

УДК 539.3

## НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ ЛИНЕЙНО-ВЯЗКОУПРУГИХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ\*

© 2015 г.

Нетребко А.В., Пшеничнов С.Г.

*НИИ механики Московского государственного университета  
им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

alexnetrebko@rambler.ru, serp56@yandex.ru

*Поступила в редакцию 03.12.2014*

В рамках теории Тимошенко рассмотрена нестационарная динамическая задача для линейно-вязкоупругой круговой цилиндрической оболочки конечной длины при осевой симметрии. Для ее исследования применено интегральное преобразование Лапласа по времени. Приведены результаты расчетов при различных видах динамического нагружения одного из торцов оболочки.

*Ключевые слова:* динамика цилиндрических оболочек, вязкоупругие волны, преобразование Лапласа, ядра релаксации.

Вопросы, связанные с изучением нестационарных волновых процессов в линейно-вязкоупругих оболочках, весьма актуальны, однако известные результаты в этой области, частично отраженные, например, в работах [1–5], не являются исчерпывающими. Цель настоящей работы, посвященной исследованию нестационарной динамики вязкоупругой цилиндрической оболочки конечной длины методом интегрального преобразования Лапласа, – установить свойства решения в изображениях и распространить эффективную методику вычисления оригиналов для упругой оболочки [6] на случай оболочки из линейно-вязкоупругого материала.

### Постановка задачи

Рассмотрим нестационарную динамическую задачу для линейно-вязкоупругой круговой цилиндрической оболочки конечной длины в рамках теории Тимошенко в геометрически линейной постановке при осевой симметрии и отсутствии внешней нагрузки на боковую поверхность. Запишем уравнения динамики:

$$\begin{aligned} \hat{D}_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \hat{D}_2 \frac{\partial w}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ k^2 \hat{G} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \hat{D}_2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \hat{D}_1 w &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \hat{D}_1 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{12k^2}{h^2} \hat{G} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right) &= \rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (1)$$

\* Выполнено при финансовой поддержке Программой господдержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-2029.2014.8).

с граничными условиями на торцах  $x = 0$  и  $x = L$  в обобщенном виде (по  $k$  суммирование)

$$a_{ik}V_k(0,t) = p_i(t), \quad b_{ik}V_k(L,t) = q_i(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad t > 0 \quad (2)$$

и начальными условиями, которые будем считать нулевыми:

$$\begin{aligned} u(x,0) = 0, \quad w(x,0) = 0, \quad \psi(x,0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь обозначено:  $x, t$  – осевая координата и время;  $R, h, L$  – радиус срединной поверхности, толщина и длина оболочки;  $u(x, t)$  – продольное перемещение;  $w(x, t)$  – прогиб в направлении внутренней нормали к срединной поверхности;  $\psi(x, t)$  – угол поворота нормали;  $\rho$  – плотность;  $k^2$  – поправочный коэффициент [7]. В выражениях (2) функции  $V_k(x, t)$  – компоненты вектора  $\mathbf{V} = \{u, w, \psi, N_x, M_x, Q_x\}$ , где  $N_x, M_x, Q_x$  – нормальное осевое усилие в срединной поверхности, момент и перерезывающая сила, которые вместе с нормальным окружным усилием  $N_y$  выражаются формулами

$$\begin{aligned} N_x = h \left( \hat{D}_1 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R} \hat{D}_2 w \right), \quad N_y = h \left( -\frac{1}{R} \hat{D}_1 w + \hat{D}_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right), \\ M_x = \frac{h^3}{12} \hat{D}_1 \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad Q_x = k^2 h \hat{G} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \psi \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Константы  $a_{ik}, b_{ik}$  задаются в соответствии с типом граничных условий;  $p_i(t), q_i(t)$  – известные функции. Операторы  $\hat{D}_1$  и  $\hat{D}_2$  имеют вид

$$\hat{D}_1 = \hat{D}_2 + 2\hat{G}, \quad \hat{D}_2 = \hat{L}(1 - (\hat{L} + 2\hat{G})^{-1}\hat{L}), \quad \hat{L} = \hat{B} - \frac{2}{3}\hat{G},$$

$$\hat{G} = G_0(1 - \hat{T}_s), \quad \hat{B} = B_0(1 - \hat{T}_v),$$

где  $(\hat{L} + 2\hat{G})^{-1}$  – оператор, обратный к  $(\hat{L} + 2\hat{G})$ ;

$$\hat{T}_s \xi(t) = \int_0^t T_s(t - \tau) \xi(\tau) d\tau, \quad \hat{T}_v \xi(t) = \int_0^t T_v(t - \tau) \xi(\tau) d\tau, \quad (5)$$

$G_0, B_0$  – мгновенные значения модулей сдвига и объемного сжатия;  $T_v(t), T_s(t)$  – ядра объемной и сдвиговой релаксации материала.

### Задача в пространстве изображений

Рассмотрим задачу (1)–(5) в изображениях по Лапласу, отметив звездочкой трансформанты соответствующих функций ( $s$  – параметр преобразования). Она включает в себя систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^*}{dx^2} - \frac{N(s)}{R} \frac{dw^*}{dx} = \frac{s^2}{C_p^2(s)} u^*, \quad C_p(s) = \sqrt{\frac{E(s)}{\rho(1 - N^2(s))}}, \\ k^2 \frac{1 - N(s)}{2} \left( \frac{d^2 w^*}{dx^2} + \frac{d\psi^*}{dx} \right) + \frac{N(s)}{R} \frac{du^*}{dx} - \frac{w^*}{R^2} = \frac{s^2}{C_p^2(s)} w^*, \end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \Psi^*}{dx^2} - 12k^2 \frac{1-N(s)}{2} \frac{1}{h^2} \left( \frac{dw^*}{dx} + \Psi^* \right) = \frac{s^2}{C_p^2(s)} \Psi^* \quad (6)$$

и граничные условия ( $V_k^*(x, s)$  – компоненты  $\mathbf{V}^* = \{u^*, w^*, \Psi^*, N_x^*, M_x^*, Q_x^*\}$ )

$$a_{ik} V_k^*(0, s) = p_i^*(s), \quad b_{ik} V_k^*(L, s) = q_i^*(s), \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (7)$$

При этом

$$\begin{aligned} N_x^* &= \frac{E(s)h}{1-N^2(s)} \left( \frac{du^*}{dx} - \frac{N(s)}{R} w^* \right), \quad N_y^* = \frac{E(s)h}{1-N^2(s)} \left( N(s) \frac{du^*}{dx} - \frac{1}{R} w^* \right), \\ M_x^* &= \frac{E(s)h^3}{12(1-N^2(s))} \frac{d\Psi^*}{dx}, \quad Q_x^* = k^2 \frac{E(s)h}{2(1+N^2(s))} \left( \frac{dw^*}{dx} + \Psi^* \right), \end{aligned} \quad (8)$$

функции  $E(s)$  и  $N(s)$  имеют вид

$$\begin{aligned} E(s) &= \frac{9G^* B^*}{3B^* + G^*}, \quad N(s) = \frac{3B^* - 2G^*}{2(3B^* + G^*)}, \\ G^*(s) &= G_0(1 - T_s^*(s)), \quad B^*(s) = B_0(1 - T_v^*(s)). \end{aligned} \quad (9)$$

Общее решение системы (6) может быть представлено в форме

$$\begin{aligned} u^*(x, s) &= \sum_{n=1}^6 A_n \exp(\lambda_n x), \quad w^*(x, s) = \frac{R}{N} \sum_{n=1}^6 \left( \lambda_n^2 - \frac{s^2}{C_p^2} \right) \frac{1}{\lambda_n} A_n \exp(\lambda_n x), \\ \Psi^*(x, s) &= 12k^2 \frac{1-N}{2} \frac{R}{Nh^2} \sum_{n=1}^6 \left( \lambda_n^2 - \frac{s^2}{C_p^2} \right) \left( \lambda_n^2 - \frac{s^2}{C_p^2} - 12k^2 \frac{1-N}{2h^2} \right)^{-1} A_n \exp(\lambda_n x), \end{aligned} \quad (10)$$

где  $\lambda_1(s), \lambda_2(s), \dots, \lambda_6(s)$  – корни бикубического относительно  $\lambda$  уравнения, коэффициенты которого выражаются через  $N(s), C_p(s), k^2, R, h$  (оно не приведено), а функции  $A_n(s), n = 1, 2, \dots, 6$ , определяются из шести граничных условий (7).

Не используя явный вид выражений  $\lambda_n(s)$  и  $A_n(s)$ , установим свойства решения в изображениях (10), для чего наряду с задачей (1)–(5) рассмотрим задачу о свободных колебаниях той же самой линейно-вязкоупругой оболочки.

### Задача о свободных колебаниях

Пусть оболочка совершает свободные колебания спустя такое время после их начала, когда характер колебаний уже не зависит от способа их возбуждения. Тогда в интегралах (5) нижний предел интегрирования можно взять равным  $-\infty$  [8], и процесс колебаний опишется системой

$$\begin{aligned} \check{D}_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{R} \check{D}_2 \frac{\partial w}{\partial x} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ k^2 \check{G} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{1}{R} \check{D}_2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R^2} \check{D}_1 w &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \\ \check{D}_1 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{12k^2}{h^2} \check{G} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \Psi \right) &= \rho \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (11)$$

с однородными граничными условиями на торцах  $x = 0$  и  $x = L$ :

$$a_{ik}V_k(0,t) = 0, \quad b_{ik}V_k(L,t) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, 6. \quad (12)$$

При этом  $N_x, M_x, Q_x$  (а также  $N_y$ ) выражаются через  $u, w, \psi$  по формулам, которые получаются из соотношений (4), если там всюду заменить операторы  $\hat{D}_1, \hat{D}_2, \hat{G}$  соответственно на  $\check{D}_1, \check{D}_2, \check{G}$ , где

$$\begin{aligned} \check{D}_1 &= \check{D}_2 + 2\check{G}, \quad \check{D}_2 = \check{L}(1 - (\check{L} + 2\check{G})^{-1}\check{L}), \quad \check{L} = \check{B} - \frac{2}{3}\check{G}, \\ \check{G} &= G_0(1 - \check{T}_s), \quad \check{B} = B_0(1 - \check{T}_s), \\ \check{T}_j \xi(t) &= \int_{-\infty}^t T_j(t-\tau)\xi(\tau)d\tau = \int_0^{+\infty} T_j(\vartheta)\xi(t-\vartheta)d\vartheta, \quad j = v, s. \end{aligned} \quad (13)$$

Представив нетривиальное решение задачи (11)–(13) в виде

$$u(x,t) = \tilde{u}(x,s)e^{st}, \quad w(x,t) = \tilde{w}(x,s)e^{st}, \quad \psi(x,t) = \tilde{\psi}(x,s)e^{st}, \quad s \in C,$$

получим спектральную задачу, включающую в себя систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} - \frac{N(s)}{R} \frac{d \tilde{w}}{dx} &= \frac{s^2}{C_p^2(s)} \tilde{u}, \quad C_p(s) = \sqrt{\frac{E(s)}{\rho(1-N^2(s))}}, \\ k^2 \frac{1-N(s)}{2} \left( \frac{d^2 \tilde{w}}{dx^2} + \frac{d \tilde{\psi}}{dx} \right) &+ \frac{N(s)}{R} \frac{d \tilde{u}}{dx} - \frac{\tilde{w}}{R^2} = \frac{s^2}{C_p^2(s)} \tilde{w}, \\ \frac{d^2 \tilde{\psi}}{dx^2} - 12k^2 \frac{1-N(s)}{2} \frac{1}{h^2} \left( \frac{d \tilde{w}}{dx} + \tilde{\psi} \right) &= \frac{s^2}{C_p^2(s)} \tilde{\psi} \end{aligned} \quad (14)$$

и граничные условия

$$a_{ik}\tilde{V}_k(0,s) = 0, \quad b_{ik}\tilde{V}_k(L,s) = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, 6, \quad (15)$$

где  $\tilde{V}_k(x,s)$  – компоненты  $\tilde{\mathbf{V}} = \{\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{\psi}, \tilde{N}_x, \tilde{M}_x, \tilde{Q}_x\}$ , причем  $\tilde{N}_x, \tilde{M}_x, \tilde{Q}_x$  выражаются через  $\tilde{u}, \tilde{w}, \tilde{\psi}$  так же, как  $N_x^*, M_x^*, Q_x^*$  через  $u^*, w^*, \psi^*$  по формулам (8);  $E(s), N(s)$  определяются равенствами (9), но теперь  $s$  – собственное значение задачи (14), (15), которое определяет частоту и декремент затухания свободных колебаний оболочки.

### О свойствах решения в изображениях

Пусть  $E_s$  – множество собственных значений задачи (14), (15), являющееся для оболочки конечной длины счетным,  $E_{br}$  – объединение множеств точек ветвления функций  $T_v^*(s), T_s^*(s), p_i^*(s), q_i^*(s)$ .

**Утверждение 1.** Пусть множество  $E_{br}$  конечно. Тогда при любом  $x \in [0; L]$  точками ветвления функций  $u^*(x,s), w^*(x,s), \psi^*(x,s)$ , представляющих собой решение задачи в изображениях (6)–(9), могут быть только элементы  $E_{br}$ .

Доказательство можно провести, используя формулы (10) с учетом выражений для  $\lambda_n$  и  $A_n$ , что весьма трудоемко. Однако это можно сделать иначе, основываясь на счетности множества  $E_s$ , аналогично доказательству подобного утверждения [9], относящегося к классической постановке нестационарной динамической задачи линейной вязкоупругости в случае конечной области распространения возмущений.

**Следствие.** Если  $E_{br}$  пусто, то функции  $u^*$ ,  $w^*$ ,  $\psi^*$  не имеют точек ветвления.

**Утверждение 2.** Пусть  $s_\lambda \neq 0$  является полюсом функций  $u^*(x, s)$ ,  $w^*(x, s)$ ,  $\psi^*(x, s)$  и их первой и второй производных по  $x$  для всех  $x \in [0; L]$  и при этом не является особой точкой  $T_v^*(s)$ ,  $T_s^*(s)$ ,  $p_i^*(s)$ ,  $q_i^*(s)$ . Тогда  $s_\lambda \in E_s$ .

Доказательство аналогично доказательству сходного утверждения в рамках классической постановки нестационарной динамической задачи линейной вязкоупругости в случае конечной области распространения возмущений [9].

**Следствие.** Если для  $s_\lambda \neq 0$  выполнены условия утверждения 2 и при этом хотя бы одно из ядер  $T_v(t)$ ,  $T_s(t)$  не нулевое, то  $\text{Re}(s_\lambda) < 0$ .

Множества полюсов функций  $u^*(x, s)$ ,  $w^*(x, s)$ ,  $\psi^*(x, s)$  могут иметь конечные предельные точки, соответствующие корням уравнений  $1 - T_v^*(s) = 0$ ,  $1 - T_s^*(s) = 0$ , но можно доказать, что правее мнимой оси их нет; а на мнимой оси таким корнем может быть лишь  $s = 0$  и только при неограниченной ползучести материала.

Рассмотрим связь исходной задачи (1)–(5) со статической задачей для линейно-упругой оболочки. Пусть хотя бы одно из ядер  $T_v(t)$ ,  $T_s(t)$  не нулевое, ползучесть материала ограничена, граничные условия (2) исключают перемещения оболочки как жесткого целого, а внешнее воздействие таково, что существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_{0i}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = q_{0i}.$$

Тогда существуют пределы

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = u_0(x), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w(x, t) = w_0(x), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \psi(x, t) = \psi_0(x)$$

и, значит, верны равенства

$$\lim_{s \rightarrow 0} s p_i^*(s) = p_{0i}, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s q_i^*(s) = q_{0i}, \quad \lim_{s \rightarrow 0} s u^*(x, s) = u_0(x),$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} s w^*(x, s) = w_0(x), \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \psi^*(x, s) = \psi_0(x).$$

Умножая уравнения (6) и граничные условия (7) в изображениях на  $s$  и устремляя  $s$  к нулю, обнаружим, что  $u_0$ ,  $w_0$ ,  $\psi_0$  есть решение задачи статики, включающей в себя уравнения для соответствующей упругой оболочки с длительными модулями  $G_\infty = G^*(0)$ ,  $B_\infty = B^*(0)$  (уравнения здесь не приводятся) и граничные условия

$$a_{ik} V_k^{(0)}(0) = p_{0i}, \quad b_{ik} V_k^{(0)}(L) = q_{0i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \dots, 6,$$

где  $V_k^{(0)}(x)$  – компоненты вектора  $\mathbf{V}^{(0)} = \{u_0, w_0, \psi_0, N_{0x}, M_{0x}, Q_{0x}\}$ . При этом

$$N_{0x}(x) = \frac{E_\infty h}{1 - \nu_\infty^2} \left( \frac{du_0(x)}{dx} - \frac{\nu_\infty}{R} w_0(x) \right), \quad M_{0x}(x) = \frac{E_\infty h^3}{12(1 - \nu_\infty^2)} \frac{d\psi_0(x)}{dx},$$

$$Q_{0x}(x) = k^2 \frac{E_\infty h}{2(1 + \nu_\infty)} \left( \frac{dw_0(x)}{dx} + \psi_0(x) \right), \quad E_\infty = \frac{9G_\infty B_\infty}{3B_\infty + G_\infty}, \quad \nu_\infty = \frac{3B_\infty - 2G_\infty}{2(3B_\infty + G_\infty)}.$$

### Форма представления оригиналов и результаты расчетов

Будем считать, что  $T_v^*$ ,  $T_s^*$  не имеют особенностей при  $\text{Re}(s) > 0$  (что физически обоснованно). При отсутствии жесткого смещения, ограниченной ползучести материала и существовании пределов  $\lim_{t \rightarrow \infty} p_i(t) = p_{0i}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_i(t) = q_{0i}$  решение в оригиналах можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ w(x,t) \\ \psi(x,t) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u_0(x) \\ w_0(x) \\ \psi_0(x) \end{pmatrix} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[ \begin{pmatrix} u^*(x, i\omega) \\ w^*(x, i\omega) \\ \psi^*(x, i\omega) \end{pmatrix} e^{i\omega t} \right] d\omega, \quad t > 0, \quad (16)$$

причем у подынтегральных выражений при  $\omega \rightarrow 0$  особенностей нет. Используя формулы (16) для случая  $p(t) = p_0 H(t)$ ,  $q(t) = q_0 H(t)$  ( $H(t)$  – функция Хевисайда), можно строить решения и тогда, когда  $p_i(t)$ ,  $q_i(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  предела не имеют.

Из установленных выше свойств изображений  $u^*$ ,  $w^*$ ,  $\psi^*$  следует, что наличие линейной вязкоупругости не добавляет им новых особых точек в области  $\operatorname{Re}(s) > 0$  по сравнению со случаем линейной упругости. Таким образом, разработанная для упругой оболочки эффективная методика нахождения оригиналов [6] путем вычисления интеграла Меллина методом Филона применима и для линейно-вязкоупругой оболочки. С помощью именно этой методики были проведены расчеты для случая, когда один торец оболочки жестко заделан, а на другой при  $t > 0$  действует продольная нагрузка  $P(t)$ , т.е. граничные условия (2) принимают вид

$$\begin{aligned} N_x(0,t) &= P(t), \quad w(0,t) = 0, \quad \psi(0,t) = 0, \\ u(L,t) &= 0, \quad w(L,t) = 0, \quad \psi(L,t) = 0 \quad (t > 0). \end{aligned}$$

Приведем отдельные результаты, полученные при условии  $T_v(t) \equiv T_s(t) \equiv T(t)$  и поправочном коэффициенте  $k^2 = 0,87$ . В этом случае  $T_v^*(s) \equiv T_s^*(s) \equiv T^*(s)$ ,  $E(s) = E_0(1 - T^*)$ ,  $N(s) \equiv v_0$ ,  $C_p(s) = c_p \sqrt{1 - T^*}$ ,  $c_p = \sqrt{E_0 / [\rho(1 - v_0^2)]}$ , где  $E_0$ ,  $v_0$  – мгновенные значения модуля Юнга и коэффициента Пуассона материала,  $c_p$  – скорость продольных упругих волн в оболочке. Всюду принято  $h/R = 0,02$ ,  $L/R = 8$ ,  $v_0 = 1/3$ . Введены безразмерные величины  $\bar{t} = t/t_0$ ,  $\bar{x} = x/R$ ,  $\bar{w}(\bar{x}, \bar{t}) = -w(x,t)/R$ ,  $\bar{N}_x(\bar{x}, \bar{t}) = -N_x(x,t)/(\rho c_p^2 h)$ ,  $\bar{P}(\bar{t}) = P(t)/(\rho c_p^2 h)$ ,  $\bar{T}(\bar{t}) = t_0 T(t)$ , где  $t_0 = R/c_p$ , но на рисунках черта над безразмерными величинами  $\bar{t}$ ,  $\bar{x}$ ,  $\bar{N}_x$ ,  $\bar{w}$  опущена. Жирная линия 1 всюду построена при ядре  $\bar{T}(\bar{t}) = 0,15 e^{-0,75\bar{t}}$ , тонкая линия 2 – при  $\bar{T}(\bar{t}) \equiv 0$  (для упругой оболочки). Рисунки 1 и 2 соответствуют случаю  $\bar{P}(\bar{t}) = H(\bar{t})$  – функция Хевисайда. На рис. 1а, б показаны зависимости  $\bar{N}_x$  и  $\bar{w}$  от  $\bar{t}$  при  $\bar{x} = 4$  (середина длины оболочки), а на рис. 2 – зависимость  $\bar{w}$  от  $\bar{x}$  в различные моменты времени  $\bar{t}$ .

Аналогичные результаты при нагрузке  $\bar{P}(\bar{t})$  в виде одиночного прямоугольного импульса с высотой, равной 1, и основанием, равным 2, представлены на рис. 3а, б и 4.

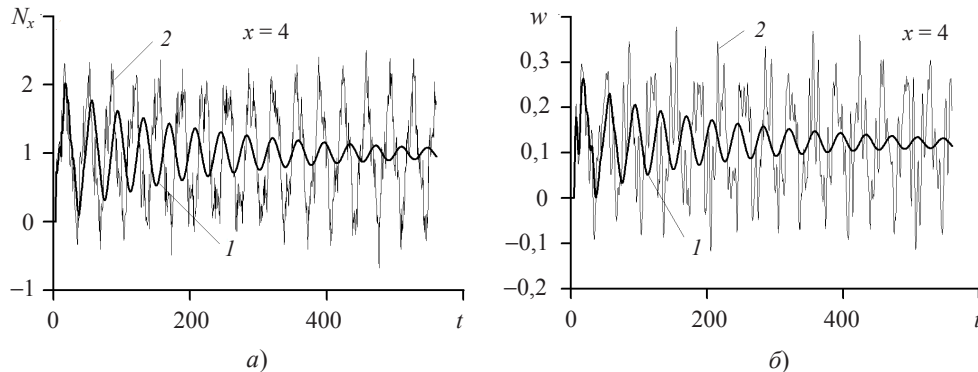


Рис. 1

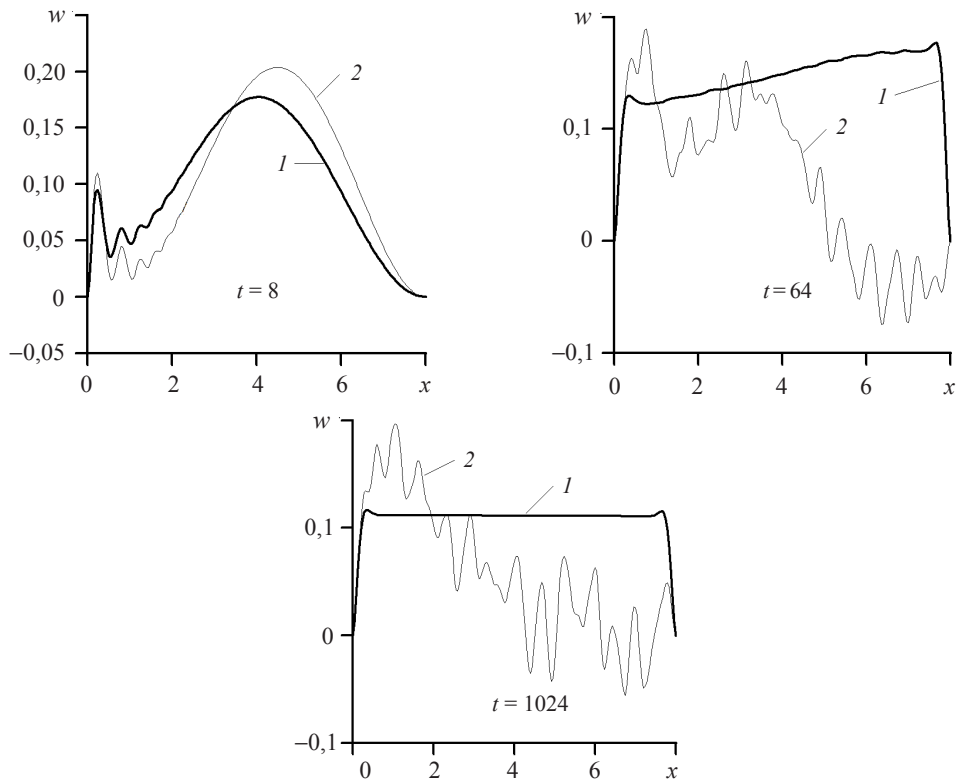


Рис. 2

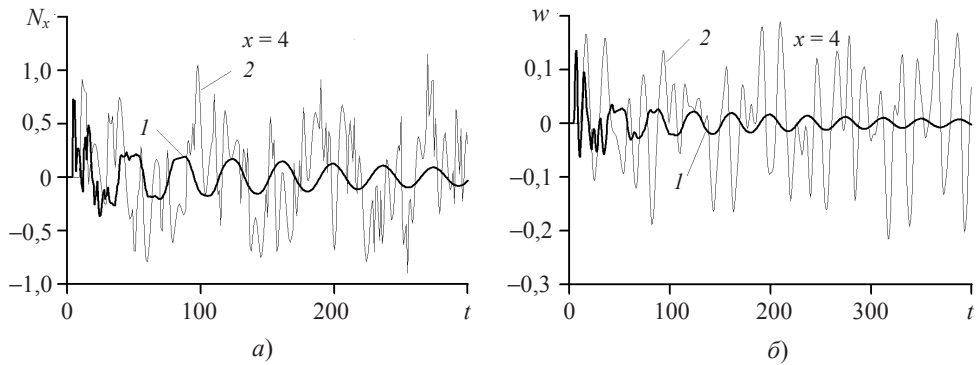


Рис. 3

Для случая нагрузки  $\bar{P}(\bar{t}) = \sin(\Omega\bar{t})$  графики зависимости  $\bar{N}_x$  от  $\bar{t}$  в заделке ( $\bar{x} = 8$ ) при  $\Omega = 1$  и  $\bar{w}$  от  $\bar{t}$  в середине длины оболочки ( $\bar{x} = 4$ ) при  $\Omega = 2$  представлены на рис. 5.

Для линейно-вязкоупругой оболочки в случае  $\bar{P}(\bar{t}) = H(\bar{t})$  затухание волн с течением времени приводит ее состояние к статическому, а при нагрузке в виде импульса – к ненагруженному состоянию. В случае периодической нагрузки наблюдается переход волнового процесса в режим установившихся колебаний. Возможные резонансные эффекты в данной работе не рассматриваются.

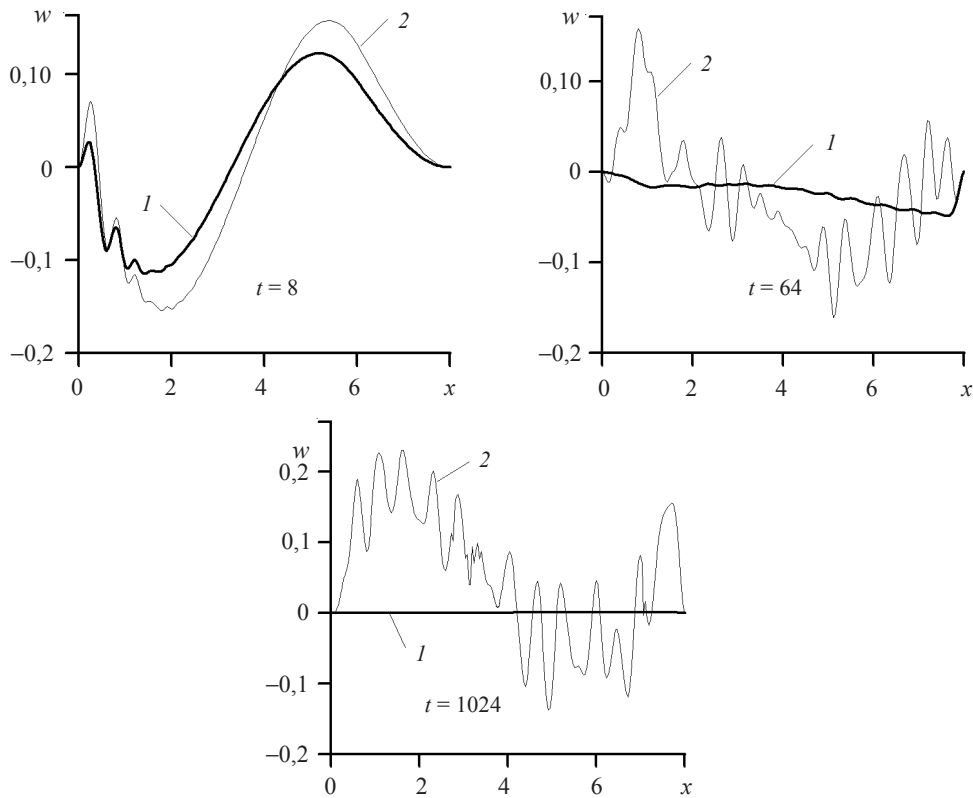


Рис. 4

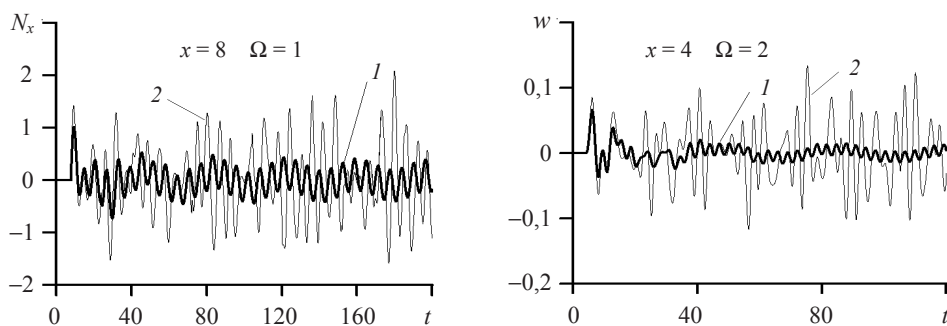


Рис. 5

В заключение отметим, что на основе установленных свойств решения задачи в изображениях методика расчета оригиналов для упругой оболочки конечной длины распространена на случай линейно-вязкоупругой оболочки. Это позволило с высокой точностью проследить волновые процессы от начала до моментов порядка нескольких тысяч времен пробега продольной волной расстояния, равного радиусу оболочки.

#### Список литературы

1. Филиппов И.Г., Кудайназаров К. Уточнение уравнений продольно-радиальных колебаний круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки // Прикл. механика. 1990. Т. 26, №2. С. 63–71.



2. *Кудайназаров К.* Продольный удар по круговой цилиндрической вязкоупругой оболочке // Изв. АН УзССР. Сер. Техн. науки. 1990. №3. С. 31–37.
3. *Егорычев О.А., Поддаева О.И.* Продольный удар по торцу круговой цилиндрической вязкоупругой оболочки // Фундаментальные науки в современном строительстве: Сб. докл. III научно-практич. и учебно-методич. конф. МГСУ. М., 2003. С. 20–24.
4. *Бажанова Н.С., Коссович Л.Ю., Сухоловская М.С.* Нестационарные волны в вязкоупругих оболочках: модель Максвелла // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2000. №2. С. 17–24.
5. *Абросимов Н.А., Куликова Н.А.* Расчетно-экспериментальный метод идентификации вязкоупругих характеристик композитных материалов в динамически нагруженных оболочках вращения // Механика композитных материалов. 2007. Т. 43, № 4. С. 449–464.
6. *Нетребко А.В., Новотный С.В., Созонок Ю.А.* О решении уравнений динамики цилиндрических оболочек методом интегральных преобразований // Изв. РАН. МТТ. 1998. №1. С.147–157.
7. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М.: Наука, 1972. 432 с.
8. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
9. *Пшеничнов С.Г.* Нестационарные динамические задачи линейной вязкоупругости // Изв. РАН. МТТ. 2013. №1. С. 84–96.

#### *References*

1. *Filippov I.G., Kudaynazarov K.* Utochnenie uravneniy prodol'no-radial'nykh kolebaniy krugovoy tsilindricheskoj vyazkoupругoj obolochki // Prikl. mekhanika. 1990. T. 26, №2. S. 63–71.
2. *Kudaynazarov K.* Prodol'nyy udar po krugovoy tsilindricheskoj vyazkoupругoj obolochke // Izv. AN UzSSR. Ser. Tekhn. nauki. 1990. №3. S. 31–37.
3. *Egorychev O.A., Poddaeva O.I.* Prodol'nyy udar po tortsu krugovoy tsilindricheskoj vyazkoupругoj obolochki // Fundamental'nye nauki v sovremennom stroitel'stve: Sb. dokl. III nauchno-praktich. i uchebno-metodich. konf. MGSU. M., 2003. S. 20–24.
4. *Bazhanova N.S., Kossovich L.Yu., Sukholovskaya M.S.* Nestatsionarnye volny v vyazkoupругikh obolochkakh: model' Maksvella // Izv. vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki. 2000. №2. S. 17–24.
5. *Abrosimov N.A., Kulikova N.A.* Raschetno-eksperimental'nyy metod identifikatsii vyazkoupругikh kharakteristik kompozitnykh materialov v dinamicheski nagruzhennykh obolochkakh vrashcheniya // Mekhanika kompozitnykh materialov. 2007. T. 43, № 4. S. 449–464.
6. *Netrebko A.V., Novotnyy S.V., Sozonenko Yu.A.* O reshenii uravneniy dinamiki tsilindricheskikh obolochek metodom integral'nykh preobrazovaniy // Izv. RAN. MTT. 1998. №1. S.147–157.
7. *Vol'mir A.S.* Nelineynaya dinamika plastinok i obolochek. M.: Nauka, 1972. 432 s.
8. *Rabotnov Yu.N.* Mekhanika deformiruemogo tverdogo tela. M.: Nauka, 1988. 712 s.
9. *Pshenichnov S.G.* Nestatsionarnye dinamicheskie zadachi lineynoy vyazkoupругosti // Izv. RAN. MTT. 2013. №1. S. 84–96.

### **SOME DYNAMIC PROBLEMS FOR LINEARLY VISCOELASTIC CYLINDRICAL FINITE LENGTH SHELLS**

**Netrebko A.V., Pshenichnov S.G.**

The axially symmetric nonstationary dynamic problem for linearly visco-elastic circular cylindrical finite length shell is considered within the bounds of Timoshenko theory. Integral Laplace transformation is used for its investigation. The results of calculation for cylindrical shell under the various type dynamic loading of its end are demonstrated.

*Keywords:* dynamics of cylindrical shells, visco-elastic waves, Laplace transformation, relaxation kernels.