

УДК 539.374

**СВОЙСТВА ПРОИЗВЕДЕНИЯ ФУНКЦИИ ПОЛЗУЧЕСТИ
И ФУНКЦИИ РЕЛАКСАЦИИ В ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКОУПРУГОСТИ***

© 2014 г.

Хохлов А.В.*НИИ механики Московского государственного университета
им. М.В. Ломоносова, Москва, Российская Федерация*

andrey-khokhlov@ya.ru

Поступила в редакцию 31.06.2014

Продолжено аналитическое исследование интегрального определяющего соотношения линейной вязкоупругости. Обнаружены свойства функции – поточечного произведения функций релаксации и ползучести (ПФРФП), сильно отличающиеся от тех, которые принято считать универсальными. Показано, что даже у классических реологических моделей эта функция времени может возрастать на всей полуоси, убывать, быть постоянной, может иметь более одной точки экстремума, что ее пределы в нуле и на бесконечности не обязательно равны единице, а могут принимать любые значения из единичного отрезка, что ПФРФП может быть сколь угодно близка к нулевой (а не единичной) функции на всей полуоси. Предложен способ оценки близости поведения интегрального определяющего соотношения вязкоупругости с произвольной функцией релаксации к поведению упругой среды или ньютоновской жидкости на некотором интервале времени по величине граничных пределов ПФРФП и норме его уклонения от единичной и нулевой функций. Такая диагностика более информативна и точна, чем общепринятое деление моделей на жидкости и твердые тела лишь в зависимости от равенства или неравенства нулю предела функции релаксации на бесконечности.

Ключевые слова: определяющие соотношения, вязкоупругость, интегральные операторы, функции ползучести и релаксации, реологические модели, регулярные и сингулярные модели.

Введение

Напряжение $\sigma(t)$ и деформация $\varepsilon(t)$ связаны в линейной теории вязкоупругости интегральными операторами, инвариантными относительно сдвигов по времени:

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) d\varepsilon(\tau), \quad \varepsilon(t) = \int_0^t \Pi(t-\tau) d\sigma(\tau), \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Эти определяющие соотношения (ОС) описывают одномерные изотермические процессы в структурно-стабильных материалах [1–10]. Их ядра $R(x)$ и $\Pi(x)$, $x \geq 0$, – материальные функции – называются функциями релаксации (ФР) и ползучести (ФП). Операторами вида (1) задаются и трехмерные ОС вязкоупругости в изотроп-

* Выполнено при поддержке РФФИ (грант № 12-08-01227-а).

ном случае. На множестве непрерывных кусочно-гладких при $t \geq 0$ функций операторы (1) действуют по формулам:

$$\sigma(t) = R(0)\varepsilon(t) + \int_0^t \dot{R}(t-\tau)\varepsilon(\tau)d\tau, \quad \varepsilon(t) = \Pi(0)\sigma(t) + \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau, \quad t \geq 0. \quad (2)$$

Обычно ФР $R(x)$ и ФП $\Pi(x)$ ($x > 0$) предполагаются непрерывными положительными монотонными функциями (тогда они дифференцируемы почти всюду, а их производные интегрируемы по Лебегу), ФР может иметь особенность в точке $x = 0$. Они должны удовлетворять математическим ограничениям, гарантирующим существование интегралов, необходимую гладкость образов (в зависимости от гладкости входных процессов), непрерывность операторов в рассматриваемых счетно-нормированных пространствах, сходимость ряда для резольвенты и т.п., а также дополнительным ограничениям, обеспечивающим выполнение общих принципов механики и термодинамики и сходство качественных свойств теоретических кривых ОС и типичных кривых испытаний классов материалов, чье поведение хотелось бы описывать ОС (1).

В [11–13] детально исследованы свойства всех основных теоретических кривых ОС (1) с произвольными ФП и ФР (кривых обратной ползучести, ступенчатой ползучести, релаксации с начальной стадией деформирования, диаграмм деформирования при постоянных и кусочно-постоянных скоростях деформации или нагружения, скоростной чувствительности и др.) и выявлены дополнительные ограничения, обеспечивающие феноменологическую адекватность ОС: ФР и ФП положительны и дифференцируемы при $x > 0$, ФР убывает и выпукла вниз, а ФП возрастает и выпукла вверх. Анализ показал, что целесообразно выделять три класса моделей (ФР и ФП): 1) регулярные, у которых $\Pi(0) > 0$ и тогда $R(0) < \infty$; 2) сингулярные – с ФР, содержащей слагаемое вида $\eta\delta(t)$ с дельта-функцией Дирака (такие ФР появляются, в частности, при рассмотрении реологических моделей, поскольку ФР $R = \eta\delta(t)$, $\eta > 0$, задает ньютоновскую жидкость с ОС $\sigma = \eta\dot{\varepsilon}$); 3) нерегулярные модели – с ФР, не содержащей слагаемого $\eta\delta(t)$, но имеющей интегрируемую особенность в точке $x = 0$. Качественные свойства теоретических кривых моделей трех этих классов заметно отличаются друг от друга. Третий класс занимает промежуточное положение между первыми двумя. К нему относится, например, ФР $R(t) = At^{-\alpha}$, $\alpha \in (0; 1)$ (ее ФП имеет вид $\Pi(t) = A^{-1}C(\alpha)t^\alpha$ и обладает не только свойством $\Pi(0) = 0$, как и сингулярные модели, но и свойством $\dot{\Pi}(0) = \infty$, переходным к $\Pi(0) \neq 0$, характеризующему регулярные модели).

Операторы (1) взаимно обратны ($\mathbf{R}\Pi = \mathbf{I} = \mathbf{P}\mathbf{R}$), и потому ФП и ФР связаны зависимостями $\mathbf{R}\Pi = 1 = \mathbf{P}\mathbf{R}$, $t > 0$, т.е. в предположении, что $R(0) < \infty$:

$$\int_0^t \dot{R}(t-\tau)\Pi(\tau)d\tau + R(0)\Pi(t) = 1, \quad \int_0^t \dot{\Pi}(t-\tau)R(\tau)d\tau + \Pi(0)R(t) = 1, \quad t > 0. \quad (3)$$

Эти уравнения эквивалентны, так как операторы с разностными ядрами коммутируют. Зная ФР, можно найти ФП из уравнения (3) и наоборот. Поэтому одномерное ОС (1) содержит одну материальную функцию, а изотропное трехмерное – две. При $R(0) \neq 0$ и $\Pi(0) \neq 0$ (3) и (2) – интегральные уравнения (ИУ) Вольтерры второго рода с ограниченными ядрами (если конечен предел $\dot{R}(0+)$), и потому они однозначно разрешимы в классе суммируемых функций (даже в $L_2[0, b]$). Случай $\Pi(0) = 0$ приводит к ИУ Вольтерры первого рода и нерегулярным моделям с особеннос-

тью в нуле у ФР и касательного модуля, к неограниченности обратного оператора, отсутствию мгновенной диаграммы деформирования и т.п. (качественные свойства их теоретических кривых существенно отличаются от свойств кривых регулярных моделей [11–13]).

Применив к (3) преобразование Лапласа, получим связь между трансформантами ФП и ФР: $\tilde{\Pi}(p)\tilde{R}(p)p^2 \equiv 1$ или $\bar{\Pi}(p)\bar{R}(p) \equiv 1$ для изображений по Лапласу–Карсону.

Равенства (3) получаются, если потребовать взаимную обратность операторов (1) только на одном процессе $\varepsilon(t) = h(t)$, h – функция Хевисайда. Отсюда будет следовать и $\mathbf{PR}\varepsilon = \varepsilon$ для любого непрерывного $\varepsilon(t)$. Это объясняется тем, что оператор \mathbf{PR} линеен и инвариантен относительно сдвигов по времени, а линейная оболочка процессов вида $\varepsilon(t) = h(t - t_1) - h(t - t_2)$, $t_i > 0$ (даже с $t_i \in \mathcal{Q}$), т.е. множество всех финитных ступенчатых функций плотно в пространствах кусочно-непрерывных на отрезке $[0, t]$ функций с C -нормой. Так как подпространство L кусочно-линейных функций также плотно в $C[0, t]$ и $L_p[0, t]$, то достаточно потребовать обратность операторов (1) лишь на процессе $\varepsilon(t) = t$ (линейная оболочка его сдвигов вправо по оси времени совпадает с L). Тогда получим тождество

$$\int_0^t R(t - \tau)\Pi(\tau)d\tau \equiv t,$$

эквивалентное (3). Его дифференцирование дает (3).

Во многих работах используется произведение функций ползучести и релаксации (ПФРФП) $\Psi(t) := R(t)\Pi(t)$, $t > 0$ (отметим, что, зная $\Psi(t)$, можно найти ФР из ИУ (3)). Принято считать, что всегда для любых ФР и ФП предельные значения $\Psi(0+)$, $\Psi(\infty)$ равны единице (см. например, [1–10]), функция имеет один минимум [3] (или даже максимум [8, с. 149]), причем $\Psi(t)$ мало отклоняется от единицы на луче $t \geq 0$ [4, 6, 14]. Характерная цитата из монографии [4, с. 62]: «Заметим, что вследствие определения функций ползучести и релаксации $R(0) = 1/\Pi(0) = E$ и $R(\infty) = 1/\Pi(\infty) = E_\infty$. Отсюда очевидным образом: $R(0)\Pi(0) = 1$ и $R(\infty)\Pi(\infty) = 1$. Можно сделать предположение о том, что равенство, справедливое для крайних значений аргумента t , будет приближенно выполняться и для любых его значений, следовательно, $R(t)\Pi(t) \approx 1$... Приближенное равенство было отмечено Бронским как эмпирическое соотношение, вытекающее из сравнения кривых ползучести и релаксации». Гипотеза $R(t)\Pi(t) \approx 1$ используется в некоторых работах даже как точное равенство для восстановления ФП по известной ФР (вместо решения ИУ (3)) и наоборот [14 и др.]: «...получено в предположении А.П. Бронского о том, что $\Pi(t)R(t) = 1$. Это соотношение выполнено приближенно для любой линейной теории, а на бесконечности – точно» [14]. Однако проверка этих свойств даже у классических моделей (Максвелла, Фойгта, «стандартного тела» и др.) показывает, что эти представления неверны в общем случае и нуждаются в корректировке.

Можно доказать, что из (3) следует, что для *монотонных* ФР и ФП всегда $\Pi(t)R(t) < 1$ при $t > 0$, а равенство в некоторой точке возможно только для идеально упругой среды (с $R(t) = \text{const}$, $\Psi(t) \equiv 1$); монотонности только ФП недостаточно [11]. Переходя в (3) к пределам $t \rightarrow 0+$ и $t \rightarrow +\infty$, получим: $\Pi(0)R(0) = 1$, $\Pi(\infty)R(\infty) = 1$. Равенства $\Psi(0+) = 1$ и $\Psi(\infty) = 1$ верны, если только $R(0)$ и $\Pi(\infty)$ конечны (т.е. $\Pi(0) > 0$ и $R(\infty) > 0$). Если еще и $\dot{R}(0) < \infty$, то $\dot{\Pi}(0) < \infty$ и $\dot{\Pi}(0)/\Pi(0) = -\dot{R}(0)/R(0)$ [11], т.е. $\dot{\Psi}(0+) = 0$ (это предельное равенство не упо-

минается в литературе, хотя значение $\dot{R}(0)$ важно для моделирования).

При $R(\infty) = 0$ будет $\Pi(\infty) = \infty$, но неверно, что $\Psi(\infty) = 1$, а при $\Pi(0) = 0$ неверно, что $\Psi(0) = 1$. Например, у модели Максвелла ($R = Ee^{-\lambda t}$, $\Pi(t) = \eta^{-1}t + E^{-1}$, $\Psi(t) = (\lambda t + 1)e^{-\lambda t}$, $\lambda := E/\eta = 1/\tau$, τ – время релаксации) $\Psi(\infty) = 0$ и $\Psi(t)$ монотонно убывает, а у модели Фойгта ($R(t) = \eta\delta(t) + Eh(t)$, $\Pi(t) = (1 - e^{-\lambda t})/E$, $\Psi(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $\lambda := E/\eta = \tau^{-1}$, τ – время ползучести, «retardation time») $\Psi(t)$ возрастает, причем $\Psi(0+) = 0$ и $\Psi(\infty) = 1$. Для ньютоновской жидкости $\Psi(t) \equiv 0$ при $t > 0$; для моделей со степенной ФР $R(t) = At^{-\alpha}$, $\alpha \in (0; 1)$, будет $\Psi(t) \equiv C$, где постоянная C зависит от α и $C(\alpha) \in (0; 1)$ [11].

В [11] изучены свойства ПФРФП всех трех- и четырехзвенных реологических моделей, в частности – Кельвина, Пойнтинга и модели стандартного тела (МСТ), т.е. последовательного соединения моделей Максвелла и Фойгта (в англоязычной литературе она называется моделью Бюргерса). Показано, что ПФРФП могут возрастать, убывать, быть постоянными, могут иметь более одной точки экстремума и любые предельные значения при $t \rightarrow 0+$ и $t \rightarrow \infty$ из отрезка $[0; 1]$, что $\Psi(t)$ может быть сколь угодно близка к нулевой функции на всей полуоси. Например, у сингулярных трехзвенных моделей, задаваемых ФП

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \lambda > 0, \alpha, \beta \geq 0, \gamma \in [0, \beta] \quad (4)$$

с $\gamma = \beta$; $\lambda, \alpha, \beta > 0$, при любых значениях параметров $\Psi(0+) = 0$, $\Psi(\infty) = 0$, $\Psi(t)$ имеет точку максимума, а не минимума, семейство $\Psi(t; \lambda, \alpha/\beta)$ равномерно сходится к нулю на луче $t \geq 0$, когда $\lambda \rightarrow 0$ (см. раздел 3). У четырехзвенных регулярных (сингулярных) моделей ПФРФП либо монотонны, как у модели Максвелла (Фойгта), либо имеют два экстремума [11].

Обнаруженные «необычные» свойства ПФРФП доказаны и проиллюстрированы в настоящей статье. В статье приняты обозначения $y(0) := y(0+)$ – предел справа в точке $t = 0$, $\hat{y}(t_*)$ – скачок $y(t)$ в точке t_* .

1. Структурные реологические модели

В виде (1) представимы все модели, собранные из линейно упругих и вязких элементов посредством последовательных и параллельных соединений. Они задаются двумя дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами: $\mathbf{R}\sigma = \mathbf{Q}\epsilon$, где порядок \mathbf{Q} равен порядку \mathbf{R} или больше на единицу [1, 2, 4, 8]. Их ФП – линейные комбинации линейных функций и экспонент с отрицательными показателями, а в ФР могут входить еще и сингулярные слагаемые. Если вязкий элемент ($R(t) = \eta\delta(t)$, $\Pi(t) = t/\eta$) или любая сингулярная модель (СиМ) подключены параллельно к произвольной модели (тогда ФР складываются), то слагаемое $\eta\delta(t)$ входит в ФР. Семейство ФП (4) при $\gamma \in (0; \beta)$, $\alpha, \beta > 0$ порождает все регулярные четырехзвенные модели (все четыре эквивалентны МСТ). При $\alpha = 0$ и $\gamma \in (0; \beta)$ реализуются трехзвенные (регулярные) модели Кельвина и Пойнтинга – Томсона (рис. 1а); ФП двух последних ограничены: $\Pi(\infty) = \beta$. Поскольку $\Pi(0) = \beta - \gamma$, то ФП (4) порождает СиМ только тогда, когда $\gamma = \beta$ (тогда из ИУ (3) находится ФР $R(t) = \eta\delta(t) + Ae^{-\lambda t}$ – см. раздел 3); при $\lambda = 0$ или $\beta = 0$ (т.е. $A = 0$) получается модель ньютоновской жидкости, при $\alpha = 0$ (тогда $\nu = 0$, $A = \beta^{-1}$) – модель Фойгта, а если $\alpha > 0$, то получаются (все) трехзвенные сингулярные модели (рис. 1б). При $\gamma = 0$ ФП (4) превращается в модель Максвелла. Случай $\gamma < 0$ приводит к нарушению ограничения $\dot{\Pi}(t) \leq 0$, что вызывает возрастание кривой обратной ползучести [11, 13].

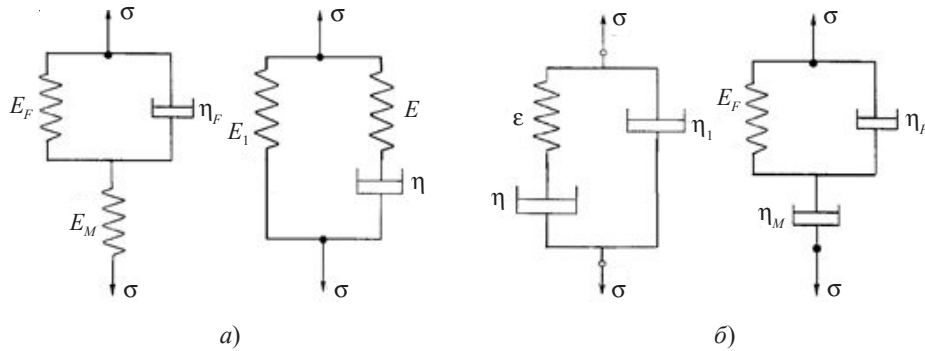


Рис. 1

Хотя модель Пойнтинга–Томсона «формально не получается из МСТ предельным переходом» [8], можно заметить, что ее ФП ((4) с $\alpha = 0$) совпадает с ФП модели Кельвина, которая «получается» при $\eta_M \rightarrow \infty$. Математически эквивалентны друг другу (задаются одним и тем же семейством ФП с одинаковыми числом и диапазонами параметров) и две сингулярные трехзвенные модели (см. рис. 1б). Отличаются только формулы, выражающие параметры через модули упругости пружин и коэффициент вязкости демпферов. Эквивалентность двух пар трехзвенных моделей порождает два дерева эквивалентных многозвенных моделей. Например, все четыре регулярные четырехзвенные модели (в частности, параллельное соединение двух моделей Максвелла с разными временами релаксации) эквивалентны МСТ, а все четыре четырехзвенные СиМ эквивалентны последовательному соединению двух моделей Фойгта с разными временами ползучести [11]. Можно доказать, что для любого n множество несократимых n -звенных моделей распадается ровно на два класса эквивалентности: регулярных и сингулярных моделей.

2. ПФРФП трех- и четырехзвенных регулярных моделей

При $\alpha, \beta, \lambda > 0, \gamma \in (0, \beta)$ ФП (4) задает МСТ и все регулярные четырехзвенные модели. Для ФП (4) легко построить ФР. Из ИУ (3) можно вывести дифференциальное уравнение (ДУ) второго порядка для ФР: $(\beta - \gamma)\ddot{R} + (\alpha + \beta\lambda)\dot{R} + \alpha\lambda R = 0$. Но проще использовать тождество $\tilde{\Pi}(p)\tilde{R}(p)p^2 \equiv 1$, равносильное (3), связывающее трансформанты Лапласа ФР и ФП:

$$\tilde{\Pi}(p) = \frac{\alpha}{p^2} + \frac{\beta}{p} - \frac{\gamma}{p + \lambda}, \quad \tilde{R}(p) = \frac{1}{\tilde{\Pi}(p)p^2} = \frac{p + \lambda}{(\beta - \gamma)p^2 + (\alpha + \beta\lambda)p + \alpha\lambda}. \quad (5)$$

В знаменателе – характеристический многочлен ДУ $q(p)$. Его дискриминант: $D = (\alpha + \beta\lambda)^2 - 4(\beta - \gamma)\alpha\lambda = (\alpha - \beta\lambda)^2 + 4\gamma\alpha\lambda$. Так как $D > 0$ и $D < \alpha + \beta\lambda$, то $q(p)$ имеет два различных действительных отрицательных корня $p = -\mu_i$:

$$q(p) = (\beta - \lambda)(p + \mu_1)(p + \mu_2), \quad \mu_i := 0,5(\beta - \gamma)^{-1} \left(\alpha + \beta\lambda \mp \sqrt{(\alpha - \beta\lambda)^2 + 4\gamma\alpha\lambda} \right) > 0.$$

Всегда $\mu_1 < \lambda < \mu_2$, так как $q(-\lambda) = (\beta - \gamma)\lambda^2 - (\alpha + \beta\lambda)\lambda + \alpha\lambda = -\gamma\lambda^2 < 0$, т.е. $-\lambda \in (-\mu_2, -\mu_1)$. Разложение (5) на дроби:

$$\tilde{R}(p) = A(p + \mu_1)^{-1} + B(p + \mu_2)^{-1}, \quad A = (\beta - \gamma)^{-1}(\lambda - \mu_1)(\mu_2 - \mu_1)^{-1} > 0, \\ B = (\beta - \gamma)^{-1}(\mu_2 - \lambda)(\mu_2 - \mu_1)^{-1} > 0; \quad \mu_2 - \mu_1 = (\beta - \gamma)^{-1}\sqrt{D}.$$

Следовательно, ФР МСТ имеет вид:

$$R(t) = Ae^{-\mu_1 t} + Be^{-\mu_2 t}, \quad A, B > 0, \mu_i > 0. \quad (6)$$

Эта ФР положительна, убывает и выпукла вниз, т.е. допустима;

$$R(0) = A + B = (\beta - \gamma)^{-1}, \quad \Pi(0) = \beta - \gamma > 0, \quad R(\infty) = 0, \quad \Pi(\infty) = \infty, \quad \dot{\Pi}(0) = \alpha + \lambda\gamma.$$

Поскольку (6) – сумма ФР двух моделей Максвелла, то МСТ эквивалентна параллельному соединению моделей Максвелла с различными временами релаксации $\tau_i = 1/\mu_i$. Очевидно, что $\mu_1 < (\beta - \gamma)^{-1}[(\alpha + \beta\lambda) - |\alpha - \beta\lambda|] = (\beta - \gamma)^{-1} \min \{\alpha, \beta\lambda\}$, $\mu_2 > (\beta - \gamma)^{-1} \max \{\alpha, \beta\lambda\}$.

При $\alpha = 0$ МСТ (4) вырождается в **модель Кельвина** (см. рис. 1а):

$$\begin{aligned} \Pi(t) &= \beta - \gamma e^{-\lambda t}, \quad \mu_1 = 0, \quad \mu_2 = \mu := \beta\lambda/(\beta - \gamma), \\ A &= \beta^{-1}, \quad B = \gamma\beta^{-1}(\beta - \gamma)^{-1} \text{ и } R(t) = A + Be^{-\mu t}. \end{aligned}$$

ФР входит в тот же класс функций, что и ФП. Отметим, что $\mu > \lambda$, т.е. время релаксации меньше времени ползучести. Главное отличие модели Кельвина от (4) – ограниченность ФП: $\Pi(\infty) = \beta$, $R(\infty) = A \neq 0$. ПФРФП модели Кельвина зависит лишь от λ и отношения $\gamma/\beta \in (0; 1)$:

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= (\beta - \gamma e^{-\lambda t})(A + Be^{-\mu t}) = 1 + \beta B e^{-\mu t} - \gamma A e^{-\lambda t} - \gamma B e^{-(\lambda + \mu)t}, \\ \lambda + \mu &= \lambda(2\beta - \gamma)/(\beta - \gamma); \end{aligned}$$

$\Psi(0) = 1$, $\Psi(\infty) = 1$, $\dot{\Psi}(0+) = 0$. При $\gamma \rightarrow 0$, как и при $\lambda \rightarrow +\infty$, семейство ФП модели Кельвина сходится на интервале $t > 0$ к постоянной $\Pi(t) = \beta$, т.е. к ФП упругой модели, семейство ФР – к постоянной $R(t) = A = \beta^{-1}$, а семейство ПФРФП – к $f(t) = 1$.

Для модели Фойгта $\gamma = \beta$, и формулы для параметров ФР Кельвина теряют смысл. При $\chi \rightarrow \beta - 0$ имеем $\mu \rightarrow +\infty$, $B \rightarrow +\infty$, слагаемое $Be^{-\mu t}/\eta$ с $\eta := \lim B/\mu = \lim \gamma\beta^{-2}\lambda^{-1} = (\beta\lambda)^{-1}$ оказывается δ -образным семейством, и семейство ФР сходится к ФР модели Фойгта $R_F(t) = A + \eta\delta(t)$. У нее $\Psi_F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$, $\Psi_F(0+) = 0$ (а не 1), $\Psi_F(\infty) = 1$, $\dot{\Psi}_F(0+) = \lambda \neq 0$.

На рис. 2а приведены графики $\Psi(t)$ для модели Кельвина с $\beta = 2$, $\gamma = 0,8$ ($A = 1$, $B = 4$, $\mu = 5\lambda$) и различными λ : $\lambda = 0,1; 0,2; 0,3; 1$. С ростом λ точка минимума сдвигается влево, пик заостряется и кривая все быстрее выходит на свою горизонтальную асимптоту $\Psi = 1$. При изменении λ происходит сжатие графиков ФП, ФР и $\Psi(t)$ вдоль оси времени с коэффициентом λ_2/λ_1 , поскольку $\mu = c\lambda$, $c := \beta/(\beta - \gamma) > 0$, все эти функции зависят от аргумента $x := \lambda t$. В частности, значение Ψ в точке минимума t_* не зависит от λ , а $\lambda t_* = x_*$, где x_* – критическая точка $\Psi(x)$.

На рис. 2б приведены графики $\Psi(t)$ для модели Кельвина с $\lambda = 0,1$, $\beta = 1$ ($A = 1$) и различными γ/β : $\gamma = 0,5; 0,75; 0,9; 0,98$ (соответственно $B = 0,5; 3; 9; 49$, $\mu = 0,2; 0,4; 1; 5$). С ростом γ , точнее, с убыванием параметра $(\beta - \gamma)/\beta = \Pi(0)/\Pi(\infty)$, графики $\Psi(t)$ опускаются вниз, точки минимума смещаются влево, минимальное значение уменьшается. Когда $\gamma \rightarrow \beta - 0$, $\min \Psi(t) \rightarrow 0$, семейство $\Psi(t)$ сходится поточечно на луче $t > 0$ (и по нормам $L_p[0; +\infty)$ и $C[\delta; +\infty)$, $\delta > 0$) к $\Psi_F(t)$ модели Фойгта (красная штриховая линия) с тем же $\lambda = 0,1$ и $\eta = (\beta\lambda)^{-1} = 10$ (в точке $t = 0$ сходимости нет: $\Psi(0) - \Psi_F(0) = 1$). Для сравнения на рис. 2 показаны ПФРФП двух моделей Максвелла $\Psi(t) = (\lambda t + 1)e^{-\lambda t} : 1$ с тем же $\lambda = 0,1$ (временем релаксации $\tau = 1/\lambda = 10$ – синяя штриховая линия), 2) с таким же временем релаксации, как у модели Кельвина с $\gamma/\beta = 0,5$ ($\lambda = \mu = 0,2$, $\tau = 5$) – штрихпунктирная линия.

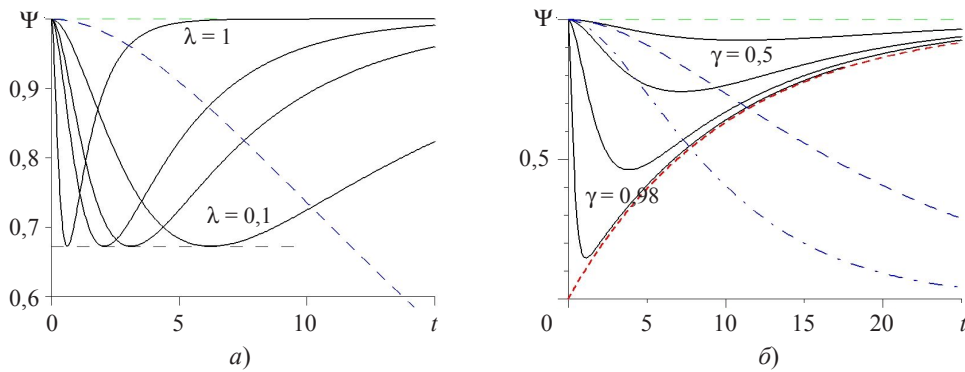


Рис. 2

Даже для простейшей (регулярной) модели Кельвина популярное представление о том, что $\Psi(t) \approx 1$, выполняется лишь для $(\beta - \gamma)/\beta > 0,5$, т.е. $\Pi(0)/\Pi(\infty) > 0,5$, а в противном случае (при $\gamma/\beta > 0,5$) отклонение $\sup |1 - \Psi(t)|$ превышает 0,1, а относительное отклонение $[1 - \Psi(t)]/\Psi(t)$ может быть сколь угодно большим при $\gamma/\beta \rightarrow 1$. Отклонение по норме L_p конечно и допускает точную оценку:

$$\|\Psi(t) - 1\|^p < \int_0^{\infty} |1 - \Psi_F(t)|^p dt = (p\lambda)^{-1};$$

$\|\Psi(t) - 1\|$ может быть сколь угодно велика для моделей с большим $\tau = \lambda^{-1}$ и $\gamma/\beta \approx 1$.

ПФРФП модели стандартного тела (4), (6) имеет вид:

$$\Psi(t) = \alpha t + \beta - \gamma e^{-\lambda t} (Ae^{-\mu_1 t} + Be^{-\mu_2 t});$$

$\Psi(0) = 1$, $\dot{\Psi}(0) = 0$, так как $\Pi(0) > 0$ и $\dot{\Pi}(0) = \infty$. Но $\Psi(\infty) = 0$ (как и у модели Максвелла), ибо $\Psi(t) \sim A\alpha e^{-\mu_1 t}$. В отличие от монотонной ПФРФП модели Максвелла, ПФРФП стандартного тела (4) может иметь две точки экстремума, если отношение μ_2/μ_1 достаточно велико. На рис. 3 приведены графики ПФРФП МСТ (4) с $\beta = \lambda = 1$, $\gamma = 0,5$ ($\mu_i := \alpha + 1 \mp (\alpha^2 + 1)^{0,5}$, и μ_2/μ_1 не меняется при замене α на α^{-1}) и разными значениями α : $\alpha = 0,05; 0,1; 0,5; 1; 5; 10$. Вертикальная стрелка на рис. 3–6 показывает направление возрастания параметра.

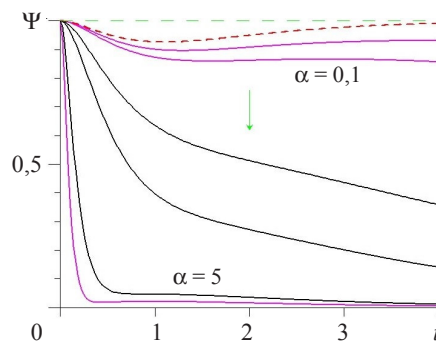


Рис. 3

При достаточно больших и достаточно малых α ($\alpha \geq 10$ и $\alpha \leq 0,1$ – когда $\mu_2/\mu_1 > 20$) функция $\Psi(t)$ теряет монотонность и зарождаются две точки экстремума (см. розовые кривые). Оранжевой штриховой линией приведен график $\Psi_0(t)$ для

модели Кельвина с $\alpha = 0, \beta = \lambda = 1, \gamma = 0,5$ ($\mu = 2, A = 1, B = 1$), к которому сходится при $\alpha \rightarrow 0$ семейство $\Psi(t, \alpha)$ в любой точке $t \geq 0$. Сходимости по нормам пространств $L_p[0; +\infty)$ и $C[0; +\infty)$ нет, поскольку $\Psi_0(\infty) = 1$, а $\Psi(\infty, \alpha) = 0$.

3. ПФРФП трехзвенных сингулярных моделей

Поскольку $\Pi(0) = \beta - \gamma$, то ФП (4) порождает СиМ тогда и только тогда, когда $\gamma = \beta$. При $\alpha = 0$ это модель Фойгта, а если $\alpha > 0$, то семейство ФП

$$\Pi(t) = \alpha t + \beta - \beta e^{-\lambda t}, \quad \alpha, \beta, \lambda > 0 \quad (7)$$

порождает все трехзвенные СиМ (см. рис. 1б) и ньютоновскую жидкость при $\lambda\beta = 0$.

При $\gamma = \beta$ знаменатель (5) вырождается (ДУ второго порядка вырождается в ДУ первого порядка и имеет один корень $p = -v$, $v := \alpha\lambda(\alpha + \beta\lambda)^{-1}$):

$$\tilde{R}(p) = \eta \frac{p + \lambda}{p + v} = \eta \frac{A}{p + v},$$

$$\eta := (\alpha + \beta\lambda)^{-1}, \quad A := \eta(\lambda - v) = \beta\lambda^2\eta^2 = v^2\beta\alpha^{-2} > 0.$$

Тогда

$$R(t) = \eta\delta(t) + Ae^{-vt}. \quad (8)$$

Эта ФР содержит сингулярность, локализованную в точке $t = 0$, убывает и выпукла вниз при $t > 0$, $R(0+) = A$, $R(\infty) = 0$. Очевидно, что $\eta < \alpha^{-1}$ и $0 < v < \lambda$. Для регулярных трехзвенных моделей, наоборот, показатель ФР $\mu > \lambda$, т.е. время релаксации меньше времени ползучести; всегда $\mu_1 < v < \lambda < \mu < \mu_2$. С ростом $\lambda \in (0, \infty)$ параметры v и A возрастают (и ограничены: $\sup v(\lambda) = \alpha/\beta$, $\sup A(\lambda) = \beta^{-1}$), а вязкость $\eta(\lambda)$ убывает. Параметр $v(\alpha)$ возрастает (но ограничен: $\sup v(\alpha) = \lambda$), а $\eta(\alpha)$ и $A(\alpha)$ убывают. С ростом β параметры v и η убывают, а $A(\beta)$ имеет точку максимума $\beta_* = \alpha/\lambda$.

При $\lambda \rightarrow 0$ (как и при $\beta \rightarrow 0$) семейства ФП (7) и соответствующих ФР (8) сходятся к ФП и ФР вязкого элемента: $A \rightarrow 0$, $v \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow \alpha^{-1} = \sup \eta(\beta, \lambda)$. При $\lambda \rightarrow \infty$ имеем $\eta \rightarrow 0 = \inf \eta(\lambda)$, $v \rightarrow \alpha/\beta = \sup v(\lambda)$, $A \rightarrow \beta^{-1} = \sup A(\lambda)$, ФП (7) и ФР (8) стремятся на интервале $t > 0$ к ФП и ФР модели Максвелла. При $\alpha \rightarrow 0$ получаются ФП и ФР модели Фойгта: $\eta \rightarrow \eta_F = (\beta\lambda)^{-1} = \sup \eta(\alpha)$, $v = \alpha\lambda v \rightarrow 0$,

$$\Psi(t) = Ae^{-vt}(\alpha t + \beta - \beta e^{-\lambda t}) = \lambda^2(\theta + \lambda)^{-2}e^{-vt}(\theta t + 1 - e^{-\lambda t}), \quad \theta := \alpha/\beta, \quad t > 0. \quad (9)$$

Поскольку $v = \lambda\theta/(\theta + \lambda)$, то семейство (9) зависит только от λ и отношения α/β . Легко видеть, что $\Psi(0+) = 0$, $\Psi(\infty) = 0$ (и $\Psi(0) = A/\eta = \lambda - v > 0$ как и у модели Фойгта), т.е. ПФРФП имеет совсем иной вид, чем принято считать (рис. 4): $\Psi(t)$ не обращается в единицу на концах интервала, имеет точку максимума, а не минимума, ее значения ближе к нулю, чем к единице. Видно, что $\sup \Psi(t) < 0,3$ уже при $\theta \geq 1$, а при $\theta \rightarrow \infty$ (в частности, при $\alpha \rightarrow \infty$ или $\beta \rightarrow 0$) семейство $\Psi(t, \theta, \lambda)$ равномерно сходится к нулевой функции на $[0; \infty]$. Это же верно и при $\lambda \rightarrow 0$ (тогда $\eta \rightarrow \alpha^{-1}$, $A \rightarrow 0$ и $v \rightarrow 0$, т.е. время релаксации $1/v \rightarrow \infty$): равномерная сходимость на любом отрезке $[0; T]$ следует из оценки $\Psi(t) \leq \lambda^2\theta^2(\theta T + 1)$, а совместно с существованием предела $\Psi(\infty) = 0$ она влечет равномерную сходимость к нулю на всем луче $[0; \infty)$ как при $\lambda \rightarrow 0$, так и при $\theta \rightarrow \infty$.

На рис. 4 приведены ПФРФП (9) с $\gamma = \beta = 1$ (тогда $\theta = \alpha$), $\lambda = 1$ и разными $\alpha = 10; 1; 0,5; 0,25; 0,1; 0,01$ (тогда $v = 10/11; 1/2; 1/3; 1/5; 1/11; 1/101$, $\eta = 1/11; 1/2; 2/3;$

4/5; 10/11; 100/101). С уменьшением α вязкость η и время релаксации $\tau = \nu^{-1}$ возрастают (в 10 и 100 раз соответственно), графики $\Psi(t)$ поднимаются вверх, точка максимума сдвигается вправо, и кривая все медленнее опускается на свою асимптоту $\psi = 0$. При $\alpha \rightarrow 0$ имеем: $\eta \rightarrow \eta_F = (\beta\lambda)^{-1} = 1$, $\nu \rightarrow 0$ и $\Psi(t) \rightarrow \Psi_F(t)$. При $\alpha \rightarrow \infty$ семейство $\Psi(t, \alpha) \rightarrow 0$ равномерно на $[0; \infty)$.

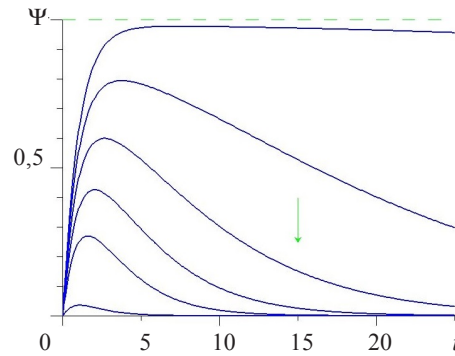


Рис. 4

Насколько разнообразны по очертаниям могут быть графики $\Psi(t)$ даже только трехзвенных моделей с ФП (4), показывает рис. 5.

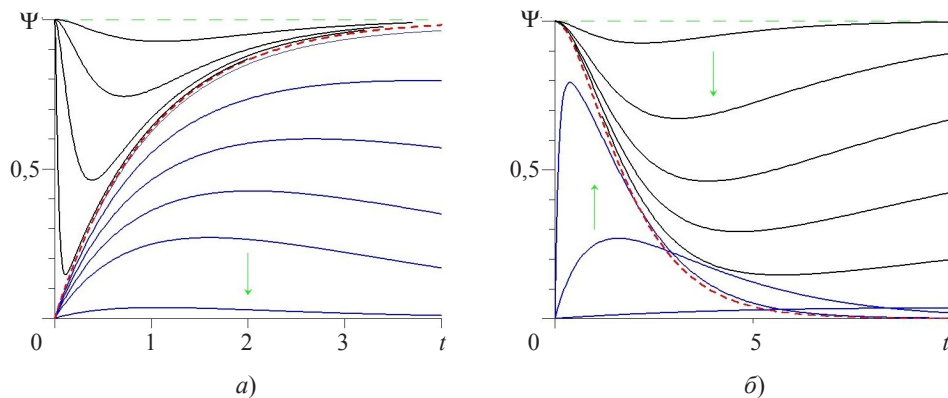


Рис. 5

На рис. 5а приведены ПФРФП модели Фойгта с $\lambda = 1$ (красным пунктиром), сходящееся к нему сверху при $\gamma/\beta \rightarrow 1$ семейство ПФРФП регулярных моделей (Кельвина с $\lambda = 1$) и сходящееся к нему же при $\theta \rightarrow 0$ – но снизу – семейство ПФРФП трехзвенных СиМ (9) (с $\lambda = 1$ и $\theta = 10; 1; 0,5; 0,25; 0,1; 0,01$). Регулярные модели хорошо приближают $\Psi_F(t)$ сверху вне окрестности нуля (отклонение в нуле $\Psi(0) - \Psi_F(0) = 1$ для любых значений МП γ/β и λ , сходимость равномерна на любом луче $[t_+; \infty)$, $t_+ > 0$), а сингулярные, наоборот, – хорошо при малых t и плохо при больших ($\Psi(t) \rightarrow 0$, а $\Psi_F(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow \infty$ для любых значений МП θ и λ , сходимость $\Psi(t) \rightarrow \Psi_F(t)$ равномерна на любом отрезке $[0; t_+]$, $t_+ > 0$, сходимости к $\Psi_F(t)$ в пространствах $C[0; \infty)$ и $L_p[0; \infty)$ нет).

На рис. 5б приведены ПФРФП модели Максвелла ($\Psi_M(t) = e^{-\theta t}(\theta t + 1)$) с $\alpha = 1$ и $\theta = 1$ (красная штриховая линия), сходящееся к нему сверху (при $\beta \rightarrow \infty$, $\gamma = \beta - 1$, $\lambda = \beta^{-1}$) семейство ПФРФП регулярных моделей ($\beta = 2; 5; 10; 20; 50$) и сходящееся

к нему же при $\lambda \rightarrow \infty$ (тогда $\nu \rightarrow \alpha/\beta = \theta$) семейство ПФРФП трехзвенных СиМ ($\gamma = \beta = 1, \alpha = 1, \lambda = 0, 1; 1; 10$ – синие кривые). При $\lambda \rightarrow 0$ семейство $\Psi(t, \lambda)$ (синие кривые) равномерно сходится к нулевой функции на $[0; \infty)$, с ростом λ максимум кривых смещается влево и заостряется. С убыванием β ПФРФП регулярной модели поднимаются выше, и при $\beta = 1$ (тогда $\gamma = 0, B = 0, A = 1$ и модель превращается в упругую) совпадает с $\Psi(t) \equiv 1$.

4. ПФРФП четырехзвенных сингулярных моделей

Модель стандартного тела – последовательное соединение моделей Фойгта и Максвелла. Рассмотрим их параллельное соединение (ФР – сумма ФР подмоделей):

$$R(t) = \eta \delta(t) + r + A e^{-\nu t}, \quad (10)$$

где $r := E_F > 0, \eta := \eta_F > 0, A := E_M > 0, \nu := E_M/\eta_M > 0$. Эта ФР положительна, убывает и выпукла вниз при $t > 0, R(\infty) = r$. При $r = 0$ получается трехзвенная СиМ (8); при $A = 0$ или $\nu = 0$, или $\nu \rightarrow \infty$ – модель Фойгта. При $\eta = 0$ (10) вырождается в (регулярную) модель Кельвина; если еще и $r = 0$ – в модель Максвелла.

ФП строится с помощью преобразования Лапласа:

$$\begin{aligned} \tilde{R}(p) &= \eta + r p^{-1} + A(p + \nu)^{-1}, \\ \tilde{\Pi}(p) &= [\tilde{R}(p) p^2]^{-1} = \frac{p + \nu}{p[\eta p^2 + (\eta \nu + r + A)p + r \nu]}. \end{aligned}$$

Дискриминант $D = (\eta \nu + r + A)^2 - 4\eta r \nu = (\eta \nu + A - r)^2 + 4rA > 0$, поэтому знаменатель (характеристический многочлен) всегда имеет три различных (неположительных) корня: $p = 0$ и $p = -\lambda_i$, где

$$\lambda_i := 0,5\eta^{-1} \left(\eta \nu + A + r \mp \sqrt{(\eta \nu + A - r)^2 + 4rA} \right) = 0,5M \mp \sqrt{0,25M^2 - r\nu\eta^{-1}} > 0.$$

Всегда $\lambda_1 < \nu < \lambda_2; \lambda_1 < \eta^{-1} \min \{r, \eta \nu + A\}, \lambda_2 > \eta^{-1} \max \{r, \eta \nu + A\}; \lambda_2 - \lambda_1 = \eta^{-1} \sqrt{D}, \lambda_1 \lambda_2 = r\nu\eta^{-1}$. При $r\nu\eta^{-1} \rightarrow 0$ будет $\lambda_1 \rightarrow 0$; при $\eta \rightarrow \infty$ имеем $\lambda_2 \rightarrow \nu$, при $\nu \rightarrow 0 - \lambda_2 \rightarrow (A + r)^{-1}$.

Разложение $\tilde{\Pi}(p)$ на элементарные дроби имеет вид:

$$\tilde{\Pi}(p) = C p^{-1} + B_1 (p + \lambda_1)^{-1} + B_2 (p + \lambda_2)^{-1},$$

где

$$C = r^{-1}, \quad B_1 = (\lambda_1 - \nu)[\eta \lambda_1 (\lambda_2 - \lambda_1)]^{-1} = (1 - \nu \lambda_1^{-1}) D^{-0,5},$$

$$B_2 = (\nu - \lambda_2)[\eta \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)]^{-1} = (\nu \lambda_2^{-1} - 1) D^{-0,5}.$$

При этом $C = -(B_1 + B_2)$, а так как $\lambda_1 < \nu < \lambda_2$, то $B_i < 0$. В итоге ФП имеет вид:

$$\Pi(t) = C + B_1 e^{-\lambda_1 t} + B_2 e^{-\lambda_2 t} = \beta_1 (1 - e^{-\lambda_1 t}) + \beta_2 (1 - e^{-\lambda_2 t}), \quad \beta_i := -B_i > 0. \quad (11)$$

Эта ФП положительна, возрастает и выпукла вверх, т.е. допустима. Она совпадает с ФП последовательного соединения двух моделей Фойгта с разными временами релаксации $\tau_i = 1/\lambda_i; \Pi(0) = 0, \Pi(\infty) = \beta_1 + \beta_2 = r^{-1}, \dot{\Pi}(0) = \beta_1 \lambda_1 + \beta_2 \lambda_2 = \eta^{-1}$.

При $r \rightarrow 0$ ФР (10) сходится к ФР трехзвенной СиМ (7), а с ФП ситуация менее прозрачна: ограниченная ФП (11) стремится к неограниченной ФП (7) с одной экспонентой за счет роста $\Pi(\infty) = r^{-1}$ и за счет того, что $\lambda_1 \rightarrow 0, \lambda_2 \rightarrow \nu + A\eta^{-1}$.

ПФРФП этой модели

$$\Psi(t) = [r + Ae^{-\nu t}] [\beta_1(1 - e^{-\lambda_1 t}) + \beta_2(1 - e^{-\lambda_2 t})], \quad t > 0;$$

$\Psi(0) = 0, \Psi(\infty) = r(\beta_1 + \beta_2) = 1$ – как у модели Фойгта, $\dot{\Psi}(0) = (A + r)/\eta = E/\eta > 0$. Однако ПФРФП модели (10) не обязана быть монотонной: при достаточно большом λ_2/λ_1 функция $\Psi(t)$ имеет две точки экстремума.

На рис. 6 приведены ПФРФП модели (10) с $\eta = A = \nu = 1$ и разными r : $r = 3; 1; 0,5; 0,2; 0,1; 0,01$ ($\lambda_i := 0,5(2 + r \mp \sqrt{r^2 + 4})$). При $r < 0,25$ $\Psi(t)$ обретает точки экстремума. При $r \rightarrow 0$ $\lambda_1 \rightarrow 0, \lambda_2/\lambda_1 \rightarrow \infty$, и семейство $\Psi(t, r)$ сходится к ПФРФП (9) сингулярной трехзвенной модели (7) (синяя штриховая линия); сходимость равномерна на любом отрезке $[0, T]$. При $r \rightarrow \infty$ семейство $\Psi(t, r)$ сходится к $\Psi \equiv 1$ на луче $t > 0$ (начальный участок становится практически вертикальным уже при $r > 5$). Красный штрихпунктир – ПФРФП модели Фойгта ($\nu = 0$) с $r = 3, A = 1, \lambda_2 = 4$.

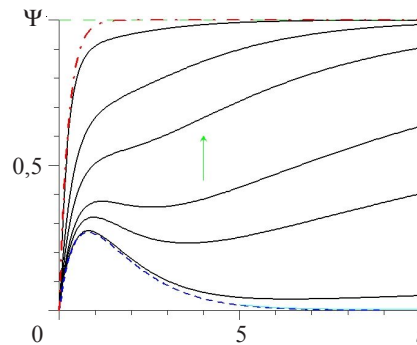


Рис. 6

5. ПФРФП степенной модели

В [11] рассмотрена двухпараметрическая модель с неограниченной ФР $R(t) = At^{-\alpha}, \alpha \in (0; 1), A > 0$. Соответствующая ФП построена как решение ИУ (3): $\Pi(t) = A^{-1}C(\alpha)t^\alpha$, где $C(\alpha) := (\alpha\pi)^{-1}\sin \alpha\pi$. Очевидно, что эта ФП положительна, возрастает и выпукла вверх (т.е. допустима), $\Pi(0+) = 0, \dot{\Pi}(0+) = +\infty, \Pi(\infty) = \infty$.

При $\alpha \rightarrow 0+$ семейство ФП сходится на $(0, +\infty)$ к постоянной функции $\Pi(t) = A^{-1}$ равномерно на любом отрезке, а семейство ФР сходится к постоянной $R(t) = A$, т.е. в пределе степенная модель дает упругий элемент с $E = A$. При $\alpha \rightarrow 1-0$ и $A = \text{const}$ семейство ФП равномерно сходится к нулевой функции на любом отрезке оси времени. Если же $A = \eta(1 - \alpha), \eta = \text{const}$, то при $\alpha \rightarrow 1-0$ семейство ФП сходится к линейной функции $\Pi = t/\eta$, а семейство ФР является дельтаобразным, т.е. сходится к $R = \eta\delta(t)$ и в пределе дает вязкий элемент. Таким образом, семейство неограниченных ФР связывает «гомотопией» упругий элемент с вязким – так же, как их связывают двухпараметрические семейства моделей Максвелла (они регулярны) и Фойгта (они сингулярны). Отметим, что степенная модель может быть получена заменой оператора дифференцирования в модели линейно-вязкой жидкости на оператор дробного дифференцирования порядка α .

Для степенной ФР при любых значениях параметров ПФРФП *не зависит от времени*: $\Psi(t) = C(\alpha), t > 0$ – как и для случая упругого элемента (для него $\Psi(t) \equiv 1$) и для случая вязкого элемента ($\Psi(t) \equiv 0$). Непрерывная функция $C(\alpha)$ убывает на

(0; 1), ее предельные значения: $C(0+) = 1$ и $C(0-0) = 0$, область значений – интервал (0; 1).

Заключение

Изучены свойства произведения ФР и ФП (в частности, для всех – регулярных и сингулярных – трех- и четырехзвенных структурных реологических моделей и моделей с неограниченными степенными ФР); обнаружены свойства, сильно отличающиеся от тех, которые принято считать универсальными. Нуждаются в коррекции несколько распространенных (даже среди специалистов) представлений.

1. Утверждение, что ПФРФП мало отличается от единицы, неверно: оно не выполняется даже для классических моделей Максвелла, Фойгта, Кельвина, Пойнтинга и стандартного тела, отклонение $\sup |1 - \Psi(t)|$ может сколь угодно мало отличаться от единицы, относительное отклонение $|1 - \Psi(t)|/\Psi(t)$ может быть сколь угодно большим, отклонение по норме $L_p[0; +\infty]$ бесконечным, а $\|\Psi(t) - 0\|$ может быть сколь угодно мала в любом из пространств $C[0; +\infty]$, $C^1[0; +\infty]$, $W_p^1[0; +\infty]$ (например, для трехзвенной сингулярной модели).

2. ПФРФП не обязательно имеет ровно одну точку экстремума (минимума): $\Psi(t)$ может возрастать, убывать, иметь несколько экстремумов.

3. Если $R(\infty) = 0$, то может нарушаться равенство $\Psi(\infty) = 1$, а если $\Pi(0) = 0$ (т.е. ФР неограничена или сингулярна), то может не выполняться свойство $\Psi(0+) = 1$.

4. Общеизвестные равенства $\Pi(0) = 1/R(0)$ и $\Pi(\infty) = 1/R(\infty)$ в случаях $\Pi(0) = 0$ или $R(\infty) = 0$ нельзя трактовать как $\Pi(t)R(t) \rightarrow 1$: пределы $\Psi(0+)$ и $\Psi(\infty)$ могут принимать любые значения из $[0; 1]$.

Исследование трех- и четырехзвенных реологических моделей и степенной ФР позволяет сделать вывод [11]: относительно малое значение уклонения $\|\Psi(t) - 1\|$ на некотором интервале времени сигнализирует о том, что поведение ОС (1) с данной ФР близко к упругому на этом интервале (степенная модель с малым α или трехзвенные регулярные реологические модели с близким к нулю временем релаксации при $t < \tau$ и $t > \tau$), а малое значение уклонения ПФРФП от нулевой функции на некотором интервале времени свидетельствует о том, что модель близка к ньютоновской жидкости. Такая диагностика более информативна и точна, чем общепринятое деление моделей на жидкости и твердые тела лишь по предельному значению ФР: $R(\infty) = 0$ или $R(\infty) > 0$.

Степенная модель интересна тем, что демонстрирует «ровное» поведение на всей полуоси времени – в отличие от большинства классических моделей, которые при малых временах $t/\tau < 1$ (и больших скоростях деформации, когда велико значение безразмерного параметра $\dot{\epsilon}\tau$) ведут себя как твердые тела (например, регулярные модели: Максвелла, Кельвина, «стандартного тела», параллельные соединения любого количества моделей Максвелла) или как жидкости (сингулярные модели: последовательные соединения моделей Фойгта, модели на рис. 1б и т.п.), а при больших временах (и малых скоростях) могут сменить поведение на противоположное (модели Максвелла и их параллельные соединения, в частности «стандартное тело», ведут себя как жидкости, а модели Фойгта и их последовательные соединения – как твердые тела).

Список литературы

1. *Ильюшин А.А., Победря Б.Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970. 280 с.
2. *Кристенсен Р.* Введение в теорию вязкоупругости. М.: Мир, 1974. 338 с.
3. *Бугаков И.И.* Ползучесть полимерных материалов. М.: Наука, 1973. 287 с.
4. *Работнов Ю.Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. М.: Наука, 1977. 384 с.
5. *Виноградов Г.В., Малкин А.Я.* Реология полимеров. М.: Химия, 1977. 440 с.
6. *Колтунов М.А., Майборода В.П., Зубчанинов В.Г.* Прочностные расчеты изделий из полимерных материалов. М.: Машиностроение, 1983. 239 с.
7. *Работнов Ю.Н.* Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1988. 712 с.
8. *Георгиевский Д.В., Климов Д.М., Победря Б.Е.* Особенности поведения вязкоупругих моделей // Изв. РАН. МТТ. 2004. №1. С. 119–157.
9. *Tschoegl N.W.* The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior. Berlin: Springer, 1989. 584 p.
10. *Lakes R.S.* Viscoelastic Materials. UK: Cambridge Univ. Press, 2009. 462 p.
11. *Хохлов А.В.* Качественный анализ линейных определяющих соотношений вязкоупругости. Свойства теоретических кривых деформирования, функций ползучести и релаксации и их произведения: Отчет о НИР / Инв. № 5218. НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова. М., 2013. № ГР 01201152141. 93 с.
12. *Хохлов А.В.* Нелинейные модели вязкоупругости типа Максвелла. Особенности их поведения, скоростная чувствительность и возможность использования для описания ползучести и сверхпластичности материалов: Отчет о НИР / Инв. № 5193. НИИ механики МГУ им. М.В. Ломоносова. М., 2013. № ГР 01201152141. 108 с.
13. *Хохлов А.В.* Кривые обратной ползучести в рамках линейной вязкоупругости и необходимые ограничения на функцию ползучести // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2013. Вып. 75. Ч. 4. С. 257–267.
14. *Колтунов М.А.* Влияние режимов нагружения на механические характеристики, ползучесть и релаксацию стеклопластика // Вестник МГУ. Сер. I. Математика, механика. 1965. № 4. С. 78–89.

References

1. *Ilyushin A.A., Pobedrya B.E.* Osnovy matematicheskoy teorii termovyazkoupругosti. M.: Nauka, 1970. 280 s.
2. *Kristensen R.* Vvedenie v teoriyu vyzkoupругosti. M.: Mir, 1974. 338 s.
3. *Bugakov I.I.* Polzuchest' polimernykh materialov. M.: Nauka, 1973. 287 s.
4. *Rabotnov Yu.N.* Elementy nasledstvennoy mehaniki tverdykh tel. M.: Nauka, 1977. 384 s.
5. *Vinogradov G.V., Malkin A.A.* Reologiya polimerov. M.: Khimiya, 1977. 440 s.
6. *Koltunov M.A., Mayboroda V.P., Zubchaninov V.G.* Prochnostnye raschety izdeliy iz polimernykh materialov. M.: Mashinostroeniye, 1983. 239 s.
7. *Rabotnov Yu.N.* Mekhanika deformiruемого tverdogo tela. M.: Nauka, 1988. 712 s.
8. *Georgievskiy D.V., Klimov D.M., Pobedrya B.E.* Osobennosti povedeniya vazkoupругikh modeley // Izv. RAN. MTT. 2004. №1. S. 119–157.
9. *Tschoegl N.W.* The phenomenological theory of linear viscoelastic behavior. Berlin: Springer, 1989. 584 p.
10. *Lakes R.S.* Viscoelastic Materials. UK: Cambridge Univ. Press, 2009. 462 p.
11. *Khokhlov A.V.* Kachestvennyy analiz lineynykh opredelyayushchikh sootnosheniy vyzkoupругosti. Svoystva teoreticheskikh krivykh deformirovaniya, funktsiy polzuchesti i relaksatsii i ikh proizvedeniya: Otchet o NIR / Inv. № 5218. NII mekhaniki MGU im. M.V. Lomono-sova. M., 2013. № GR 01201152141. 93 s.

12. *Khokhlov A.V.* Nelineynye modeli vyazkouprugosti tipa Maksvella. Osobennosti ikh povedeniya, skorostnaya chuvstvitel'nost' i vozmozhnost' ispol'zovaniya dlya opisaniya polzuchesti i sverkhplastichnosti materialov: Otchet o NIR / Inv. № 5193. NII mekhaniki MGU im. M.V. Lomonosova. M., 2013. № GR 01201152141. 108 s.

13. *Khokhlov A.V.* Krivye obratnoy polzuchesti v ramkakh lineynoy vyazkouprugosti i neobkhodimye ogranicheniya na funktsiyu polzuchesti // Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhvuz. sb. / Nizhegorod. un-t. 2013. Vyp. 75. Ch. 4. S. 257–267.

14. *Koltunov M.A.* Vliyaniye rezhimov nagruzheniya na mekhanicheskie kharakteristiki, polzuchest' i relaksatsiyu stekloplastika // Vestnik MGU. Ser.1. Matematika, mekhanika. 1965. №4. S. 78–89.

GENERAL PROPERTIES AND PECULIARITIES OF CREEP AND RELAXATION FUNCTIONS PRODUCT IN LINEAR VISCOELASTICITY

Khokhlov A.V.

Linear integral constitutive equation of viscoelasticity with an 'arbitrary' creep function is studied analytically. Interconversion equation is used to reveal some properties of creep and relaxation functions point-wise product (CRFP) which differs from those commonly considered universal. It is shown that even for classical rheological models (consisting of three or four spring and dashpot elements) CRFP (as the function of time) can increase or decrease on the whole semi-axis and can have more than one extremum point, that CRFP limits at zero and infinite points are not necessarily equal to unity and can assume any values lying in the unit segment, that CRFP can be vanishing at the whole time semi-axis (it can be close to zero in maximum norm, rather than to unit function). A method to estimate 'liquid' or 'solid' behavior of any model within a certain time range is proposed. It is based on CRFP end limits and magnitudes of norms of CRFP residuals from unit and zero functions. Such a diagnostics is much more informative and precise than commonly accepted binary classification of models taking into account the only one limit value of a relaxation function at infinite point (if it is equal to zero a model is called 'liquid', if none it is called 'solid').

Keywords: linear viscoelasticity, constitutive equation, integral operator, creep compliance, relaxation modulus, point-wise product, interconversion equation, rheological models, regular and singular models.