

УДК 541.186

## МУЛЬТИСТАБИЛЬНОСТЬ СИНХРОННЫХ РЕЖИМОВ В АНСАМБЛЯХ МАЯТНИКОВ\*

© 2014 г.

Крюков А.К., Петров В.С., Осипов Г.В.

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,  
Нижний Новгород, Российская Федерация*

alkryukov@gmail.com

*Поступила в редакцию 03.11.2014*

Рассматривается коллективная синхронная динамика в ансамблях маятников. Показано, что различные режимы могут сосуществовать в системах локально диффузионно-связанных элементов при одинаковых значениях параметров. Синфазная синхронизация и режим глобальной синхронизации, вызванные распространяющимися солитоноподобными волнами, наблюдаются только в зависимости от начальных условий. Синхронные режимы классифицируются как «быстрые» и «медленные», дается аналитическая оценка для частоты синхронизации в случае «быстрого» режима. Также представляются оценка числа сосуществующих «медленных» режимов при одинаковых значениях параметров и их зависимость от длины цепочки.

*Ключевые слова:* синхронизация, численное моделирование, пространственно-временные структуры.

### **Введение**

Коллективные эффекты, такие как синхронизация и формирование пространственно-временных структур, являются ключевыми для понимания функционирования распределенных систем [1, 2]. Классическая фундаментальная модель наиболее общего характера имеет большую ценность, если она также применима для различных приложений [3–5]. Остановимся на рассмотрении коллективной динамики ансамблей, представляющих собой системы маятников. Такие системы тщательно исследовались в течение долгого времени и хорошо описаны [6–9]. Однако некоторые аспекты коллективной динамики в указанных системах не были достаточно изучены. В настоящей статье рассматривается один из таких эффектов – мультистабильность синхронных режимов в ансамблях слабо неидентичных маятников.

Мультистабильность как коллективный эффект [10, 11] означает, что система может иметь несколько стабильных устойчивых режимов (в частности, устойчивых многообразий, соответствующих синхронному режиму) при одинаковых значениях параметров. В таком случае эволюция системы сильно зависит от началь-

---

\* Выполнено при поддержке РФФ (проект 14-12-00811).

ных условий. Важно определить возможные мультистабильные состояния в ансамбле и найти различные наборы начальных условий, соответствующие различным устойчивым состояниям. Это можно рассматривать как различные стратегии управления.

Рассматривается распределенный одномерный ансамбль (цепочка) неидентичных связанных маятников с локальной диффузионной связью. Обнаружено, что в такой системе сосуществуют несколько синхронных режимов при одинаковых значениях параметров. Все сосуществующие синхронные режимы могут быть разделены на две основные группы, которые будем называть «быстрой» и «медленной» синхронизацией. Первый режим является случаем классической синхронизации в неоднородных колебательных ансамблях. В этом режиме все элементы цепочки имеют одинаковую частоту и период колебаний сравним с периодом колебаний индивидуальных элементов. «Медленная» синхронизация реализуется с помощью устойчивых бегущих волн в цепочке, которые: а) сдвигают фазу каждого элемента на  $2\pi$ ; б) распространяются через цепь и переходят друг через друга, сохраняя форму; в) отражаются от свободных границ. Период времени глобальной синхронизации для этого режима определяется свойствами бегущих волн, а именно их числом и скоростью. Этот период времени значительно больше, чем в случае «быстрой» синхронизации, отсюда и название «медленная». В следующих разделах статьи более детально рассмотрим саму модель, продемонстрируем переход к глобальной синхронизации и найдем аналитическое приближение для частоты «быстрой» синхронизации. Также покажем, как режим «медленной» синхронизации может быть инициализирован в системе при одинаковых значениях параметров, и дадим оценку числа сосуществующих режимов в случае «медленной» синхронизации.

### Модель

Рассмотрим одномерный ансамбль (цепочку) локально связанных маятников [5]:

$$\ddot{\varphi}_n + \lambda \dot{\varphi}_n + \sin \varphi_n = \gamma_n + d \sin(\varphi_{n-1} - \varphi_n) + d \sin(\varphi_{n+1} - \varphi_n), \quad (1)$$

где  $n = \overline{1, N}$ ,  $N$  – число элементов в цепочке, порядок системы  $2N$ ,  $d$  – сила связи,  $\gamma_n \geq 0$  – внешний стимул,  $\lambda \geq 0$  – коэффициент диссипации. Неидентичность элементов в численном эксперименте обеспечивается различными значениями  $\gamma_n$ .

Модель (1) используется во многих приложениях, например в коллективной динамике систем фазовой синхронизации, джозефсоновских переходах, биологических системах [5].

Будем изучать «быстрый» и «медленный» режимы глобальной синхронизации в цепочке связанных неидентичных элементов. Граничные условия – свободные концы:  $\varphi_0(t) = \varphi_1(t)$ ,  $\varphi_N(t) = \varphi_{N+1}(t)$ .

В зависимости от значений параметров в цепочке может наблюдаться колебательный режим «быстрой» синхронизации. Он основан на синфазной синхронности элементов. В то же время может иметь место режим «медленной» синхронизации, вызванный одной или несколькими пространственно-временными структурами, присутствующими в ансамбле. Показано, что режимы «быстрой» и «медленной» синхронизации могут сосуществовать при одинаковых значениях параметров. Тот или иной режим устанавливается в зависимости только от начальных условий.

### «Быстрая» синхронизация в цепочке

Рассмотрим цепочку из  $N = 128$  элементов при  $d = 8$ ,  $\lambda = 0,4$ ,  $\gamma_n$  – случайные значения из интервала  $[0,97; 0,99]$ , начальные условия  $\varphi_n = 0$ ,  $\dot{\varphi}_n = 5$ . При увеличении силы связи в системе сначала реализуется кластерная синхронизация, а при дальнейшем увеличении – глобальная синфазная синхронизация (рис. 1а). Можно видеть, что все первоначально неидентичные элементы осциллируют с одинаковой средней частотой. Кроме того, все элементы производят импульсы практически одновременно, а период синхронизации сравним с индивидуальным периодом вращения элемента. Синхронизацию такого типа назовем «быстрой». На рис. 1 показаны пространственно-временные диаграммы  $\dot{\varphi}_n(t)$ , соответствующие «быстрой» синхронизации, период  $T \approx 2,89$  (а) и «медленной» синхронизации, период  $T \approx 113$  (б).

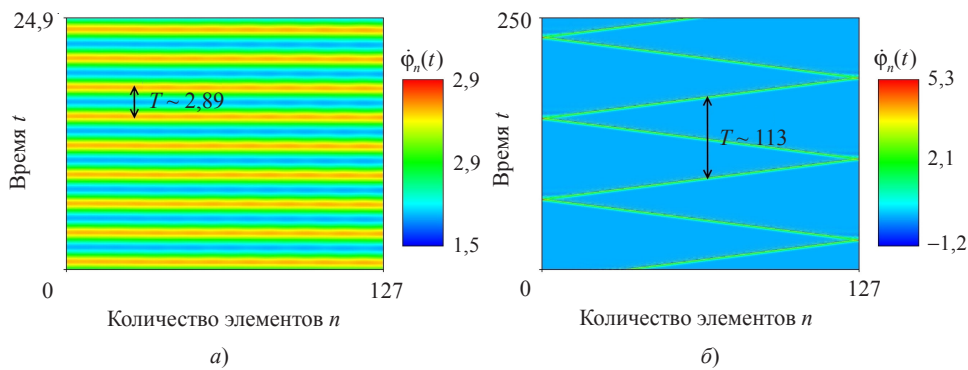


Рис. 1

### Аналитическое приближение частоты «быстрой» синхронизации

Можно оценить частоту синфазной синхронизации в цепочке из  $N$  слабо неидентичных осцилляторов (1) с граничными условиями «свободные концы». Предположим, что все фазы растут почти линейно. В синхронном режиме, который мы ищем, это подразумевает

$$\dot{\varphi}_1 = \dot{\varphi}_2 = \dots = \dot{\varphi}_N = \omega_s. \quad (2)$$

Для того чтобы ответить на вопрос, когда это предположение справедливо, следует рассмотреть фазовый портрет одного маятника с параметрами  $\lambda$  и  $\gamma$ , принадлежащими бистабильной области параметров [2] (область Б на рис. 2а). В этом случае существует устойчивое состояние равновесия, а также устойчивое вращательное периодическое движение в фазовом пространстве системы. Пока значения параметров  $\lambda$ ,  $\gamma$  далеки от значений кривой Трикоми [12, 13] (кривая Т на рис. 2а), это периодическое движение происходит на значительном расстоянии от устойчивого состояния равновесия, и фаза растет практически линейно вдоль этого цикла (движение  $T_1$  на рис. 2б). Для сравнения, когда значения  $\lambda$ ,  $\gamma$  приближаются к значениям кривой Трикоми, изображающая точка на периодической траектории большую часть времени находится в непосредственной близости от седлового состояния равновесия, в результате чего фазовая динамика приобретает релаксационный, нелинейный тип (траектория  $T_3$  на рис. 2б). Следовательно, можно сделать вывод, что предположение (2) выполняется для значений параметров  $\lambda$ ,  $\gamma_n$ , неблизких к кривой Трикоми. На рис. 2а представлены области различной динамики при различных значениях

ях параметров  $\lambda$  и  $\gamma$  для одного элемента: Р – область моностабильности состояния равновесия, А – область моностабильности вращательного периодического движения, Б – область бистабильности состояния равновесия и вращательного движения, Т – кривая Трикоми. Рост фазы в одном элементе при вращательных периодических движениях при различных  $\lambda$  показан на рис. 2б. Здесь  $T_1$  соответствует значительной удаленности от кривой Трикоми;  $T_2$  – ближе к кривой Трикоми, чем  $T_1$ ;  $T_3$  – ближе к кривой Трикоми, чем  $T_2$  ( $\gamma = 0,98$ ).

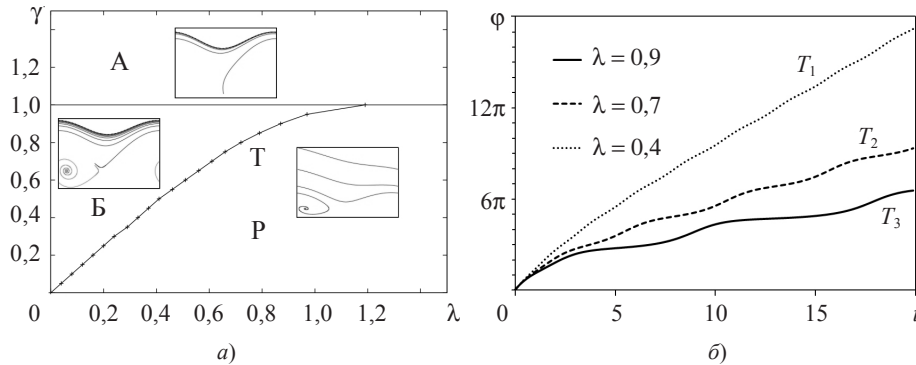


Рис. 2

Если просуммировать все уравнения в системе (1), получим:

$$N\lambda\omega_s + \sum_{n=1}^N \sin \varphi_n = \sum_{n=1}^N \gamma_n. \quad (3)$$

Заметим, что слагаемые связи взаимно уничтожаются. Теперь применим усреднение (3) по времени на интервале  $t \in [0, T_s]$ , где  $T_s = 2\pi/\omega_s$ . Все постоянные члены будут оставаться теми же, за исключением  $\sin \varphi_n$ , который оказывается равным нулю из-за  $\dot{\varphi}_n = \omega_s$  в предположении (2).

В итоге

$$\omega_s = \frac{1}{\lambda} \langle \gamma_n \rangle, \quad (4)$$

где

$$\langle \gamma_n \rangle = \sum_{n=1}^N \frac{\gamma_n}{N}$$

– средняя величина  $\gamma_n$ .

Сравним аналитическое приближение с численным экспериментом. Рассмотрим цепочку из  $N = 100$  маятников с  $\gamma_n = \gamma_0 + n\delta$ ,  $n = \overline{1, N}$ ,  $\delta = 0,01/(N - 1)$ . Для различных значений  $\gamma_0$  рассчитаем зависимость частоты синхронизации от  $\lambda$  (заметим, что частота синхронизации не зависит от  $d$ ). Результат представлен на рис. 3. Внешний рисунок показывает зависимость аналитического значения  $\omega_{an} = \omega_s$  и численного –  $\omega_{num}$  от  $\lambda$  для  $\gamma_0 = 1,06$ . Внутренний рисунок показывает разность между аналитическими и численными результатами для  $\gamma_0 = 0,86; 1,06; 1,26$ . Можно наблюдать, что эта разность растет при увеличении  $\lambda$  и уменьшении  $\gamma_0$ , что ожидаемо, так как большое значение  $\lambda$  и малое значение  $\gamma_0$  противоречат предположению (2) в аналитическом приближении. Резкое увеличение разности при  $\gamma_0 = 0,86$  про-

исходит из-за бифуркации на кривой Трикоми, в результате колебания исчезают.

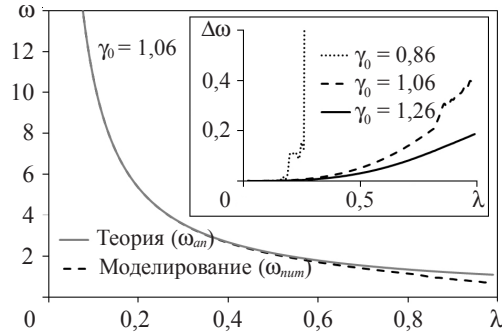


Рис. 3

Продemonстрируем, что для одного и того же значения параметра  $\lambda$  устанавливаются другие синхронные состояния, сосуществующие в системе, но имеющие существенно различные частоты и тип динамики.

#### «Медленная» синхронизация в цепочке

Если начальные условия соответствуют солитоноподобной волне (эти условия соответствуют устойчивому солитону в классической системе синус-Гордона)

$$\varphi_n(0) = 4 \arctan(\exp(n - N/2)h),$$

$$\dot{\varphi}_n(0) = 4h \exp(n - N/2)/(1 + \exp(2n - N)h^2),$$

$$n = 1, \overline{N}, \quad h = 0,01,$$

то волна начинает распространяться по цепочке, сохраняя форму и отражаясь от свободных концов (см. рис. 1б). При периодических граничных условиях волна будет распространяться по кольцу. В обоих случаях период колебаний – время, за которое волна проходит цепочку, отражается и возвращается в исходное положение. Этот период значительно превышает индивидуальный период каждого отдельного элемента в автоколебательном состоянии. Поэтому режим синфазной синхронизации можно назвать «быстрым», а режимы с солитоноподобными структурами – «медленными».

Солитон сдвигает фазу каждого элемента, через который проходит, на  $2\pi$ . Таким образом, при прохождении волны по цепочке  $K$  раз фаза увеличится на  $2K\pi$  в каждом элементе. На рис. 4а представлена проекция фазового портрета цепочки из 128 элементов на 60-й элемент при прохождении волны 5 раз. Если элемент находится вблизи границы типа «свободные концы», то исходящая и отраженная волны накладываются и типичное изменение фазы составляет  $4\pi$ . На рис. 4б представлена проекция фазового портрета цепочки из 128 элементов на 3-й элемент при прохождении и отражении волны.

Для существования такой структуры требуется определенная длина цепочки, превышающая характерный размер структуры, который зависит от параметров системы [5]. Реализация нескольких солитоноподобных структур на масштабе одной цепочки возможна при достаточных для сосуществования структур размерах цепочки и соответствующих начальных условиях. Таким образом, в цепочке возмож-

но сосуществование не только «быстрой» и «медленной» синхронизации, но и нескольких режимов «медленной» синхронизации, которые могут иметь как одинаковые, так и различные периоды в зависимости от заданной конфигурации структур.

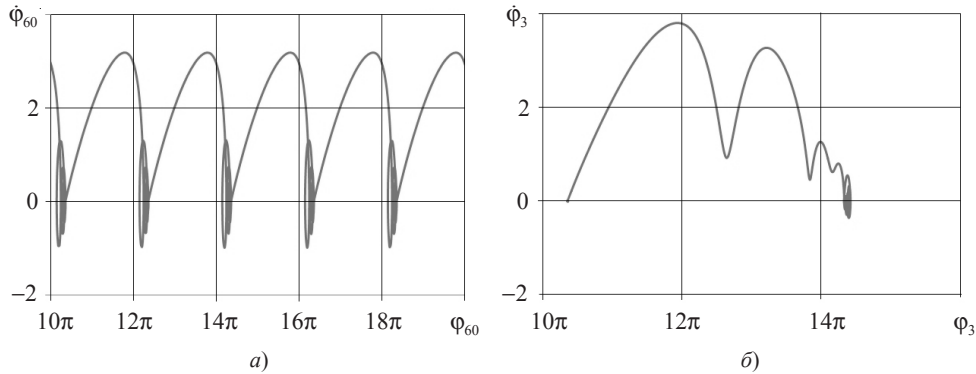


Рис. 4

Для оценки нижней границы количества режимов в цепочке длины  $N$  разобьем ее на несколько блоков  $M$ , в каждом из которых заведомо можно задать солитоноподобную структуру, которая будет распространяться и беспрепятственно проходить через другие структуры. Используем принцип математической индукции. Известно, что в цепочке с  $M = 1$  возможен один режим «медленной» синхронизации. Положим, что при  $M = K$  сосуществует  $L$  режимов, и определим, сколько режимов реализуется при  $M = K + 1$ . При  $M = K + 1$  становятся доступны конфигурации из  $K + 1$  структур. Поскольку каждая структура может быть направлена как в одну, так и другую сторону, добавляем  $2^{K+1}$  конфигураций. В силу пространственной симметрии остается половина этих режимов, то есть остается  $2^K$  новых режимов.

Общее число сосуществующих режимов «медленной» синхронизации в цепочке из  $M$  блоков составляет не менее  $2^{M-1}$ . Для цепочки из  $M = 4$  блоков получены все 8 режимов «медленной» синхронизации. С учетом того, что в более длинной цепочке заведомо могут реализовываться все режимы более коротких цепочек (то есть с меньшим количеством блоков), а также с учетом режима «быстрой» синхронизации получаем  $2^M$  различных синхронных режимов. Характерное мгновенное распределение  $\phi_n$  в некоторых таких режимах (с одной, двумя и четырьмя солитоноподобными структурами) показано на рис. 5а.

Зависимость периода глобальной синхронизации  $T$  от силы связи  $d$  в режимах синфазной синхронизации с одной, двумя и четырьмя солитоноподобными структурами показана на рис. 5б. Пунктирная линия соответствует синфазному синхронному режиму, штриховая – режиму с одной солитоноподобной структурой, черная сплошная – режиму с двумя солитоноподобными структурами, серая сплошная – режиму с четырьмя солитоноподобными структурами. Период в синфазном режиме практически не зависит от силы связи и близок к среднему индивидуальному периоду вращений отдельных элементов. Период режимов «медленной» синхронизации уменьшается с возрастанием силы связи. Это происходит потому, что с увеличением  $d$  растет скорость распространения солитоноподобных структур по цепочке, а период обращения структуры в цепочке уменьшается.

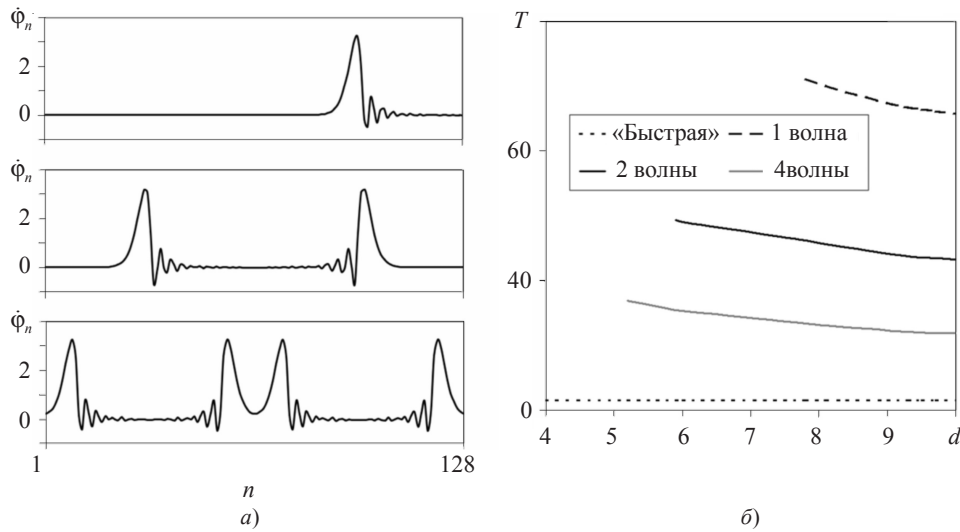


Рис. 5

### Область синхронизации

Важно определить области параметров (неидентичность, сила связи), при которых существуют режимы «быстрой» и «медленной» синхронизации. Известно, что сила связи  $d$  должна превосходить  $d^* = \delta N^2/8$  для цепочки с линейным распределением  $\gamma_n = \gamma_0 + n\delta$  и значениях  $\lambda, \gamma_n$ , соответствующих линейному росту фазы [2]. Сравнение аналитических и численных результатов приведено на рис. 6а для различных значений  $\lambda, \gamma_0$ . На рисунке представлена область «быстрой» синхронизации:  $d^* = \delta N^2/8$  – сплошная черная линия, численные результаты при  $\gamma_0 = 0,7, \lambda = 0,3$  – сплошная серая кривая, при  $\gamma_0 = 0,9, \lambda = 0,4$  – пунктирная черная кривая, при  $\gamma_0 = 0,9, \lambda = 0,5$  – штриховая серая кривая. Отклонение от теории наблюдается при значениях параметров, соответствующих нелинейному росту фазы (серые кривые на рис. 6а).

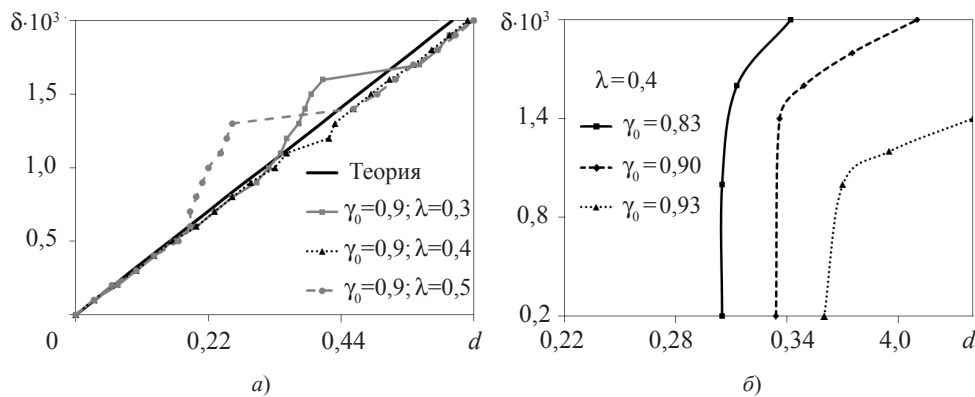


Рис. 6

«Медленная» синхронизация существует при достаточно большой силе связи, обеспечивающей распространение волны по цепочке. Примеры полученных численно областей «медленной» синхронизации при различных  $\gamma_0$  приведены на рис. 6б, где при  $\lambda = 0,4$  представлены численные результаты при  $\gamma_0 = 0,83$  – сплош-



ная кривая, при  $\gamma_0 = 0,9$  – штриховая кривая, при  $\gamma_0 = 0,93$  – пунктирная кривая ( $N = 50$ ). При малых  $\delta$  значения силы связи обусловлены величиной  $\gamma_0$ . Но при приближении  $\gamma_n = \gamma_0 + n\delta$  к 1 «медленной» синхронизации требуется большая связь. При  $\gamma_n$  выше единицы (область А на рис. 2а) в системе реализуется «быстрая» синхронизация.

### Заключение

Представлены результаты в области мультистабильности синхронных режимов в ансамблях связанных неидентичных маятников. Показано, что при одних и тех же значениях параметров в системе могут реализовываться различные режимы, которые можно разделить на режимы «быстрой» и «медленной» синхронизации. Помимо классического синфазного синхронного режима («быстрая» синхронизация) в системе могут реализовываться множество «медленных» синхронных режимов, и их число увеличивается с ростом  $K$  как  $2^K$ , где  $K$  – характерный размер цепочки. Этот факт был численно подтвержден получением 16 различных «медленных» режимов. Аналитически рассчитана частота «быстрой» синхронизации, численные результаты имеют близкое соответствие с аналитическими результатами. Реализация того или иного режима зависит от начальных условий. Режим «медленной» синхронизации характеризуется набором пространственно-временных солитоноподобных структур, распространяющихся по цепочке. Число таких структур и скорость их обращения определяет период «медленного» режима. Это может быть полезно для современной теории управления, так как такие эффекты позволяют получить, в частности, существенно различные ритмы в среде посредством установки определенных начальных условий.

### Список литературы

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* An universal concept in nonlinear sciences // *Self.* 2001. V. 2. P. 3.
2. *Osipov G.V., Kurths J., Zhou Ch.* Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin: Springer Verlag, 2007.
3. *Dodd R.K., Morris H.C., Gibbon J.D.* Soliton and nonlinear wave equations // London and New York: Academic Press, 1982. V. 1. 640 p.
4. *Salerno M., Samuelsen M.R., Svensmark H.* Thermal sine-Gordon system in the presence of different types of dissipation // *Phys. Rev. B.* 1988. 38, 1. 593.
5. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D.* Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization network. Singapore: World Scientific, 1994.
6. *Reinisch G., Fernandez J.C.* Wave mechanics of sine-Gordon solitons // *Phys. Rev. B.* 1982. V. 25, No 12. P. 7352.
7. *Kivshar Yu.S., Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems // *Rev. Mod. Phys.* 1989. V. 61, No 4. P. 761–915.
8. *Ferreira L.A., Piette B., Zakrzewski W.J.* Wobbles and other kink-breather solutions of the sine-Gordon model // *Phys. Rev. E.* 2008. V. 77, No 3. P. 036613.
9. *Braun O. M., Hu B., Zeltser A.* Driven kink in the Frenkel – Kontorova model // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 62, No 3. P. 4235.
10. *Tricomi F.* Integrazioni di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze/* 1933. V. 2, No 1. P. 1–20.
11. *Urabe M.* The least upper bound of a damping coefficient ensuring the existence of a periodic motion of a pendulum under constant torque // *J. Sci. Hiroshima University. Ser. A.* 1955. V. 18. P. 379–389.



12. *Osipov G.V., Sushchik M.M.* Synchronized clusters and multistability in arrays of oscillators with different natural frequencies // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 58, No 6. P. 7198.
13. *Kryukov A.K., Osipov G.V., Polovinkin A.V., Kurths J.* Synchronous regimes in an ensemble of coupled Bonhoeffer – Van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E.* 2009. V. 79, No 4. P. 046209.

#### *Reference*

1. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* An universal concept in nonlinear sciences // *Self.* 2001. V. 2. P. 3.
2. *Osipov G.V., Kurths J., Zhou Ch.* Synchronization in Oscillatory Networks. Berlin: Springer Verlag, 2007.
3. *Dodd R.K., Morris H.C., Gibbon J.D.* Soliton and nonlinear wave equations // London and New York: Academic Press, 1982. V. 1. 640 p.
4. *Salerno M., Samuelsen M.R., Svensmark H.* Thermal sine-Gordon system in the presence of different types of dissipation // *Phys. Rev. B.* 1988. 38, 1. 593.
5. *Afraimovich V.S., Nekorkin V.I., Osipov G.V., Shalfeev V.D.* Stability, structures and chaos in nonlinear synchronization network. Singapore: World Scientific, 1994.
6. *Reinisch G., Fernandez J.C.* Wave mechanics of sine-Gordon solitons // *Phys. Rev. B.* 1982. V. 25, No 12. P. 7352.
7. *Kivshar Yu.S., Malomed B.A.* Dynamics of solitons in nearly integrable systems // *Rev. Mod. Phys.* 1989. V. 61, No 4. P. 761–915.
8. *Ferreira L.A., Piette B., Zakrzewski W.J.* Wobbles and other kink-breather solutions of the sine-Gordon model // *Phys. Rev. E.* 2008. V. 77, No 3. P. 036613.
9. *Braun O. M., Hu B., Zeltser A.* Driven kink in the Frenkel – Kontorova model // *Phys. Rev. E.* 2000. V. 62, No 3. P. 4235.
10. *Tricomi F.* Integrazioni di un'equazione differenziale presentatasi in elettrotecnica // *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze/* 1933. V. 2, No 1. P. 1–20.
11. *Urabe M.* The least upper bound of a damping coefficient ensuring the existence of a periodic motion of a pendulum under constant torque // *J. Sci. Hiroshima University. Ser. A.* 1955. V. 18. P. 379–389.
12. *Osipov G.V., Sushchik M.M.* Synchronized clusters and multistability in arrays of oscillators with different natural frequencies // *Phys. Rev. E.* 1998. V. 58, No 6. P. 7198.
13. *Kryukov A.K., Osipov G.V., Polovinkin A.V., Kurths J.* Synchronous regimes in an ensemble of coupled Bonhoeffer – Van der Pol oscillators // *Phys. Rev. E.* 2009. V. 79, No 4. P. 046209.

### **MULTISTABILITY OF SYNCHRONOUS REGIMES IN PENDULUM ENSEMBLES**

**Kryukov A.K., Petrov V.S., Osipov G.V.**

Collective synchronous dynamics in ensembles of pendulums is investigated. It is shown that various regimes can exist in systems of locally diffusely coupled elements for their same parameter values. For instance, in phase synchronization and the global synchronization regime caused by the propagation of soliton-like waves are observed only as a function of initial conditions. Synchronous regimes are classified into "fast" and "slow" ones; synchronization frequency for the case of "fast" regime is analytically estimated. Also, the number of coexisting "slow" regimes is estimated for the same parameter values and their dependence on the chain length.

*Keywords:* synchronization, numerical modeling, spatial-time structures.