит на асимптоту. Точка пересечения предельных прямых $\sigma = E\varepsilon$ и $\sigma = r\varepsilon + aI$:

$$\varepsilon_* = \frac{aI}{E - r}, \quad \sigma_* = \frac{EaI}{E - r}. \quad (6)$$

Значение ДД в точке $\varepsilon = \varepsilon_*$ вычисляется по (5): $\sigma(\varepsilon_*, a) = P(I/(E - r))aI/(E - r)$. Отношение $\sigma(\varepsilon_*, a)/\sigma_* = E^{-1}P(I/(E - r))$ меньше единицы (в силу убывания $P(t)$) и убывает по аргументу $I/\Delta R$, где $\Delta R = E - r = R(0) - R(+\infty)$. Чем меньше $I/\Delta R$, тем ближе ДД к асимптоте. Существенно, что $\sigma(\varepsilon_*, a)/\sigma_*$ зависит только от ФР и не зависит от СД a . Это свойство – необходимое условие адекватности ОС (1), легко проверяемое по ЭДД, на которых намечается приближение к наклонной асимптоте (то есть имеющих билинейное очертание). Для таких материалов зависимость от СД отношения $\sigma(\varepsilon_*, a)/\sigma_*$, вычисленного по ЭДД, может служить индикатором неприменимости линейной теории.

Формулы (6) могут служить для определения величин r и I по ЭДД (определение r и I по экспериментальной кривой релаксации (ЭКР) гораздо сложнее и требует длительного эксперимента). Если же определить r и I по наклонной асимптоте ЭДД, то из (6) можно найти и E .

Величины E , r , I (или $I/(E - r)$) – материальные параметры, характеризующие поведение ФР в точке $t = 0$ и на бесконечности и среднюю скорость ее убывания (для моделей Максвелла и Кельвина $I/(E - r)$ совпадает с временем релаксации, для модели Фойгта $I = \eta$), а значит, и управляющие свойствами ТДД и ТКР. Для идентификации ОС (1) (по ЭКР и ЭДД) удобно задавать ФР в виде семейства положительных убывающих выпуклых вниз функций, зависящего от этих трех параметров (и, возможно, еще и других). Например,

$$\begin{aligned} R(t) &= A(t+h)^{-\alpha} + r, \quad h, A > 0, \alpha > 1, r \geq 0, \text{ тогда} \\ E &= Ah^{-\alpha} + r, \quad I/(E - r) = (\alpha - 1)h \text{ или} \\ R(t) &= (E - r)e^{-\mu t} + r, \quad E > r \geq 0, \mu > 0. \end{aligned} \quad (7)$$

4. Диаграммы деформирования моделей Максвелла, Фойгта и трехзвенных регулярных моделей

Семейство ФР (7) при $r > 0$ порождает все трехзвенные регулярные модели (РеМ-3) (см. рис. 1а). Этой ФР соответствует (в силу (3)) ФП (4) с $\alpha = 0$ и $\gamma \in (0; \beta)$, причем $\beta = r^{-1}$, $1 - \gamma\beta^{-1} = r/E$, $\lambda/\mu = 1 - \gamma\beta^{-1} = r/E \in (0; 1)$ (то есть всегда $\lambda < \mu$ и время релаксации $1/\mu$ меньше времени ползучести $1/\lambda$). Главное отличие РеМ-3 от

РеМ-4 и РеМ-2 (от МСТ (4) с $\alpha \neq 0$ и модели Максвелла) – ограниченность ФП и ненулевой длительной модуль $R(\infty)$:

$$\Pi(0) = \beta - \gamma > 0, \quad \Pi(\infty) = \beta, \quad R(0) = E = (\beta - \gamma)^{-1}, \quad R(\infty) = r = \beta^{-1}, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\Pi(0)}{\Pi(\infty)}.$$

При $r = 0$ (7) вырождается в модель Максвелла, а при $E = r \neq 0$ – в упругий элемент. При $\gamma \rightarrow 0$, как и при $\lambda \rightarrow +\infty$, семейство ФП РеМ-3 сходится на интервале $t > 0$ к постоянной $\Pi(t) = \beta$ (к ФП упругого элемента), семейство ФР – к постоянной $r = 1/\beta$.

Осреднение ФР и ДД РеМ-3 (5) имеет вид:

$$P(t) = (E - r)\mu^{-1}t^{-1}(1 - e^{-\mu t}) + r, \quad \sigma(\varepsilon, a) = (E - r)\mu^{-1}a(1 - e^{-\mu\varepsilon/a}) + r\varepsilon. \quad (8)$$

При любом a ДД (8) обладает асимптотой $\sigma = r\varepsilon + Ia, I = (E - r)\mu^{-1}$.

Так как $P(t) - r = Ct^{-1} + o(t^{-1})$, то этот пример опровергает гипотезу о том, что скорость убывания функций $P(t) - r$ и $P(t) - R(t)$ при $t \rightarrow \infty$ тем больше, чем больше скорость убывания функции $R(t) - r$ (даже для бесконечно гладких на $[0; \infty]$ ФР (7)). В частности, из сходимости интеграла I не следует сходимость такого интеграла для $P(t) - r$.

При $\gamma \rightarrow \beta - 0$ имеем: $E \rightarrow \infty, \mu \rightarrow \infty, \lambda/\mu \rightarrow 0$, ФП, ФР и ДД РеМ-3 сходятся к ФП, ФР и ДД модели Фойгта: $R(t) = \eta\delta(t) + r, \sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + \eta a$ с $\eta = \lim (E - r)/\mu = (\beta\lambda)^{-1}, r = \beta^{-1}, I = \eta$ (слагаемое $(E - r)e^{-\mu}/\eta$ в ДД (8) оказывается δ -образным семейством).

На рис. 2 приведены ДД РеМ-3 (8) с $r = 1, E = \eta = 10, \mu = 1$ (то есть $\beta = 1, \gamma = 0,9, \lambda = 0,1$) (черные кривые) и Максвелла с $r = 0$ (синие кривые) для СД $a = 0,01; 0,1; 0,2; 0,3; 1$. При $a \rightarrow \infty$ семейства ДД сходятся к прямой $\sigma = E\varepsilon$ (верхняя красная штрихпунктирная линия). Красные штриховые прямые – ДД модели Фойгта $\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + \eta a$ ($r = E_F = 1, \eta = 10$) при тех же СД; они совпадают с асимптотами $\sigma = r\varepsilon + aI$ ДД РеМ-3. Асимптоты ДД модели Максвелла горизонтальны и совпадают с ДД вязкого элемента (зеленые прямые – для $a = 0,1; 0,2; 0,3$). Для линейно-вязкой жидкости $R(t) = \eta\delta(t), r = 0, I = \eta, P(t) = \eta t^{-1}$ и ДД: $\sigma(\varepsilon, a) = \eta a$. Диаграммы деформирования модели Фойгта совпадают с ДД жесткопластического тела с линейным упрочнением, но пороговое напряжение зависит от СД: $\sigma(0) = \eta a \neq 0$ (наличие вертикального участка на ДД характерно для всех СиМ). При $a \rightarrow \infty$ семейство ДД сходится к вертикальному лучу $\varepsilon = 0$ ($E = \infty$), а при $a \rightarrow 0$ – к прямой $\sigma = r\varepsilon$ (нижняя штрихпунктирная линия).

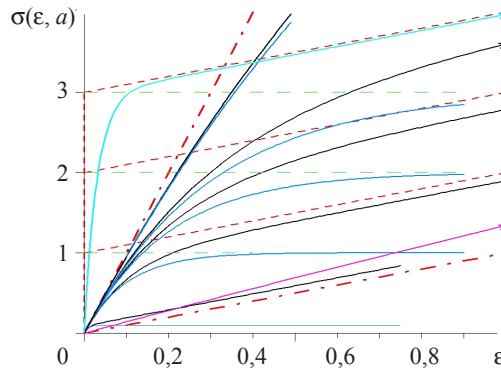


Рис. 2

Розовая кривая – ДД (8) при $\beta = 1, \lambda = 0,1, \gamma = 0,3$ (тогда $r = 1, E = 10/7, \mu = 1/7, \eta = 10$) для $a = 0,3$, она иллюстрирует сходимость семейства ДД РеМ-3 с $a = \text{const}$ к прямой $\sigma = r\varepsilon$ при $\gamma \rightarrow 0$. Голубая кривая – ДД (8) при $\gamma = 0,99$ (тогда $E = 100, \mu = 10, \eta = 10$) для $a = 0,3$, она иллюстрирует сходимость семейства ДД РеМ-3 (8) с $a = \text{const}$ к ДД модели Фойгта при $\gamma \rightarrow \beta - 0$.

На рис. 3 приведены для сравнения ДД моделей Максвелла (синие кривые) и Фойгта (красные кривые) при одинаковых значениях $r = E$ и η ($E = \eta = 10$) для СД $a = 0,1; 0,2; 0,3$. Красный штрихпунктир – прямая $\sigma = E\varepsilon$, к которой сходится (снизу) семейство ДД модели Максвелла при $a \rightarrow \infty$ (и их общая касательная в нуле). Семейство ДД модели Фойгта сходится к этой прямой сверху при $a \rightarrow 0$. Три черные кривые – ДД РеМ-3 (7) с теми же E и $\mu = E/\eta$, что и у модели Максвелла ($E = 10, \mu = 1$), но с разными значениями $r > 0$, а именно: $r = 1; 5; 9$ ($r < E$ в (7)). Все эти три ДД соответствуют $a = 0,1$ и демонстрируют, как модель РеМ-3 с ростом r становится все более «жесткой» и как семейство ее ДД с $a = \text{const}$ сходится при $r \rightarrow \infty$ к прямой $\sigma = E\varepsilon$ (снизу). Черная штрихпунктирная кривая, асимптотически приближающаяся к ДД модели Фойгта для $a = 0,1$, – это ДД РеМ-3 с тем же значением $r = 10$ (но с увеличенным $E > E_M = 10$) для все той же СД $a = 0,1$. Таким образом, на рис. 3 можно проследить, как меняются свойства ДД при скрещивании первичных моделей, как третий параметр семейства моделей РеМ-3 позволяет связать гомотопией модель Максвелла с моделью Фойгта (преобразовать ДД регулярной модели в ДД ее антипода).

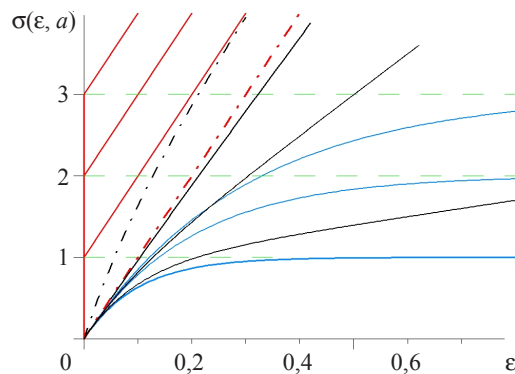


Рис. 3

5. Диаграммы деформирования четырехзвенных регулярных моделей (модели стандартного тела)

При $\alpha, \beta > 0$ ФП (4) порождает все четырехзвенные РеМ (см. рис. 1в; все четыре РеМ эквивалентны МСТ). ФР МСТ имеет вид [2, 3]:

$$R(t) = Ae^{-\mu_1 t} + Be^{-\mu_2 t}, \quad A, B > 0, \quad \mu_i > 0, \quad (9)$$

$$\mu_i = 0,5(\beta - \gamma)^{-1}(\alpha + \beta\lambda \mp \sqrt{D}) > 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$D = (\alpha + \beta\lambda)^2 - 4(\beta - \gamma)\alpha\lambda = (\alpha - \beta\lambda)^2 + 4\gamma\alpha\lambda > 0,$$

$$A = (\lambda - \mu_1)/\sqrt{D} > 0, \quad B = (\mu_2 - \lambda)/\sqrt{D} > 0.$$

Всегда $0 < \mu_1 < \lambda < \mu_2$ [2,3], $\mu_2 - \mu_1 = (\beta - \gamma)^{-1}\sqrt{D}$.

ФР (9) положительна, убывает и выпукла вниз, то есть допустима; $R(\infty) = 0$, $\Pi(\infty) = \infty$, $R(0) = A + B = (\beta - \gamma)^{-1}$, $\Pi(0) = \beta - \gamma$, $\dot{R}(0) = -(\alpha + \lambda\gamma)(\beta - \gamma)^{-2}$, $\dot{\Pi}(0) = \alpha + \lambda\gamma$. Поскольку (9) – сумма ФР двух моделей Максвелла, то МСТ эквивалентна параллельному соединению моделей Максвелла с различными временами релаксации $\tau_1 = 1/\mu_1$.

Осреднение ФР (9) и ДД МСТ при постоянной СД имеет вид:

$$P(t) = A(\mu_1 t)^{-1}(1 - e^{\mu_1 t}) + B(\mu_2 t)^{-1}(1 - e^{\mu_2 t}),$$

$$\sigma(\varepsilon, a) = a[A\mu_1^{-1}(1 - e^{\mu_1 \varepsilon/a}) + B\mu_2^{-1}(1 - e^{\mu_2 \varepsilon/a})],$$

ДД МСТ – сумма ДД двух моделей Максвелла; $\sigma(0, a) = 0$, $E = \sigma'(\varepsilon, 0+) = (\beta - \gamma)^{-1}$. Длительный модуль $R(\infty) = 0$, и при $\varepsilon \rightarrow \infty$ ДД имеет горизонтальную асимптоту $\sigma = a[A\mu_1^{-1} + B\mu_2^{-1}]$, то есть $\sigma = a/\alpha$. При $a \rightarrow 0$ семейство ДД равномерно сходится к $\sigma \equiv 0$ на луче $\varepsilon \geq 0$. Таким образом, ДД МСТ (как и ее кривые релаксации) качественно не отличаются от ДД (и кривых релаксации) модели Максвелла (но кривые ползучести МСТ уже не прямолинейны). При $a \rightarrow 0+$ (тогда $\mu_1 \rightarrow 0$, $\mu_2 \rightarrow \mu$, $A \rightarrow 1/\beta$) семейство ДД МСТ сходится к ДД трехзвенной РеМ (7), а при $\gamma \rightarrow \beta - 0$ (тогда $E \rightarrow \infty$, $\dot{R}(0) \rightarrow -\infty$, $\mu_1 \rightarrow v = \alpha\lambda/(\alpha + \beta\lambda)$, $\mu_2 \rightarrow \infty$, $B \rightarrow \infty$, $\tau_2 \rightarrow 0$) – к ДД сингулярной трехзвенной модели.

6. Диаграммы деформирования трехзвенных сингулярных моделей

ФП (4) порождает СиМ тогда и только тогда, когда $\Pi(0) = 0$, то есть $\gamma = \beta$. При $\alpha = 0$ это модель Фойгта, а если $\alpha > 0$, то ФП (4) порождает все трехзвенные сингулярные модели (СиМ-3) (см. рис. 1б):

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \beta e^{-\lambda t}, \quad \alpha, \beta, \lambda > 0, \quad R(t) = \eta \delta(t) + A e^{-vt}, \quad (10)$$

$$v = \alpha\lambda(\alpha + \beta\lambda)^{-1} > 0, \quad \eta = (\alpha + \beta\lambda)^{-1} > 0,$$

$$A = \eta(\lambda - v) = \beta\lambda^2 \eta^2 = v^2 \beta \alpha^{-2} > 0.$$

ФР (10) находится по ФП из уравнения (3). Она отличается от ФР модели Максвелла только сингулярным слагаемым $\eta\delta(t)$, убывает и выпукла вниз при $t > 0$, $R(0+) = A$, $R(\infty) = 0$. Очевидно, что $\eta < \alpha^{-1}$ и $0 < v < \lambda$ (для трехзвенных РеМ, наоборот, показатель ФР $\mu > \lambda$, то есть время релаксации меньше времени ползучести; всегда $\mu_1 < v < \lambda < \mu < \mu_2$).

Осреднение ФР имеет вид: $P(t) = t^{-1}[\eta + Av^{-1}(1 - e^{-vt})] = \alpha^{-1}t^{-1}[1 - \eta\beta\lambda e^{-vt}]$. Уравнение ДД имеет вид: $\sigma(\varepsilon, a) = a\eta + aAv^{-1}(1 - e^{-v\varepsilon/a}) = a\alpha^{-1}[1 - \omega e^{-v\varepsilon/a}]$, где $\omega = \eta\beta\lambda = \beta\lambda(\alpha + \beta\lambda)^{-1} < 1$.

Эта ДД – сумма ДД модели Максвелла и ДД вязкого элемента $\sigma = a\eta$, то есть получается из ДД Максвелла сдвигом на $a\eta$ вдоль оси σ , здесь $\sigma(0, a) = a\eta \neq 0$ (вертикальный участок ДД – след слагаемого $\eta\delta(t)$ в ФР), а $\sigma'(\varepsilon, a) = A e^{-v\varepsilon/a}$, $\sigma'(\varepsilon, 0+) = A$, длительный модуль $R(\infty) = 0$. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ каждая ДД имеет горизонтальную асимптоту $\sigma = a(\eta + Av^{-1})$, то есть $\sigma = a/\alpha$ (см. синие кривые на рис. 4). При $a \rightarrow 0$ семейство ДД равномерно сходится к $\sigma \equiv 0$ на полуоси $\varepsilon \geq 0$, а при $a \rightarrow \infty$ – к вертикальному лучу $\varepsilon = 0$.

С ростом $\lambda \in (0, \infty)$ параметры v и A возрастают и ограничены, а $\eta(\lambda)$ убывает ($\inf \eta(\lambda) = 0$). При $\lambda \rightarrow 0$ (как и при $\beta \rightarrow 0$) семейства ФП и ФР (10) сходятся к ФП

и ФР ньютоновской жидкости ((10) с $\lambda\beta = 0$): $A \rightarrow 0, v \rightarrow 0, \eta \rightarrow \alpha^{-1} = \sup \eta(\beta, \lambda), \omega \rightarrow 0$. При $\lambda \rightarrow \infty$ имеем: $\eta \rightarrow 0, v \rightarrow \alpha/\beta = \sup v(\lambda), A \rightarrow \beta^{-1} = \sup A(\lambda), \omega \rightarrow 1 = \sup \eta(\alpha, \beta, \lambda)$, ФП и ФР (10) и ДД сходятся на интервале $t > 0$ к ФП, ФР и ДД модели Максвелла с $v = \alpha/\beta$. С ростом β параметры v и η убывают, а $A(\beta)$ имеет точку максимума $\beta_* = \alpha/\lambda$. С ростом $\alpha > 0$ $v(\alpha)$ возрастает ($\sup v(\alpha) = \lambda$), а $\eta(\alpha)$ и $A(\alpha)$ убывают (до нуля). При $\alpha \rightarrow 0$ получаются ФП, ФР и ДД модели Фойгта: $\eta \rightarrow \eta_F = (\beta\lambda)^{-1} = \sup \eta(\alpha), v \rightarrow 0, \omega \rightarrow 1, \sigma(\varepsilon, a) \rightarrow \eta a + E_F \varepsilon$, где $E_F = \beta\lambda^2 \eta_F^2 = \beta^{-1}$. При $\alpha \rightarrow \infty$ (тогда $v \rightarrow \lambda, \eta \rightarrow 0, A \rightarrow 0$) семейство ДД равномерно сходится к $\sigma \equiv 0$ на луче $\varepsilon \geq 0$.

7. Диаграммы деформирования четырёхзвенных сингулярных моделей

МСТ – последовательное соединение моделей Фойгта и Максвелла. Рассмотрим их параллельное соединение (см. рис. 1z). Тогда ФР – сумма ФР моделей Фойгта и Максвелла:

$$R(t) = \eta\delta(t) + r + Ae^{-vt}, \quad (11)$$

где $r = E_F > 0, \eta = \eta_F > 0, A = E_M > 0, v = E_M/\eta_M > 0$. Эта ФР положительна, убывает и выпукла вниз при $t > 0, R(\infty) = r$. При $r = 0$ получается трехзвенная СиМ (10); при $A = 0$ или $v = 0$, или $v \rightarrow \infty$ – модель Фойгта. При $\eta = 0$ (11) вырождается в модель Кельвина (РеМ-3); если еще и $r = 0$ – в модель Максвелла.

ФП строится как решение уравнения (3) с помощью преобразования Лапласа [2, 3]:

$$P(t) = \beta_1(1 - e^{-\lambda_1 t}) + \beta_2(1 - e^{-\lambda_2 t}), \quad (12)$$

$$\lambda_i = 0,5\eta^{-1}(\eta v + A + r \mp \sqrt{D}) > 0 \quad (i = 1, 2),$$

$$\beta_1 = (v\lambda_1^{-1} - 1)/\sqrt{D} > 0, \quad \beta_2 = (1 - v\lambda_2^{-1})/\sqrt{D} > 0,$$

$$D = (\eta v + r + A)^2 - 4\eta r v = (\eta v + A - r)^2 + 4rA > 0.$$

Всегда $0 < \lambda_1 < v < \lambda_2; \beta_i > 0, \lambda_2 - \lambda_1 = \eta^{-1}\sqrt{D}, \lambda_1\lambda_2 = rv\eta^{-1}$. ФП (12) положительна, возрастает и выпукла вверх, то есть допустима. Она совпадает с ФП последовательного соединения двух моделей Фойгта с разными временами ползучести $\tau_i = 1/\lambda_i; P(0) = 0, P(\infty) = \beta_1 + \beta_2 = r^{-1}, \dot{P}(0) = \beta_1\lambda_1 + \beta_2\lambda_2 = \eta^{-1}$. При $rv\eta^{-1} \rightarrow 0$ будет $\lambda_1 \rightarrow 0$; при $v \rightarrow 0 - \lambda_2 \rightarrow (A + r)\eta^{-1}$, при $\eta \rightarrow \infty - \lambda_2 \rightarrow v$. При $r \rightarrow 0: \lambda_1 \rightarrow 0, \lambda_2 \rightarrow v + A\eta^{-1}, P(\infty) = r^{-1} \rightarrow \infty$, и ФР (11) и ФП (12) сходятся к ФР и ФП (10).

Осреднение ФР (11) дает: $P(t) = t^{-1}[\eta + rt + Av^{-1}(1 - e^{-vt})]$, ДД четырехзвенных сингулярных моделей (СиМ-4) при постоянной СД имеет вид:

$$\sigma(\varepsilon, a) = r\varepsilon + a\eta + aAv^{-1}(1 - e^{-v\varepsilon/a}). \quad (13)$$

ДД (13) – сумма ДД моделей Фойгта и Максвелла или ДД РеМ-3 и вязкого элемента, то есть получается из ДД РеМ-3 сдвигом на $a\eta$ вдоль оси σ . Очевидно, что $\sigma(0, a) = a\eta \neq 0$ (вертикальный участок ДД – атрибут всех СиМ), $\sigma'(\varepsilon, 0+) = r + A$. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ ДД (13) имеет асимптоту $\sigma = r\varepsilon + a(\eta + Av^{-1})$ (наклонную, а не горизонтальную – как у СиМ-3 (10) с $r = 0$ или у РеМ-4). Эти ДД напоминают ДД модели Фойгта, но переход от вертикального участка к наклонному происходит постепенно.

но, а не изломом в одной точке. При $A \rightarrow 0$ (как и при $v \rightarrow \infty$) семейство ДД (13) сходится к ДД модели Фойгта $\sigma(\epsilon, a) = r\epsilon + a\eta$, а при $v \rightarrow 0$ – к $\sigma(\epsilon, a) = (r + A)\epsilon + a\eta$ (семейство ФР (11) сходится к $R_r = \eta(\delta(t) + r + A)$).

При $a \rightarrow \infty$ семейство ДД (13) сходится к вертикальному лучу $\epsilon = 0$, а при $a \rightarrow 0$ равномерно сходится (сверху) к прямой $\sigma = r\epsilon$ (к предельной асимптоте). Этим СиМ-4 отличается от СиМ-3 и РеМ-4, у которых ДД сходятся при $a \rightarrow 0$ к $\sigma \equiv 0$.

На рис. 4 приведены ДД (13) для СиМ-4 с $\eta = A = v = 1$ и $r = 1$ при СД $a = 0,1; 1; 2; 3$ (черные кривые). Красная прямая – предельная прямая $\sigma = r\epsilon$, к которой сходится семейство ДД (и их асимптот $\sigma = r\epsilon + 2a$ – зеленые прямые) при $a \rightarrow 0$; уже при $a = 0,1$ ДД почти сливается с ней. Синие кривые – ДД (13) с $r = 0$ для тех же СД, то есть ДД СиМ-3 (10) с теми же $\eta = A = v = 1$ (этой тройке МП соответствует тройка параметров ФП (10) $\alpha = 0,5, \beta = 0,25, \lambda = 2$); они имеют горизонтальные асимптоты $\sigma = 2a$.

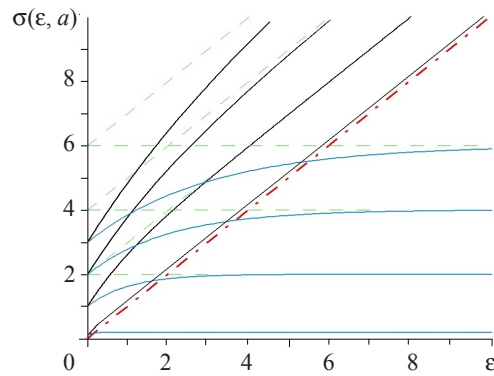


Рис. 4

На рис. 5 приведены ДД (13) при фиксированной СД $a = 1$ для СиМ-4 с $\eta = A = v = 1$ и разными r : 1; 0,5; 0,3; 0,1; 0,01 (черные кривые). Асимптоты ДД (пучок прямых $\sigma = 2 + r\epsilon$) отмечены зеленым цветом. При $r \rightarrow 0$ семейство ДД (13) сходится к ДД СиМ-3 (10) (синяя штриховая линия). Две штрихпунктирные кривые (черная и синяя) – ДД моделей РеМ-3 (с $A = v = 1, r = 0,1, a = 1$) и Максвелла ($r = 0$), к которым сходятся сверху ДД СиМ-4 и СиМ-3 при $\eta \rightarrow 0$ (они получаются сдвигом на $a\eta$).

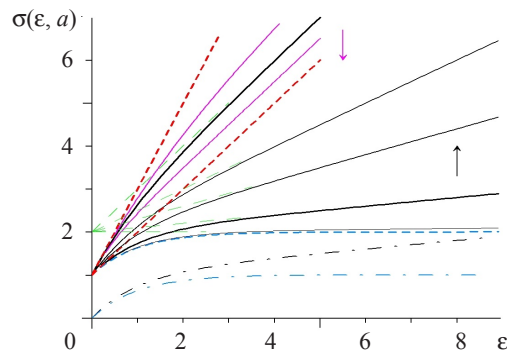


Рис. 5

С ростом v ДД опускаются ниже, при $v \rightarrow +\infty$ и $v \rightarrow 0$ семейство ДД (13) сходится к ДД моделей Фойгта $\sigma = r\epsilon + a\eta$ и $\sigma = (r + A)\epsilon + a\eta$ (красные штриховые

прямые); в секторе между ними лежат все ДД (13) с $\eta = A = r = 1$ и любым $\nu > 0$ (в частности, розовые кривые – с $\nu = 0,5$ и $\nu = 2$).

8. Диаграммы деформирования моделей с неограниченной функцией релаксации

Для неограниченных ФР, не содержащих $\delta(t)$, свойства ДД в окрестности точки $\varepsilon = 0$ отличаются от свойств ДД как регулярных, так и сингулярных моделей. Рассмотрим, например, степенную ФР и соответствующую ей (в силу (3)) ФП:

$$R(t) = At^{-\alpha}, \quad \alpha \in (0; 1), \quad A > 0; \quad \Pi(t) = A^{-1}C(\alpha)t^\alpha, \quad C(\alpha) = (\alpha\pi)^{-1} \sin \alpha\pi. \quad (14)$$

Очевидно, что ФП (14) положительна, возрастает и выпукла вверх (допустима), $\Pi(0) = 0$, $\Pi(\infty) = \infty$, $\dot{\Pi}(0) = \infty$; $R(t)\Pi(t) = C(\alpha)$; $C(\alpha)$ убывает на $(0; 1)$, $C(0+) = 1$ и $C(1-0) = 0$.

Осреднение ФР (14) имеет вид $P(t) = A(1 - \alpha)^{-1}t^{-\alpha}$, уравнение ДД таково: $\sigma(\varepsilon, a) = A(1 - \alpha)^{-1}\alpha^\alpha\varepsilon^{1-\alpha}$, $\sigma'_\varepsilon(\varepsilon, a) = A\alpha^\alpha\varepsilon^{-\alpha}$, мгновенный и длительный модули: $E := \sigma'_\varepsilon(0, a) = \infty$, $E_\infty = \sigma'_\varepsilon(\infty, a) = 0$. С ростом α касательный модуль в окрестности нуля растет и ДД взлетает все выше. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ все ДД не имеют асимптот. При $a \rightarrow 0$ семейство ДД сходится к нулевой функции, а при $a \rightarrow \infty$ – к вертикальному лучу $\varepsilon = 0$.

На рис. 6 приведены ДД модели (14) с $A = 1$ и разными α . Красные кривые – ДД для $\alpha = 0,9$ при СД $a = 0,1; 0,5; 1; 2$, синяя – для $\alpha = 0,95$, $a = 1$. Они по очертаниям близки к ДД вязкого элемента (сходимость будет при $\alpha \rightarrow 1$, если $A = \eta(1 - \alpha)$, $\eta = \text{const}$). Голубые кривые – ДД для $\alpha = 0,5$ при СД $a = 0,01; 0,1; 1; 10$, черные – для $\alpha = 0,1$ при $a = 10^{2n}$, $n = 0; 1; 2; 3$. Стрелками помечены ДД с $a = 1$. При $a \in (0,4; 0,6)$ ДД почти совпадают. При малом α модель становится менее чувствительной к СД, ДД спрямляются и сближаются, угол раствора веера быстро уменьшается, и при $\alpha \rightarrow 0$ он стягивается в единую прямую – ДД упругого элемента $\sigma = E\varepsilon$ (красный штрихпунктир) с $E = A = 1$ (а ФР и ФП сходятся к постоянным A и A^{-1} на $(0, \infty)$).

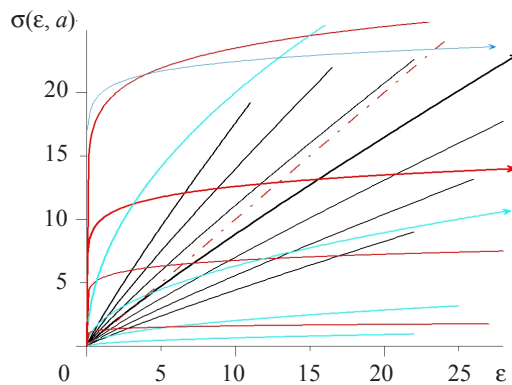


Рис. 6

9. О невозможности моделирования немонотонных или не выпуклых вверх диаграмм деформирования

Выше доказано, что ДД линейного ОС (1) при постоянных СД всегда возрастают и выпуклы вверх по ε , так как ФР $R(t)$ должна быть положительной и монотонной при $t \geq 0$.

Нарушение выпуклости ДД (5) может быть вызвано лишь наличием участка возрастания у ФР $R(t)$ (так как $\sigma'_\varepsilon(0, a) = R(\varepsilon/a)$), а значит, и у всех кривых релаксации ОС (1) $\sigma = \varepsilon R(t)$. Но возрастание ЭКР (для заданного $\varepsilon > 0$) никогда не наблюдается в испытаниях химически стабильных материалов. Потому *линейное ОС (1) не может описывать материалы, у которых ДД $\sigma(\varepsilon, a)$ выпукла вниз* (каучук, резины и т.п.) или имеет точки перегиба (связки, сухожилия, пенопласты и т.п.).

Нарушение монотонности ДД (5) может быть вызвано лишь тем, что где-то нарушается условие $R(t) > 0$, то есть у всех кривых релаксации ОС (1) с $\varepsilon > 0$ есть участок, где $\sigma(t) < 0$. Но это никогда не наблюдается в экспериментах. Потому *линейное ОС (1) не может описывать материалы с падающей диаграммой*.

Наличие на какой-либо ДД (5) всего одной точки с горизонтальной касательной (при сохранении возрастания ДД) равносильно существованию точки t_0 , в которой $R(t_0) = 0$ (то есть полная релаксация происходит за конечное время). Тогда $R(t) \equiv 0$ при $t > t_0$ и, в силу (5), любая ДД имеет площадку текучести: $\sigma(\varepsilon, a) = \bar{\sigma}$ при $\varepsilon > \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 = at_0$, $\bar{\sigma} = at_0 P(t_0) = Ca$, C – площадь под графиком ФР. На первый взгляд, такие финитные ФР допустимы. Однако можно доказать [2], что ФП, ассоциированная с такой ФР в силу (3), не удовлетворяет ограничению $\ddot{\Pi}(x) \leq 0$ (это влечет за собой наличие интервала возрастания на кривой обратной ползучести [2, 3]). Это означает, что модели с финитной ФР не допустимы.

Заключение

Изучены общие качественные свойства диаграмм деформирования (с постоянной СД) линейного ОС (1), их зависимость от характеристик функций релаксации и СД. Выявлена специфика ТДД всех трех основных классов моделей: с регулярной, неограниченной и сингулярной ФР. В частности, доказано, что ТДД всегда монотонны и выпуклы вверх, их мгновенный и длительный модули не зависят от СД, а при стремлении СД к бесконечности или к нулю семейство ТДД (5) всегда сходится к предельным прямым (с мгновенным или длительным модулем). Этим доказано, что линейное ОС вязкоупругости не способно моделировать материалы с падающей ЭДД, с выпуклыми вниз или имеющими точки перегиба ЭДД и те материалы, у которых достоверно установлена зависимость мгновенного или длительного модуля ЭДД от СД.

Список литературы

1. Хохлов А.В. Нелинейные модели вязкоупругости типа Максвелла. Особенности их поведения, скоростная чувствительность и возможность использования для описания ползучести и сверхпластичности материалов: Отчет о НИР № 5193 / НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова. М., 2013. № ГР 01201152141. 108 с.
2. Хохлов А.В. Качественный анализ линейных определяющих соотношений вязкоупругости. Свойства теоретических кривых деформирования, функций ползучести и релаксации и их произведения: Отчет о НИР № 5218 / НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова. М., 2013. № ГР 01201152141. 93 с.
3. Хохлов А.В. Кривые обратной ползучести в рамках линейной вязкоупругости и необходимые ограничения на функцию ползучести // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2013. Вып. 75. №4. С. 257–267.
4. Хохлов А.В. Свойства произведения функции ползучести и функции релаксации в линейной вязкоупругости // Проблемы прочности и пластичности. 2014. Т. 76, №4. С. 343–356.
5. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов: свойства те-

оретических кривых ползучести и моделирование затухания памяти // Изв. РАН. МТТ. 2007. №2. С. 147–166.

6. Хохлов А.В. Определяющее соотношение для реологических процессов с известной историей нагружения. Кривые ползучести и длительной прочности // Изв. РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 140–160.

7. Хохлов А.В. Критерии разрушения при ползучести, учитывающие историю деформирования, и моделирование длительной прочности // Изв. РАН. МТТ. 2009. №4. С. 121–135.

8. Хохлов А.В. Особенности нелинейной модели вязкоупругопластичности типа Максвелла // Современные проблемы математики, механики, информатики: Матер. Международ. науч. конф. Тула: Изд-во ТулГУ, 2014. С. 438–443.

9. Бленд Д.Р. Теория линейной вязкоупругости. М.: Мир, 1965. 200 с.

10. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

11. Кристенсен Р. Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.

12. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.

13. Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г. Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.

14. Tschoegl N.W. The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior. Berlin: Springer, 1989. 584 p.

15. Knauss W.G., Emri I., Lu H. Mechanics of polymers: Viscoelasticity // Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics, ed. by W.N. Sharpe. N.Y.: Springer, 2008. P. 49–96.

16. Lakes R.S. Viscoelastic materials. UK: Cambridge Univ. Press, 2009. 462 p.

17. Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победря Б.Е. Особенности поведения вязкоупругих моделей // Изв. РАН. МТТ. 2004. №1. С. 119–157.

References

1. Khokhlov A.V. Nelineynye modeli vyazkoupругosti tipa Maksvella. Osobennosti ikh povedeniya, skorostnaya chuvstvitel'nost' i vozmozhnost' ispol'zovaniya dlya opisaniya polzuchesti i sverkhplastichnosti materialov: Otchet o NIR № 5193 / NII mekhaniki MGU im. M.V. Lomonosova. M., 2013. № GR 01201152141. 108 s.

2. Khokhlov A.V. Kachestvennyy analiz lineynykh opredelyayushchikh sootnosheniy vyazkoupругosti. Svoystva teoreticheskikh krivykh deformirovaniya, funktsiy polzuchesti i relaksatsii i ikh proizvedeniya: Otchet o NIR № 5218 / NII mekhaniki MGU im. M.V. Lomonosova. M., 2013. № GR 01201152141. 93 s.

3. Khokhlov A.V. Krivye obratnoy polzuchesti v ramkakh lineynoy vyazkoupругosti i neobkhodimye ogranicheniya na funktsiyu polzuchesti // Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhvuz. sb. / Nizhegorod. un-t, 2013. Vyp. 75. №4. S. 257–267.

4. Khokhlov A.V. Svoystva proizvedeniya funktsii polzuchesti i funktsii relaksatsii v lineynoy vyazkoupругosti // Problemy prochnosti i plastichnosti. 2014. T. 76, №4. S. 343–356.

5. Khokhlov A.V. Opredelyayushchee sootnoshenie dlya reologicheskikh protsessov: svoystva teoreticheskikh krivykh polzuchesti i modelirovanie zatukhaniya pamyati // Izv. РАН. МТТ. 2007. №2. С. 147–166.

6. Khokhlov A.V. Opredelyayushchee sootnoshenie dlya reologicheskikh protsessov s izvestnoy istoriey nagruzheniya. Krivye polzuchesti i dlitel'noy prochnosti // Izv. РАН. МТТ. 2008. № 2. С. 140–160.

7. Khokhlov A.V. Kriterii razrusheniya pri polzuchesti, uchityvayushchie istoriyu deformirovaniya, i modelirovanie dlitel'noy prochnosti // Izv. РАН. МТТ. 2009. №4. С. 121–135.

8. Khokhlov A.V. Osobennosti nelineynoy modeli vyazkoupругoplastichnosti tipa Maksvella / / Sovremennye problemy matematiki, mekhaniki, informatiki: Mater. Mezhdunarod. nauch. konf. Tula: Izd-vo TulGU, 2014. С. 438–443.

9. Blend D.R. Teoriya lineynoy vyazkoupругosti. М.: Мир, 1965. 200 с.

10. Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.

11. *Kristensen R.* Vvedenie v teoriyu vyzkoupругosti. M.: Mir, 1974. 338 s.
12. *Rabotnov Yu.N.* Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel. M.: Nauka, 1977. 384 s.
13. *Koltunov M.A., Mayboroda V.P., Zubchaninov V.G.* Prochnostnye raschety izdeliy iz polimernykh materialov. M.: Mashinostroenie, 1983. 239 s.
14. *Tschoegl N.W.* The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior. Berlin: Springer, 1989. 584 p.
15. *Knauss W.G., Emri I., Lu H.* Mechanics of polymers: Viscoelasticity // Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics, ed. by W.N. Sharpe. N.Y.: Springer, 2008. P. 49–96.
16. *Lakes R.S.* Viscoelastic materials. UK: Cambridge Univ. Press, 2009. 462 p.
17. *Georgievskiy D.V., Klimov D.M., Pobedrya B.E.* Osobennosti povedeniya vyzkoupругikh modeley // Izv. RAN. MTT. 2004. №1. S. 119–157.

GENERAL PROPERTIES OF STRESS-STRAIN CURVES AT CONSTANT STRAIN RATE YIELDING FROM LINEAR THEORY OF VISCOELASTICITY

Khokhlov A.V.

The qualitative analysis of linear integral constitutive equation of viscoelasticity with an arbitrary relaxation modulus is continued. Its aim is to examine linear theory abilities to provide an adequate description of basic rheological phenomena and typical test curves of viscoelastoplastic materials and to find out convenient indicators marking the field of its applicability. General equation and basic properties of quasi-static theoretic stress-strain curves at constant strain rate are analytically studied herein. It is proved (for any decreasing relaxation modulus) that: 1) every theoretic stress-strain curves is an increasing and convex-up function of time (without extremum or inflection points); 2) theoretic stress-strain curves rise up as strain rate increase; 3) instantaneous and long-term equilibrium moduli (i.e. the limit values of theoretic stress-strain curves derivative which are equal to relaxation modulus limits at zero and infinity) don't depend on strain rate; 4) theoretic stress-strain curves family of any regular model converges uniformly to the linear function (instantaneous theoretic stress-strain curves of the model) as strain rate tends to infinity; theoretic stress-strain curves family of any non-regular model converges to vertical line; 5) if strain rate tends to zero, theoretic stress-strain curves family descends and converges uniformly to the linear function with the slope equal to relaxation modulus limit at infinity (it may be zero).

Three main classes of linear models (i.e. with regular, unbounded and singular relaxation modulus) are considered and distinctive features of theoretic stress-strain curves are marked. General properties and peculiarities of theoretic stress-strain curves families and their dependence on relaxation modulus parameters are illustrated by examination of classical rheological models (consisting of three or four spring and dashpot elements). The specific general features of theoretic stress-strain curves (and other basic curves) of the linear integral constitutive equation are highlighted that can indicate its applicability or non-applicability being compared with the list of typical properties of a certain material test curves. The results obtained herein show, in particular, that linear viscoelasticity can't simulate materials with experimental theoretic stress-strain curves having maximum point or concave-up segment and materials exhibiting instantaneous (or equilibrium) modulus dependence on strain rate or negative rate sensitivity.

Keywords: integral operator, creep compliance, relaxation modulus, constitutive equation, theoretic stress-strain curves, tangent modulus, regular and singular models, adequacy indicators for linear viscoelasticity.