

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЯ ПРИ ДЛИТЕЛЬНОМ ОСЕВОМ СЖАТИИ*

© 2015 г. Морозов Н.Ф.¹, Товстик П.Е.¹, Товстик Т.П.²

¹Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,
Российская Федерация

²Институт проблем машиноведения РАН, Санкт-Петербург,
Российская Федерация

tovstik_t@mail.ru

Поступила в редакцию 15.12.2014

Проведен анализ классической задачи о поперечной устойчивости тонкого стержня под действием длительного осевого сжатия. Показано, что поперечное движение стержня существенно зависит от способа приложения нагрузки. Л. Эйлером решены две статические предельные задачи: в линейном приближении найдена критическая нагрузка и возможные формы потери устойчивости, а при нелинейном подходе найдены всевозможные равновесные формы (эластики Эйлера). В работе М.А. Лаврентьева и А.Ю. Ишлинского с учетом сил инерции поперечного движения рассмотрена сжимающая нагрузка, существенно превосходящая эйлерову нагрузку. Установлено, что наибольшую скорость роста амплитуды поперечного прогиба имеет форма с большим числом волн в продольном направлении. На базе нелинейной динамической модели показано, что в начальные моменты времени реализуется форма прогиба, предсказанная М.А. Лаврентьевым и А.Ю. Ишлинским, которая в дальнейшем переходит в устойчивую эластику Эйлера. При этом конечная форма прогиба зависит от способа закрепления концов стержня.

Ключевые слова: стержень, динамическая устойчивость, продольные волны, поперечные колебания, параметрический резонанс, биения, эластики Эйлера.

Введение

Проведен анализ классической задачи о поперечной устойчивости тонкого стержня под действием осевого сжатия. В зависимости от продолжительности сжатия следует различать кратковременное и длительное воздействие. Кратковременным считаем воздействие, при котором время удара соизмеримо со временем пробега продольной волны деформации по длине стержня. Кратковременное воздействие вызывает продольные волны, которые многократно пробегают по длине стержня, отражаясь от его концов. Этот волновой процесс в линейном приближении может породить параметрические резонансы с неограниченным ростом амплитуды поперечных колебаний. При наличии сопротивлений амплитуды конечные, но нереаль-

* Выполнено при поддержке РФФИ (гранты 12.01.92000.ННС-а, 13.01.00523).

но большие. Для получения реальной картины движения используется квазилинейный подход, при котором не только продольные волны порождают поперечные колебания, но и, наоборот, поперечные колебания влияют на продольные. В результате колебания имеют характер биений с последовательным обменом энергией продольных и поперечных колебаний. При наличии сопротивлений биения затухают. Подробнее кратковременный удар здесь не обсуждается (см. [1–5]).

При исследовании длительного сжатия ориентирами служат работы Л. Эйлера [6], М.А. Лаврентьева и А.Ю. Ишлинского [7, 8], А.С. Вольмира [9] и др. Поперечное движение стержня существенно зависит от способа приложения нагрузки. Л. Эйлером решены две статические предельные задачи: в линейном приближении найдена критическая нагрузка и возможные формы потери устойчивости, а при нелинейном подходе найдены всевозможные равновесные формы стержня, нагруженного на концах (эластики Эйлера). Последующие исследования учитывают силы инерции стержня. В работе М.А. Лаврентьева и А.Ю. Ишлинского рассмотрена сжимающая нагрузка, существенно превосходящая эйлерову нагрузку, и установлено, что наибольшую скорость роста амплитуды поперечного прогиба имеет форма с большим числом волн в продольном направлении. Ниже на базе нелинейной динамической модели показано, что в начальные моменты времени сначала реализуется форма прогиба, предсказанная М.А. Лаврентьевым и А.Ю. Ишлинским, а затем она переходит в устойчивую эластику Эйлера. А.С. Вольмир исследовал поперечную устойчивость стержня на начальном этапе нагружения в предположении, что продольная волна сжатия еще не дошла до противоположного конца стержня. Потеря устойчивости начинается, если длина растущего со временем сжатого участка стержня достаточна для статической потери устойчивости.

Установлена возможность появления неустойчивости при внезапно приложенной осевой нагрузке, меньшей эйлеровой нагрузки [10]. Эта неустойчивость может появиться лишь при постоянно действующей силе, приложенной к концу стержня, и связана с параметрическим резонансом. В линейном приближении амплитуда неограниченно растет. Введение в рассмотрение нелинейных членов переводит систему в режим биений с последовательной перекачкой энергии продольных колебаний в поперечные и наоборот. Исследовано влияние на результат сил сопротивления и длительности переднего фронта импульса.

В настоящей статье обсуждается вопрос о влиянии способа приложения постоянно действующей продольной нагрузки на динамическую потерю устойчивости тонкого стержня. Для приложенной статической нагрузки, существенно превышающей критическую эйлерову нагрузку, на начальном этапе движения решение в линейной постановке получено в работе [7], причем наибольшую скорость роста амплитуды при потере устойчивости имеет одна из старших форм. Проведен геометрически нелинейный анализ и установлено, что с течением времени форма упругой линии переходит в одну из эластик Эйлера. При этом конечная форма линии существенно зависит от способа нагружения и закрепления концов стержня.

1. Продольные волны в стержне

В линейном приближении распространение продольных волн в стержне описывается уравнением

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad u(L, t) = 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ – продольное перемещение, причем правый конец закреплен; c – скорость звука.

Будем рассматривать три варианта граничных условий на левом конце $x = 0$ (рис. 1).

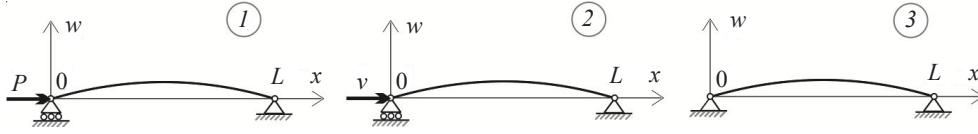


Рис. 1

На рисунке показаны ожидаемые формы поперечного прогиба $w(x, t)$:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=0} = -\varepsilon_0, \quad (2)$$

$$u(0, t) = \varepsilon_0 ct, \quad (3)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (4)$$

где $\varepsilon_0 > 0$ – деформация продольного сжатия. В случае (2) стержень сжимается постоянной силой $P = ES\varepsilon_0$ (E – модуль упругости, S – площадь поперечного сечения). В случае (3) конец стержня движется с постоянной скоростью $v = \varepsilon_0 c$ (этот случай может быть реализован, в частности, при продольном ударе со скоростью v телом с большой массой). Наконец, в случае (4) оба конца неподвижны. Оставляя в стороне условие (4), рассмотрим решение двух первых задач при нулевых начальных условиях $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$. В дальнейшем нас интересует деформация продольного сжатия $\varepsilon(x, t)$, поэтому для краевых задач (1), (2) и (1), (3) находим соответственно

$$\varepsilon^{(1)}(x, t) = -\frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = \frac{2\varepsilon_0}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{v_k} \sin(v_k x) (1 - \cos(cv_k t)), \quad v_k = \frac{(2k-1)\pi}{L}, \quad (5)$$

$$\varepsilon^{(2)}(x, t) = -\frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = \frac{\varepsilon_0 ct}{L} + \frac{2\varepsilon_0}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\hat{v}_k} \cos(\hat{v}_k x) \sin(c\hat{v}_k t), \quad \hat{v}_k = \frac{k\pi}{L}. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) получены разложением в ряды Фурье по собственным функциям соответствующих краевых задач. Функции $\varepsilon^{(1)}(x, t)$ и $\varepsilon^{(2)}(x, t)$ кусочно-постоянны, причем при фиксированном x функция $\varepsilon^{(1)}(x, t)$ периодична по t с периодом $T = 4L/c$, а функция $\varepsilon^{(2)}(x, t)$ возрастает (рис. 2). На рисунке показаны функции $\varepsilon^{(k)}(x, t)$ при $x = L/2$.

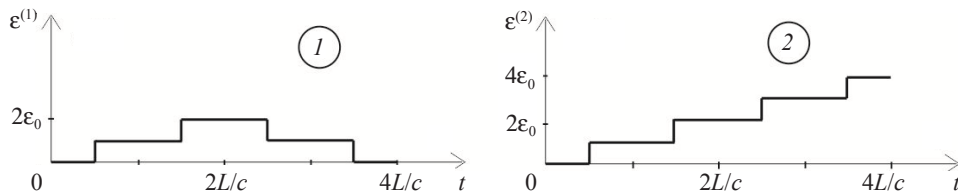


Рис. 2

При $0 \leq t \leq 2L/c$ имеет место равенство $\varepsilon^{(1)}(x, t) = \varepsilon^{(2)}(x, t)$, для проверки которого представляем решение в виде суммы бегущих волн $u(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$ и учитываем, что при отражении волны от закрепленного конца знак функции $u(x, t)$

не меняется, а при отражении от свободного конца знак меняется на противоположный.

2. Поперечные деформации и колебания. Решения Эйлера и Лаврентьева – Ишлинского

Малые поперечные колебания сжатого шарнирно опертого стержня по модели Бернулли – Эйлера описываются уравнением

$$r^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\varepsilon(x, t) \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0, \quad w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, L), \quad (7)$$

где r – радиус инерции поперечного сечения стержня ($r^2 = J/S$, J – момент инерции).

Статическая задача бифуркации равновесия первоначально сжатого постоянной силой ($\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0 = \text{const}$) стержня с закрепленными концами (при условии (4)) была решена Л. Эйлером [6]. Форме потери устойчивости с m полуволнами $w(x) = w_0 \sin(m\pi x/L)$ соответствует деформация сжатия

$$\varepsilon_m = \mu^2 m^2 \pi^2, \quad \mu = \frac{r}{L} \ll 1. \quad (8)$$

При $m = 1$ получаем классическую эйлерову критическую нагрузку $\varepsilon_{cr} = \mu^2 \pi^2$.

При достаточно большом значении начальной деформации сжатия ε_0 возможна одновременная потеря устойчивости по нескольким первым формам, точнее, при $m \leq m_0 = \left[\sqrt{\varepsilon_0 / (\mu\pi)^2} \right]$, где через $[z]$ обозначена целая часть числа z .

В работе [7] авторы обратили внимание на то, что при $m_0 > 1$ скорость роста амплитуды при потере устойчивости максимальна для одной из старших форм потери устойчивости ($m \approx m_0 / \sqrt{2}$). Действительно, при $\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0 = \text{const}$, $m \leq m_0$ решение уравнения (7) имеет вид

$$w(x, t) = w_0 \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) e^{c\alpha_m t}, \quad \alpha_m = \sqrt{\varepsilon_0 m^2 \pi^2 - \mu^2 m^4 \pi^4}. \quad (9)$$

При этих m будем характеризовать интенсивность роста амплитуды m -й формы потери устойчивости параметром α_m . На рис. 3 для $\mu = 0,002$ показаны графики функций $\alpha_m(\varepsilon_0)$ для $m = 1, 2, \dots, 8$.

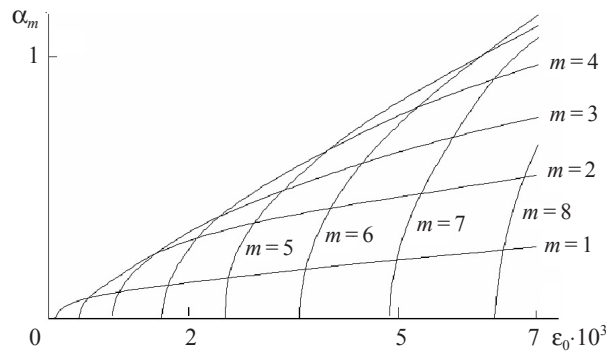


Рис. 3

С ростом деформации сжатия ε_0 растет как максимальная интенсивность роста амплитуды, так и номер соответствующей формы.

Сказанное здесь справедливо лишь при малых прогибах. Обсудим дальнейшее изменение формы стержня.

3. Эластики Эйлера. Эволюция формы стержня с ростом времени

Равновесные формы, которые после потери устойчивости принимает стержень, сжатый продольными силами, были найдены Эйлером. В предположении о нерастяжимости стержня эти формы удовлетворяют краевой задаче:

$$EJ \frac{d^2 \varphi}{ds^2} + Py = 0, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi, \quad 0 \leq s \leq L, \quad (10)$$

$$y(0) = x(L_0) = y(L_0) = 0, \quad \left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{s=0} = \left. \frac{d\varphi}{ds} \right|_{s=L} = 0.$$

Здесь s – длина дуги на оси стержня, $x(s)$, $y(s)$, $\varphi(s)$ – декартовы координаты точки на оси стержня и угол наклона оси, E – модуль Юнга, J – момент инерции сечения.

Введем безразмерные переменные (со звездочкой)

$$\{x^*, y^*, s^*\} = \frac{\pi}{L} \{x, y, s\}, \quad p^* = \frac{L_0^2}{EJ\pi^2} P. \quad (11)$$

Опуская звездочки, перепишем уравнения (10):

$$\frac{d^2 \varphi}{ds^2} + p y = 0, \quad \frac{dx}{ds} = \cos \varphi, \quad \frac{dy}{ds} = \sin \varphi, \quad 0 \leq s \leq \pi. \quad (12)$$

При $p \leq 1$ система (12) имеет только нулевое решение. Устойчивые ненулевые решения (эластики Эйлера) для ряда значений $p > 1$ показаны на рис. 4 (при $p_1 = 1,02$; $p_2 = 1,1$; $p_3 = 1,5$; $p_4 = 2,184$; $p_5 = 3$; $p_6 = 10$). С ростом p подвижный конец стержня приближается к неподвижному концу, а при $p = p_4 = 2,184$ совпадает с ним. При $p > p_4$ образуется петля.

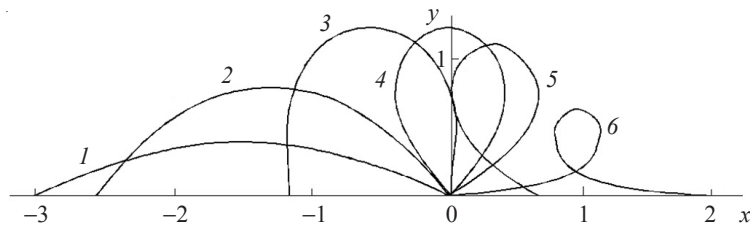


Рис. 4

Возможны и другие эластики Эйлера, например вида $y(s) = y_0 \sin ms$, $m > 1$ при $y_0 \ll 1$. Однако они неустойчивы, ибо необходимым условием устойчивости является отсутствие точек перегиба у кривой $y(x)$.

Рассмотрим теперь нелинейную динамическую задачу для растяжимого стержня и для ее приближенного решения используем дискретную аппроксимацию. Стержень заменяем системой из $n + 1$ материальных точек с равными массами M . В недеформированном состоянии расстояния между соседними точками равны $L_0 = L/n$. Точки расположены в одной плоскости и имеют декартовы координаты $x_i(t)$, $y_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n + 1$. Кинетическая и потенциальная энергии системы аппроксимируются выражениями

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n M(\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2), \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n C\varepsilon_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=2}^n D\kappa_i^2, \quad (13)$$

где

$$\varepsilon_i = \frac{r_i}{L_0} - 1, \quad r_i = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}, \quad \kappa_i = \varphi_i - \varphi_{i-1}, \quad \operatorname{tg} \varphi_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}. \quad (14)$$

Здесь ε_i – деформации растяжения, r_i – расстояния между соседними точками, φ_i – углы наклона отрезков, соединяющих соседние точки. Константы C, D, M связаны с параметрами однородного сплошного стержня соотношениями $C = ESL_0$, $D = EJ/L_0$, $M = \rho SL_0$.

Варьирование функционала Гамильтона $\int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi) dt$ по x_i, y_i приводит к уравнениям движения

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 &= P + \frac{C}{L_0} \varepsilon_1 \cos \varphi_1 + D \frac{\sin \varphi_1}{r_1} \kappa_2 - v\dot{x}_1, \quad y_1(t) \equiv 0, \\ M\ddot{x}_i &= \frac{C}{L_0} (\varepsilon_i \cos \varphi_i - \varepsilon_{i-1} \cos \varphi_{i-1}) + D \left(\frac{\sin \varphi_i}{r_i} (\kappa_{i+1} - \kappa_i) - \frac{\sin \varphi_{i-1}}{r_{i-1}} (\kappa_i - \kappa_{i-1}) \right) - v\dot{x}_i, \\ M\ddot{y}_i &= \frac{C}{L_0} (\varepsilon_i \sin \varphi_i - \varepsilon_{i-1} \sin \varphi_{i-1}) - D \left(\frac{\cos \varphi_i}{r_i} (\kappa_{i+1} - \kappa_i) - \frac{\cos \varphi_{i-1}}{r_{i-1}} (\kappa_i - \kappa_{i-1}) \right) - v\dot{y}_i, \\ & i = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (15)$$

Уравнения (15) описывают движение системы с $2n - 1$ степенями свободы. В них дополнительно введены слагаемые, учитывающие силы сопротивления, пропорциональные скорости точек.

Рассмотрим начальные условия (вариант 1 на рис. 1), соответствующие постановке Лаврентьева – Ишлинского, при которой стержень равномерно сжат силой $P = ES\varepsilon_0$ и неподвижен:

$$x_i(0) = -L_0(1 - \varepsilon_0)(n - i + 1), \quad i = 1, 2, \dots, n + 1; \quad \varepsilon_0 = \frac{EJ\pi^2}{ESL^2} p, \quad (16)$$

где ε_0 – начальная деформация сжатия. Для возбуждения поперечных колебаний примем $y_2(0) = \delta$. Остальные начальные условия нулевые.

Возьмем $n = 40$, $EJ/ES = 0,001$, $L = \pi$, $M = 1$, $v = 0,1$, $\delta = 0,01$ и рассмотрим три значения сжимающей силы $p_1 = 1,5$; $p_2 = 10$; $p_3 = 20$.

На рис. 5(1–3) в последовательные моменты времени представлены результаты численного интегрирования системы (15). При $p_1 = 1,5$ возможна потеря устойчивости только по первой форме ($m = 1$). Амплитуда растет и в пределе совпадает с эластикой Эйлера 3 на рис. 4. При $p_2 = 10$ возможна потеря устойчивости по трем первым формам ($m = 1, 2, 3$), коэффициенты роста $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = 4,9$, $\alpha_3 = 3$. Виден преимущественный рост прогиба по форме $m = 2$. Точно так же при $p_3 = 20$ возможна потеря устойчивости по четырем формам при $\alpha_1 = 4,36$, $\alpha_2 = 8$, $\alpha_3 = 9,95$, $\alpha_4 = 8$ и наблюдается рост амплитуды при $m = 3$. При дальнейшем росте времени в случаях $p_2 = 10$ и $p_3 = 20$ происходит искажение картины деформирования. Подвижная точка приближается к неподвижной, а затем проходит ее с образованием петли (см. рис. 4).

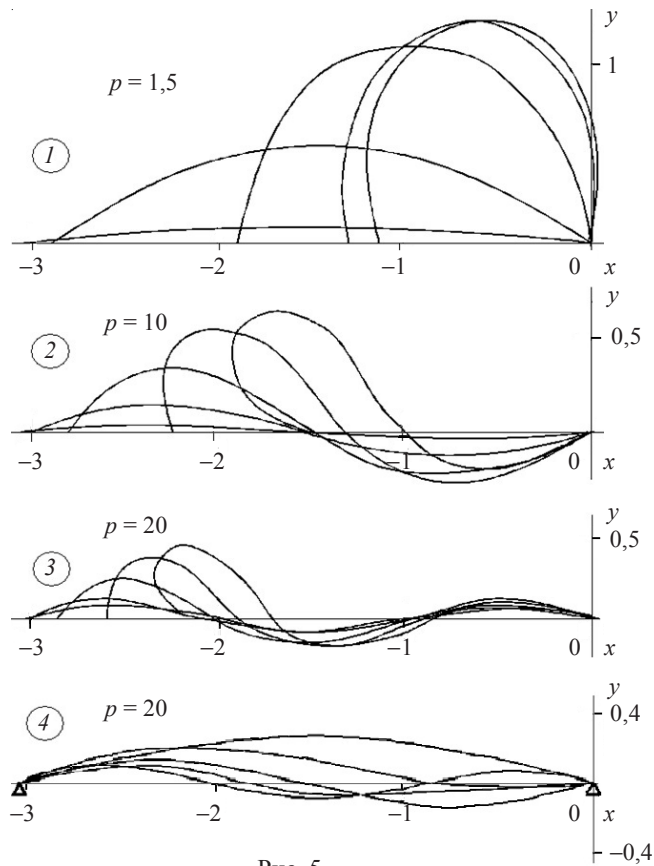


Рис. 5

Рассмотрим другой вариант граничных условий (вариант 3 на рис. 1), при котором в начальный момент времени стержень сжат в соответствии с условиями (16), однако и подвижная точка остается неподвижной (система имеет $2n - 2$ степеней свободы, первое уравнение (15) отбрасывается). Результаты расчетов в этом случае при $p_3 = 20$ представлены на рис. 5(4). Сначала, как и на рис. 5(1-3), происходит потеря устойчивости по третьей форме, а затем наблюдается переход во вторую и в первую форму. Окончательно балка принимает форму устойчивой арки. Заметим, что в конечном положении усилие сжатия уменьшилось в 20 раз по сравнению с начальным значением.

Заключение

Исследована динамическая потеря устойчивости тонкого стержня при постоянно действующей продольной нагрузке. Если приложена статическая нагрузка, существенно превышающая критическую эйлерову нагрузку, то на начальном этапе движения наибольшую скорость роста амплитуды имеет одна из старших форм потери устойчивости. Этот результат получается при линейной постановке задачи. С ростом поперечного прогиба следует обратиться к геометрически нелинейной постановке. С течением времени форма упругой линии переходит в одну из эластик Эйлера. При этом конечная форма линии существенно зависит от способа нагружения.

Список литературы

1. Болотин В.В. Поперечные колебания и критические скорости. М.: Изд. АН СССР. Т. 1. 1951; Т. 2. 1953.
2. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Динамика стержня при продольном ударе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2009. №2. С. 105–111.
3. Беляев А.К., Ильин Д.Н., Морозов Н.Ф. Динамический подход к задаче Ишлинского – Лаврентьева // Изв. РАН. МТТ. 2013. №5. С. 28–33.
4. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Динамика стержня при кратковременном продольном ударе // Вестник СПбГУ. Сер. 1. 2013. №3. С. 131–141.
5. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. Поперечные колебания стержня, вызванные продольным ударом // Докл. РАН. 2013. Т. 452, №1. С. 37–41.
6. Эйлер Л. Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума, или решение изопериметрической задачи, взятой в самом широком смысле. М.: Гостехиздат, 1934. 600 с.
7. Лаврентьев М.А., Ишлинский А.Ю. Динамические формы потери устойчивости упругих систем // ДАН СССР. 1949. Т. 64, №6. С. 779–782.
8. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е., Товстик Т.П. Еще раз о задаче Ишлинского – Лаврентьева // Докл. РАН. 2014. Т. 455, №4. С. 412–415.
9. Вольмир А.С. Устойчивость сжатых стержней при динамическом нагружении // Строительная механика и расчет сооружений. 1960. №1. С. 6–9.
10. Морозов Н.Ф., Товстик П.Е. О динамической потере устойчивости стержня при нагрузке, меньшей эйлеровой // Докл. РАН. 2013. Т. 453, №3. С. 282–285.

References

1. Bolotin V.V. Poperechnye kolebaniya i kriticheskie skorosti. M.: Izd. AN SSSR. T. 1. 1951; T. 2. 1953.
2. Morozov N.F., Tovstik P.E. Dinamika sterzhnya pri prodol'nom udare // Vestnik SPbGU. Ser. 1. 2009. №2. S. 105–111.
3. Belyaev A.K., Il'in D.N., Morozov N.F. Dinamicheskii podkhod k zadache Ishlinskogo – Lavrent'yeva // Izv. RAN. MTT. 2013. №5. S. 28–33.
4. Morozov N.F., Tovstik P.E. Dinamika sterzhnya pri kratkovremennom prodol'nom udare // Vestnik SPbGU. Ser. 1. 2013. №3. S. 131–141.
5. Morozov N.F., Tovstik P.E. Transverse rod vibrations under a short-term longitudinal impact // Doklady Physics. 2013. 58(9), 387–391.
6. Leonhardo Eulero. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausannae & Genevae. MDCCXLIV. 1744.
7. Lavrent'yev M.A., Ishlinskiy A. Yu. Dinamicheskie formy poteri ustoychivosti uprugikh sistem // DAN SSSR. 1949. T. 64, №6. S. 779.
8. Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P. Again on the Ishlinskii – Lavrentyev Problem // Doklady Physics. 2014. Vol. 59. 4. P. 189–192.
9. Vol'mir A.S. Ustoychivost' szhatykh sterzhney pri dinamicheskom nagruzhenii // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. 1960. №1. S. 6–9.
10. Morozov N.F., Tovstik P.E. On the rod dynamic stability loss under the load less than the Eulerian one // Doklady Physics. 2013. Vol. 453. 3. P. 282–285.

STABILITY OF A ROD UNDER THE LONG-TERM AXIAL COMPRESSION

Morozov N.F., Tovstik P.E., Tovstik T.P.

The analysis of the classical problem of the lateral stability of a rod under action of the long-term axial compression is carried out. The transverse motion of rod significantly depends on the way of the load application. L. Euler solved two static maximum tasks: in the linear approximation the critical load and the possible forms of stability loss are found, and at the nonlinear approach all

possible equilibrium forms are found (Euler's elastics). In the work by M.A. Lavrent'ev and A. Yu. Ishlinsky, taking into account the transverse inertial forces, it is examined the case of load, sufficiently exceeding the Euler one. It is established that the one of the forms with the large number of waves has the maximum rate of growth. In this paper basing by the nonlinear dynamic model it is shown that at the initial moments of loading the form predicted by M.A. Lavrent'ev and A. Yu. Ishlinsky appears, and then it passes into the steady Euler's elastic. In this case the final form depends on the method of the rod ends support.

Keywords: rod, dynamic stability, longitudinal waves, lateral vibrations, parametric resonance, beating, Euler's elastics.