

УДК 539.4

**СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ МОДЕЛЕЙ
ИЗГИБНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ АРМИРОВАННЫХ
БАЛОК-СТЕНОК ИЗ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГИХ МАТЕРИАЛОВ***

© 2014 г.

Романова Т.П., Янковский А.П.

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск, Российская Федерация*

lab4nemir@rambler.ru

Поступила в редакцию 22.09.2014

На основе представления деформаций поперечного сдвига в виде полиномов высоких порядков по поперечной пространственной координате и в предположении об отсутствии обжатия и пренебрежении нормальными напряжениями в поперечном направлении в рамках геометрически линейной постановки сформулирована задача квазистатического деформирования продольно армированных балок-стенок из нелинейно-упругих несжимаемых материалов при их изгибе. В рамках построенной теории тождественно выполняются статические граничные условия по касательным напряжениям на верхней и нижней торцевых поверхностях изгибаемых балок-стенок. При надлежащем выборе значений функции переключения из полученных соотношений как частные случаи вытекают классическая теория Бернулли и оба варианта теории Тимошенко, учитывающей ослабленное сопротивление поперечным сдвигам в продольно армированных балках. Для статически определимых балок разработан итерационный процесс решения поставленной нелинейной двухточечной граничной задачи, базирующийся на идее метода секущего модуля. На примере исследования механического поведения шарнирно опертой балки показано, что при нелинейно-упругом поведении материалов фаз ее композиции ни классическая теория, ни оба варианта теории Тимошенко не гарантируют получения надежных результатов в пределах 5%-ной инженерной точности. Для проведения достоверных расчетов требуется использование уточненных теорий, позволяющих учитывать кромочные эффекты в фазовых материалах.

Ключевые слова: продольное армирование, балки-стенки, нелинейно-упругое деформирование, теории Тимошенко, теория Бернулли, уточненные теории изгиба.

В статье [1] на базе определяющих соотношений деформационного типа и второго варианта теории Тимошенко была исследована проблема нелинейно-упругого деформирования изгибаемых продольно армированных балок-стенок и было показано, что учет ослабленного сопротивления поперечному сдвигу в таких задачах обязателен, иначе классическая теория Бернулли в определенных ситуациях, пред-

* Выполнено при поддержке РФФИ (грант 14-01-90400-Укр_а).

угадать заранее которые не представляется возможным, предсказывает неоправданно заниженную податливость таких конструкций. Однако в [1] не был выяснен вопрос о том, является ли достаточно точным решение, полученное в рамках второго варианта теории Тимошенко, или требуется его дальнейшее уточнение. В случаях линейно-упругого деформирования тонкостенных композитных элементов конструкций типа пластин и оболочек в [2, 3] было показано, что решения, полученные на основе второго варианта теории Тимошенко, не требуют дополнительного уточнения. Однако этот результат не может быть автоматически (без специального обоснования) перенесен на случай нелинейно-упругого или упругопластического деформирования армированных конструкций.

Кроме того, для расчета механического поведения изотропных и композитных тонкостенных элементов конструкций широко используется первый вариант теории Тимошенко как в линейно-упругом [4–6 и др.], так и неупругом [5, 7, 8 и др.] случаях поведения их материалов. Верификации этого варианта теории Тимошенко посвящены, например, публикации [9, 10 и др.]. Так, в работе [9] показано, что при локализованных импульсных нагрузках теория Тимошенко вполне приемлема для расчета упругопластической динамики изотропных цилиндрических оболочек, если в осевом направлении зона приложения нагрузки больше удвоенной толщины. В [10] на основе сопоставления собственных частот колебаний слоистых линейно-упругих балок выясняется вопрос о границах применимости первого варианта теории Тимошенко, при этом в качестве эталона используются результаты расчетов по теории ломаной линии [6]. В монографии [11] проводится сравнение результатов расчетов динамической устойчивости, выполненных для ортотропных линейно-упругих оболочек по классической теории Кирхгофа–Лява и первому варианту теории Тимошенко, причем в качестве эталонного используется расчет по теории Тимошенко.

Однако все эти исследования не дают ответа на вопрос о приемлемости первого варианта теории Тимошенко для расчета нелинейно-упругого или упругопластического изгиба армированных тонкостенных элементов конструкций как при локализованном, так и распределенном их нагружении.

В связи с этим настоящее исследование посвящено построению более точного (чем в рамках теорий Тимошенко) класса решений нелинейно-упругого изгиба продольно армированных балок-стенок, из которого как частные случаи получаются классическая теория Бернулли и второй вариант теории Тимошенко, а также проведению сравнительного анализа решений, полученных на базе классической теории, обоих вариантов теории Тимошенко и более точных соотношений.

Для описания ослабленного сопротивления продольно армированной балки-стенки поперечному сдвигу деформацию ε_{13} зададим распределенной по высоте балки (по переменной x_3) в виде конечной суммы степенного ряда:

$$\varepsilon_{13}(x_1, x_3) = \frac{h^2 - \beta x_3^2}{h^2} \sum_{k=0}^K x_3^k \varepsilon_{13}^{(k)}(x_1), \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (1)$$

где h – полувысота балки; L – ее длина; $\varepsilon_{13}^{(k)}(x_1)$ – одномерные функции, подлежащие определению; β – параметр переключения, позволяющий выбрать тот или иной вариант теории Тимошенко; x_1, x_2, x_3 – прямоугольная декартова система координат, связанная с балкой, как показано на рис. 1. Высота $2h$ балки-стенки и ее толщина B в направлении x_2 предполагаются постоянными (хотя это и не принципиально).

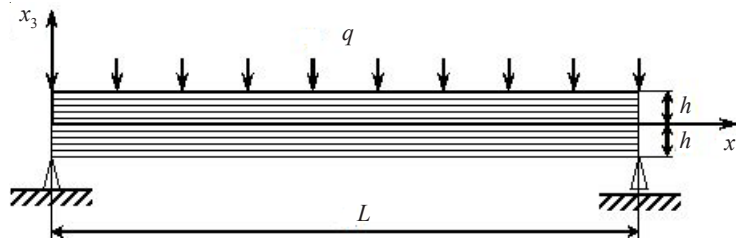


Рис. 1

Если в (1) принять $\varepsilon_{13}^{(k)}(x_1) \equiv 0$ ($0 \leq k \leq K$), то в дальнейшем получим соотношения, основанные на классической теории Бернулли. Если $K = 0$ и $\beta = 1$, то из (1) следуют соотношения, соответствующие второму варианту теории Тимошенко (см. [1]). При $K \geq 1$ и $\beta = 1$ получим уточнения второго варианта теории Тимошенко, а при $K = 0$ и $\beta = 0$ из (1) вытекают соотношения, соответствующие первому варианту теории Тимошенко, основанному на кинематической гипотезе прямой линии [4–6].

Отметим, что уравнения, полученные в рамках классической теории, являются первым асимптотическим приближением, а в рамках второго варианта теории Тимошенко – вторым асимптотическим приближением уравнений трехмерной теории упругости применительно к тонкостенным конструкциям [2]. Первый же вариант теории Тимошенко не является асимптотически точным.

Как и в теории Бернулли, и в обоих вариантах теории Тимошенко, далее пренебрегаем обжатием тонкостенного элемента, т.е. считаем, что прогиб u_3 не зависит от поперечной координаты x_3 . Используя дифференциальные соотношения Коши [2], с учетом (1) получим (ограничимся геометрически линейной постановкой задачи):

$$u_1(x_1, x_3) = u_1^0(x_1) - x_3 \frac{du_3}{dx_1} + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \varepsilon_{13}^{(k)}(x_1); \quad (2)$$

$$\varepsilon_{11}(x_1, x_3) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{du_1^0}{dx_1} - x_3 \frac{d^2 u_3}{dx_1^2} + 2 \sum_{k=0}^K \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) \frac{d\varepsilon_{13}^{(k)}}{dx_1},$$

$$|x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad (3)$$

где $u_1^0(x_1)$ – перемещение точек срединного слоя ($x_3 = 0$) в продольном направлении x_1 . Остальные деформации либо тождественно равны нулю, либо однозначно определяются через ε_{11} (см. [1]). В настоящем исследовании материалы компонентов композиции предполагаются несжимаемыми, что позволяет, как и в [1], использовать структурные соотношения из [12]. В равенствах (1), (3) ε_{ij} – компоненты тензора осредненных деформаций композиции.

Таким образом, в соотношениях (1)–(3) неизвестными являются функции u_1^0 , u_3 , $\varepsilon_{13}^{(k)}$ ($0 \leq k \leq K$), зависящие только от продольной координаты x_1 , причем второе слагаемое в (2) характеризует поворот поперечного сечения балки как жесткого целого, а последующие слагаемые – искажение поперечного сечения.

Как и в [1], для линеаризации рассматриваемой задачи будем использовать итерационный процесс, основанный на идее метода секущего модуля. Зная выражения для компонентов тензора деформаций ε_{11} , ε_{13} , на $(n + 1)$ -й итерации можем определить

все ненулевые компоненты напряжений в каждой точке балки-стенки (см. (7) в [1]):

$$\sigma_{11}^{n+1}(x_1, x_3) = a_{11}^n \varepsilon_{11}^{n+1}, \quad \sigma_{13}^{n+1}(x_1, x_3) = a_{55}^n \varepsilon_{13}^{n+1}, \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad n=0,1,2,\dots, \quad (4)$$

где a_{11}^n, a_{55}^n – ненулевые компоненты матрицы A в (29) из [12], известные в каждой точке тонкостенной конструкции из решения на предыдущей n -й итерации по методу секущего модуля и в рассматриваемом частном случае продольного армирования определяемые соотношениями (8) из [1].

Для простоты предполагаем, что балка нагружена только в поперечном направлении x_3 (см. рис. 1). При подстановке выражения (1) во второе соотношение (4) получаем автоматическое выполнение на верхней ($x_3 = h$) и нижней ($x_3 = -h$) горизонтальных поверхностях балки-стенки граничных условий по касательным напряжениям:

$$\sigma_{13}^{\pm}(x_1) = \sigma_{13}^{n+1}(x_1, \pm h) = a_{55}^n(x_1, \pm h) \varepsilon_{13}^{n+1}(x_1, \pm h) \equiv 0. \quad (5)$$

Именно ради выполнения граничных условий (5) в (1) перед суммой был введен множитель $h^2 - x_3^2$ при $\beta = 1$. Если касательные напряжения $\sigma_{13}^{(\pm)} \neq 0$, то граничные условия, аналогичные (5), также можно тождественно удовлетворить. Для этого в (1) нужно ввести дополнительные слагаемые подобно тому, как это сделано в [13]. В рамках же первого варианта теории Тимошенко (см. (1) при $K = 0, \beta = 0$), используемого, например, в [4, 5, 8–11 и др.], граничные условия (5) не могут быть тождественно удовлетворены.

Отметим, что в работе [9] для построения уточненной теории деформирования изотропных цилиндрических оболочек использовалось представление в рядах по полиномам Лежандра не только осевого перемещения (аналогичного u_1 , см. (2)), но и прогиба u_3 . При этом результаты уточненного расчета считались приемлемыми, если граничные условия на лицевых поверхностях оболочки по нормальным напряжениям σ_{33} выполнялись с 5%-ной точностью. Вопрос выполнения граничных условий по касательным напряжениям σ_{13} в [9] не обсуждался.

На основании выражений (4) с учетом (1), (3) можем определить $(n + 1)$ -е приближения всех внутренних силовых факторов в балке:

$$F_{11}^{n+1}(x_1) = B \int_{-h}^h \sigma_{11}^{n+1} dx_3 = A_{11}^n \frac{d}{dx_1} u_1^{n+1} - B_{11}^n \frac{d^2}{dx_1^2} u_3^{n+1} + 2 \sum_{k=0}^K C_{11}^{(k)n} \frac{d}{dx_1} \varepsilon_{13}^{(k)n+1}, \quad (6)$$

$$M_{11}^{n+1}(x_1) = B \int_{-h}^h \sigma_{11}^{n+1} x_3 dx_3 = B_{11}^n \frac{d}{dx_1} u_1^{n+1} - D_{11}^n \frac{d^2}{dx_1^2} u_3^{n+1} + 2 \sum_{k=0}^K E_{11}^{(k)n} \frac{d}{dx_1} \varepsilon_{13}^{(k)n+1},$$

$$M_{13}^{(m)n+1}(x_1) = B \int_{-h}^h \sigma_{13}^{n+1} x_3^m dx_3 = \sum_{k=0}^K A_{55}^{(m,k)n} \varepsilon_{13}^{(k)n+1}(x_1), \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad 0 \leq m \leq K, \quad (7)$$

где

$$A_{11}^n(x_1) = B \int_{-h}^h a_{11}^n dx_3, \quad B_{11}^n(x_1) = B \int_{-h}^h a_{11}^n x_3 dx_3, \quad D_{11}^n(x_1) = B \int_{-h}^h a_{11}^n x_3^2 dx_3, \\ C_{11}^{(k)n}(x_1) = B \int_{-h}^h a_{11}^n \frac{x_3^{k+1}}{h^2} \left(\frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) dx_3,$$

$$E_{11}^{(k)}(x_1) = B \int_{-h}^h a_{11}^{(k)} \frac{x_3^{k+2}}{h^2} \left(\frac{h^2}{k+1} - \frac{\beta x_3^2}{k+3} \right) dx_3, \quad (8)$$

$$A_{55}^{(m,k)}(x_1) = B \int_{-h}^h a_{55}^{(m,k)} \frac{x_3^{k+m}}{h^2} (h^2 - \beta x_3^2) dx_3, \quad A_{55}^{(m,k)} = A_{55}^{(k,m)}, \quad 0 \leq k, m \leq K, \quad 0 \leq x_1 \leq L.$$

Согласно равенству (7), при $m = 0$ имеем $M_{13}^{(0)}(x_1) = F_{13}(x_1) - (n+1)$ -е приближение поперечной силы.

Внутренние силовые факторы (6), (7) должны удовлетворять уравнениям равновесия и соответствующим им статическим граничным условиям.

В силу ограниченности объема статьи в настоящем исследовании рассмотрим лишь статически определимые балки, в которых силовые факторы $F_{11}(x_1)$, $M_{11}(x_1)$, $F_{13}(x_1)$ известны и не зависят от номера итерации n . Например, для случая, изображенного на рис. 1, они определяются соотношениями (11) из [1]. При этом в рамках классической теории Бернулли равенство (7) вообще не используется, а из двух равенств (6) (с учетом $\varepsilon_{13}^{(k)} = 0$, $0 \leq k \leq K$) однозначно определяются производные $d u_1^0 / dx_1$, $d^2 u_3 / dx_1^2$; далее задача решается так, как описано в [1]. В случае использования обоих вариантов теории Тимошенко ($K = 0$) из (7) с учетом $m = 0$ определяется функция $\varepsilon_{13}^{(0)}(x_1)$ (см. (12) в [1]), затем вычисляются согласно (6) указанные производные (см. (13) в [1]). Следовательно, при использовании обоих вариантов теории Тимошенко рассматриваемые задачи решаются совершенно одинаково, различие заключается лишь в числовых значениях коэффициентов (8), получаемых по первому варианту теории при $\beta = 0$, а по второму варианту – при $\beta = 1$.

В случае использования уточненных соотношений (1)–(8) (при $K \geq 1$) можно предложить следующий достаточно простой приближенный метод решения. Рассмотрим дифференциальное уравнение равновесия элемента балки-стенки

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} = 0, \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L. \quad (9)$$

Массовые силы в (9) для простоты не учитываются, хотя это и не принципиально.

Умножим (9) на Bx_3^m и результат проинтегрируем по высоте балки, тогда согласно первому равенству (7) с использованием интегрирования по частям получим

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx_1} \left(B \int_{-h}^h x_3^m \sigma_{13} dx_3 \right) + B \int_{-h}^h \left[\frac{\partial}{\partial x_3} (x_3^m \sigma_{33}) - m x_3^{m-1} \sigma_{33} \right] dx_3 = \\ & = \frac{d}{dx_1} M_{13}^{(m)} + B [h^m \sigma_{33}^{(+)} - (-h)^m \sigma_{33}^{(-)}] - m B \int_{-h}^h x_3^{m-1} \sigma_{33} dx_3 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда на основании используемого итерационного процесса можем записать

$$\frac{d}{dx_1} M_{13}^{(m)} = m B \int_{-h}^h x_3^{m-1} \sigma_{33} dx_3 - B h^m [\sigma_{33}^{(+)} - (-1)^m \sigma_{33}^{(-)}], \quad 0 \leq x_1 \leq L, \quad 0 \leq m \leq K, \quad (10)$$

где $\sigma_{33}^{(\pm)} = \sigma_{33}(x_1, \pm h)$ – нормальные напряжения, заданные на верхней ($x_3 = h$) и нижней ($x_3 = -h$) горизонтальных поверхностях балки-стенки (в частности, на рис. 1 $\sigma_{33}^{(-)} = 0$, $\sigma_{33}^{(+)} = -q = \text{const}$).

Напряжение σ_{33} в правой части (10) по высоте балки можно аппроксимировать полиномами Эрмита. Например, используя полином Эрмита третьей степени, построенный по известным значениям $\sigma_{33}^{(\pm)}$ и $(\partial\sigma_{33}/\partial x_3)|_{x_3=\pm h} = 0$ (последние равенства следуют из (9) при $x_3 = \pm h$ с учетом того, что в рассматриваемых задачах $\sigma_{13}^{(\pm)} = 0$), получим

$$\sigma_{33} = -\frac{\sigma_{33}^{(+)} - \sigma_{33}^{(-)}}{4h^3} x_3(x_3^2 - 3h^2) + \frac{\sigma_{33}^{(+)} + \sigma_{33}^{(-)}}{2}. \quad (11)$$

Аппроксимацию (11) целесообразно использовать на нескольких первых приближениях метода секущего модуля, пока итерационный процесс не стабилизируется. После этого выражение для σ_{33} можно итерационно уточнять, используя полиномы Эрмита более высокого порядка, основанные не только на значениях $\sigma_{33}^{(\pm)}$ и $(\partial\sigma_{33}/\partial x_3)|_{x_3=\pm h} = 0$, как в (11), но и на дополнительных значениях $\partial\sigma_{33}/\partial x_3$, известных на n -й итерации в промежуточных точках $x_3 \in (-h, h)$. Действительно, из (9) с учетом равенства, аналогичного второму соотношению (4), имеем

$$\frac{\partial^n \sigma_{33}}{\partial x_3^n} = -\frac{\partial}{\partial x_1} \left(a_{55}^n \varepsilon_{13} \right), \quad |x_3| \leq h, \quad 0 \leq x_1 \leq L. \quad (12)$$

Так как решение предполагается известным на предыдущей n -й итерации, то можно считать известной правую часть в (12) в опорных узловых точках x_3 , которые используются в квадратурных формулах приближенного вычисления интегралов в (8) и (10). Чем больше используется значений (12) в опорных точках по высоте балки, тем точнее получается аппроксимация напряжения σ_{33} по переменной x_3 полиномами Эрмита высоких порядков.

После подстановки полученной таким образом аппроксимации σ_{33} в (10) (например, после подстановки (11) в (10)) на текущей $(n+1)$ -й итерации получим в правой части (10) известную функцию от x_1 , т.е. (10) будет представлять собой простейшее дифференциальное уравнение первого порядка относительно $M_{13}^{(n+1)}$. Для его однозначного интегрирования следует задать одно краевое условие. В ряде случаев это условие определяется достаточно просто. Так, в случае, изображенном на рис. 1, в силу симметрии нагружения и закрепления балки имеем в центральном сечении

$$\sigma_{13}(L/2, x_3) = 0, \quad x_3 \in [-h, h].$$

Следовательно, согласно первому равенству (7), имеем $M_{13}^{(n+1)}(L/2) = 0$. Это равенство и является требуемым краевым условием для уравнения (10). Столь же просто получается аналогичное краевое условие и в случае консольных балок: при этом следует рассматривать поперечное сечение балки на том конце, который не закреплен и на котором задано распределение напряжений σ_{13} по переменной x_3 .

После интегрирования по x_1 уравнения (10) с учетом известного краевого условия на $(n+1)$ -й итерации в балке будут известны приближения для всех функций $M_{13}^{(m)}(x_1)$ ($0 \leq m \leq K$). Тогда из (7), как из системы линейных алгебраических урав-

нений, можно определить все функции $\varepsilon_{13}^{(m)}(x_1)$ ($0 \leq k \leq K$), входящие в разложение (1). Далее из (6) (аналогично (13) в [1]) определяются производные $d u_1^0 / dx_1$, $d^2 u_3 / dx_1^2$, т.е. задача решается совершенно так же, как в [1].

В качестве конкретных примеров исследуем изгибное поведение балки-стенки, изображенной на рис. 1, имеющей длину $L = 1$ м и высоту $2h$. Балка изготовлена либо из эпоксидной смолы, отвержденной ароматическим аммиаком, либо из магниевого сплава ИМВ-2 и армирована борными волокнами, относительное объемное содержание которых равно 0,5. Механические характеристики материалов компонентов композиции приведены в таблице 1, где E – модуль Юнга, E_s – модуль линейного упрочнения, σ_s – условный предел текучести (использована билинейная аппроксимация диаграммы деформирования материалов; см. (1) в [1]).

Таблица 1
Механические характеристики материалов фаз композиции [14, 15]

Материал	σ_s , МПа	E , ГПа	E_s , ГПа
Эпоксидная смола	20	2,8	0,961
Магниевый сплав ИМВ-2 (Mg)	26	45	0,965
Борные волокна (B)	3200	410	–

За меру податливости изгибаемых балок-стенок примем величину:

$$u_3^m = \max_{0 \leq x_1 \leq L} |u_3(x_1)| = |u_3(L/2)|. \quad (13)$$

Относительную разность решений, полученных по разным теориям, на основании (13) можно оценить по формуле:

$$U_3^{[i]} = (u_3^{[5]} - u_3^{[i]}) / u_3^{[5]}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, \quad (14)$$

где $u_3^{[i]}$ – значение u_3^m , полученное в рамках расчета с номером i . Далее принято: расчет №1 – по классической теории Бернулли; №2 – по первому варианту теории Тимошенко; №3 – по второму варианту теории Тимошенко ($K = 0$); №4 – по уточненной теории при $K = 2$ (см. (1)); №5 – по уточненной теории при $K = 4$; №6 – по уточненной теории при $K = 6$. Согласно формуле (14) в качестве эталонного принят расчет с номером $i = 5$.

Многочисленные расчеты, проведенные авторами, показали, что конечные суммы в (1)–(3) при увеличении K всегда сходятся, причем при $K \geq 4$ уточнение по прогибу u_3 составляет менее 1% (см., например, расчеты №5, 6 в таблице 6), поэтому далее в качестве эталонного выбран расчет №5 ($K = 4$ – удержание первых пяти слагаемых в разложении (1)). Отметим, что в [9] эталонный расчет также проводился при удержании в разложениях u_1 , u_3 по пяти слагаемых, хотя, как уже указывалось выше, точность эталонного расчета в [9] определялась из других соображений.

В таблице 2 представлены результаты расчетов боропластиковой балки-стенки высотой $2h = 5$ см при уровне поперечной нагрузки $q = 3$ МПа. Поведение материалов компонентов композиции при этом является линейно-упругим, а анизотропия композитного материала является сильной (отношение модуля упругости арматуры к модулю упругости эпоксисвязующего равно 146,4; см. табл. 1).

Таблица 2

Податливость боропластиковой балки при $2h = 5$ см, $q = 3$ МПа					
Характеристика решения	Номер расчета				
	1	2	3	4	5
u_3^m , мм	6,056	7,405	7,714	7,762	7,708
U_3 , %	21,4	3,9	-0,12	-0,7	0,0

Из таблицы 2 следует, что для относительно невысоких ($2h/L = 1/20$) линейно-упругих балок даже при сильной анизотропии их материала оба варианта теории Тимошенко (расчеты №2, 3) обеспечивают приемлемую точность по податливости, а классическая теория Бернулли (расчет №1) предсказывает неоправданно заниженную податливость.

В таблице 3 приведены результаты расчетов боропластиковой балки высотой $2h = 10$ см при нагрузке $q = 10$ МПа.

Таблица 3

Податливость боропластиковой балки при $2h = 10$ см, $q = 10$ МПа					
Характеристика решения	Номер расчета				
	1	2	3	4	5
u_3^m , мм	2,523	5,362	6,329	6,778	6,792
U_3 , %	62,8	21,1	6,8	0,21	0,0

Поведение эпоксисвязующего в этом случае является неупругим (упругопластическим в рамках деформационной теории пластичности [12, 16]). Если считать, что 10%-ная точность расчета является приемлемой при упругопластическом поведении материала композиции, то для относительно высокой балки ($2h/L = 1/10$) решение, полученное по второму варианту теории Тимошенко (расчет №3), можно считать вполне пригодным с практической точки зрения, а результаты, полученные на базе классической теории и первого варианта теории Тимошенко (расчеты №1, 2), являются неприемлемыми.

Далее рассматривается механическое поведение относительно высоких балок ($2h = 10$ см), изготовленных на основе магниевого сплава ИМВ-2 (см. табл. 1).

В таблице 4 представлены результаты расчетов изотропной балки из сплава ИМВ-2 при нагрузке $q = 1,8$ МПа. Поведение материала балки в этом случае является упругопластическим, причем в окрестности центрального сечения $x_1 = L/2$ возникает напряженно-деформированное состояние, близкое к пластическому шарниру [16].

Таблица 4

Податливость изотропной магневой балки при $2h = 10$ см, $q = 1,8$ МПа					
Характеристика решения	Номер расчета				
	1	2	3	4	5
u_3^m , мм	9,008	9,090	9,094	9,114	9,119
U_3 , %	1,2	0,32	0,27	0,05	0,0

Как следует из таблицы 4, в случае изотропных балок (даже относительно высоких) не только обе теории Тимошенко, но и классическая теория предсказывают вполне приемлемые результаты как при линейно-упругом, так и при упругопластическом деформировании их материала.

В таблице 5 приведены результаты расчетов боромагниевого балки при $q = 5$ МПа.

Таблица 5

Податливость боромагниевого композитной балки при $2h = 10$ см, $q = 5$ МПа

Характеристика решения	Номер расчета				
	1	2	3	4	5
u_3^m , мм	1,145	1,222	1,237	1,237	1,237
U_3 , %	7,4	1,2	0,0	0,0	0,0

Поведение материалов фаз композиции в этом случае является линейно-упругим, а анизотропия считается достаточно слабой (отношение модуля упругости арматуры к модулю упругости магниевого связующего равно 9,1; см. табл. 1). Из таблицы 5 следует, что оба варианта теории Тимошенко предсказывают вполне приемлемые результаты, а классическая теория в рамках 5%-ной инженерной точности непригодна для расчета таких балок (в силу того, что рассматриваемая балка является относительно высокой).

Согласно таблицам 2–5, второй вариант теории Тимошенко (см. расчеты №3) предсказывает вполне приемлемые значения податливости рассмотренных балок. Однако существуют ситуации, когда и эта теория становится непригодной для получения достоверных результатов. Так, на рис. 2 изображены зависимости прогиба u_3 от осевой координаты x_1 , рассчитанные для боромагниевого балки при $q = 10,2$ МПа (номера кривых на этом рисунке соответствуют номерам расчетов), а в таблице 6 представлены максимальные по модулю значения прогибов u_3^m . При указанном уровне нагружения балки в магневом связующем возникают развитые пластические деформации, причем не столько в окрестности центрального сечения $x_1 = L/2$ (как в изотропном случае), сколько в окрестности опорных сечений $x_1 = 0$, $x_1 = L$.

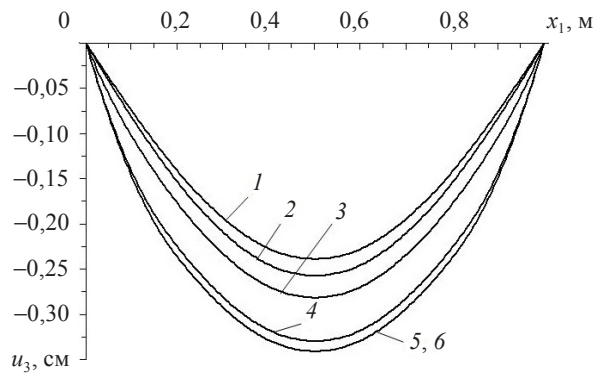


Рис. 2

Таблица 6

Податливость боромагниевого композитной балки при $2h = 10$ см, $q = 10,2$ МПа

Характеристика решения	Номер расчета					
	1	2	3	4	5	6
u_3^m , мм	2,390	2,575	2,819	3,298	3,411	3,414
U_3 , %	29,9	24,5	17,4	3,3	0,0	-0,09

Из рис. 2 и таблицы 6 следует, что в этом случае как классическая теория, так и

оба варианта теории Тимошенко (расчеты №1–3) не гарантируют требуемой точности расчета по податливости композитной конструкции. Лишь следующее уточнение второго варианта теории Тимошенко ($K = 2$, расчет №4) гарантирует 5%-ную точность по максимальному прогибу.

Для получения некоторого наглядного представления о деформированных состояниях материалов фаз боромagneйной балки, предсказываемых разными теориями, на рис. 3 изображены проекции фасада балки высотой $2h = 10$ см и изолинии, на каждой из которых интенсивность деформации сдвига Γ_j ($j = 0$ для связующего и $j = 1$ для арматуры, см. (8) в [1]) имеют постоянное значение. Расчеты проводились при $q = 10,2$ МПа (см. рис. 2 и табл. 6).

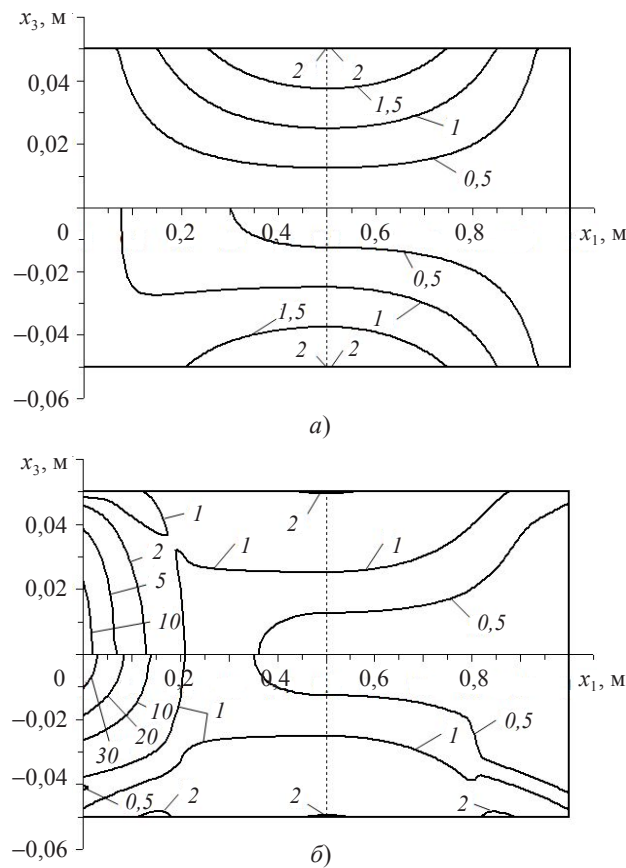


Рис. 3

В силу симметрии нагружения и закрепления балки-стенки, изображенной на рис. 1, картины деформирования в материалах фаз композиции симметричны относительно центрального сечения $x_1 = L/2$, поэтому для экономии места на левых половинах рис. 3 изображены изолинии, характеризующие деформированное состояние магниевого связующего, а на правых – изолинии армирующих борных волокон. Кроме того, в силу отсутствия нагружения балки в продольном направлении ($F_{11} = 0$) деформированное состояние компонентов композиции практически симметрично и относительно срединной плоскости $x_3 = 0$ (по крайней мере, отклонение от этой симметрии визуально не заметно), поэтому на верхней половине рис. 3а изображены изолинии, рассчитанные по теории Бернулли, а на нижней

половине этого рисунка – рассчитанные по первой теории Тимошенко; на верхней половине рис. 3а приведены результаты расчета по второму варианту теории Тимошенко, а на нижней половине рис. 3б – по уточненной теории ($K = 4$ – эталонный расчет, см. (1)). Числа на изолиниях рис. 3 равны отношениям Γ_j/Γ_0^s ($j = 0, 1$), где, согласно (8) из [1], $\Gamma_0^s = \sqrt{3}\varepsilon_s^0$, ε_s^0 – деформация, соответствующая пределу текучести σ_s магниевое сплава ИМВ-2 (см. табл. 1). Следовательно, кривые 1 на левых половинах рис. 3а и 3б определяют положение точек упругопластической границы в магниевом связующем.

Сравнение картин деформирования, изображенных на рис. 3а, с эталонным расчетом (см. нижнюю половину рис. 3б) показывает, что теория Бернулли и первый вариант теории Тимошенко приближенно отслеживают лишь основное деформированное состояние материалов фаз композиции (за пределами пограничных слоев, возникающих в окрестности опорных сечений $x_1 = 0$ и $x_1 = L$). Сопоставление картин деформирования, приведенных на рис. 3б, показывает, что второй вариант теории Тимошенко качественно отслеживает не только основное деформированное состояние материалов фаз композиции, но и их поведение в зонах краевых эффектов. Однако в рассматриваемом случае и второй вариант теории Тимошенко существенно занижает (примерно втрое) значения пластических деформаций, развивающихся в связующем в окрестности опорных сечений. Именно это, в конечном счете, и приводит к неоправданному занижению податливости балки-стенки, предсказываемой этой теорией (ср. кривые 3 и 5 на рис. 2 и расчеты №3 и 5 в табл. 6).

Во всех приведенных выше расчетах величины u_3^m/L имеют порядок 0,01 (и меньше), а деформации не превышают 3,5%, поэтому все результаты, полученные в настоящем исследовании в рамках геометрически линейной постановки задачи, являются вполне корректными.

Проведенный сравнительный анализ моделей изгибного деформирования балок-стенок показывает, что при распределенных (не локализованных) статических нагрузках первый вариант теории Тимошенко удовлетворительно описывает податливость таких изотропных конструкций, причем как при линейно-упругом, так и нелинейно-упругом поведении их материалов, а продольно армированных балок – лишь при линейно-упругом деформировании материалов фаз композиции. Вторым вариантом теории Тимошенко (который приводит к таким же уравнениям, как и первый вариант, но с другими числовыми значениями коэффициентов в них) дает более точные результаты и, как правило, удовлетворительно предсказывает податливость и изотропных, и композитных балок-стенок как при линейно-упругом, так и нелинейно-упругом поведении их материалов. Однако встречаются ситуации, когда ни классическая теория, ни оба варианта теории Тимошенко не пригодны для расчета механического поведения изгибаемых композитных балок. Поэтому для получения надежных результатов при неупругом деформировании продольно армированных балок-стенок следует рекомендовать использование уточненных соотношений (1)–(8) при $K = 2$, а еще лучше при $K = 4$.

Список литературы

1. Янковский А.П. Исследование упругопластического деформирования армированных балок-стенок с учетом ослабленного сопротивления поперечному сдвигу // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т, 2012. Вып. 74. С. 92–103.
2. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин (прочность, устойчивость и колебания). М.: Наука, 1967. 268 с.

3. Андреев А.Н., Немировский Ю.В. Многослойные анизотропные оболочки и пластины. Изгиб, устойчивость и колебания. Новосибирск: Наука, 2001. 287 с.
4. Васильев В.В. Механика конструкций из композиционных материалов. М.: Машиностроение, 1988. 272 с.
5. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. Нелинейные задачи динамики композитных конструкций. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2002. 400 с.
6. Пикуль В.В. Механика оболочек. Владивосток: Дальнаука, 2009. 536 с.
7. Карпов В.В. Прочность и устойчивость подкрепленных оболочек вращения. В 2-х ч. Ч. 1. Модели и алгоритмы исследования прочности и устойчивости подкрепленных оболочек вращения. М.: Физматлит, 2010. 288 с.
8. Баженов В.Г., Павленкова Е.В., Артемьева А.А. Численное решение обобщенных осесимметричных задач динамики упругопластических оболочек вращения при больших деформациях // Вычисл. мех. сплош. сред. 2012. Т. 5, № 4. С. 427–434.
9. Абросимов Н.А., Баженов В.Г. О применимости модели типа Тимошенко при локальном импульсном нагружении упругопластических цилиндрических оболочек // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т, 1980. С. 57–62.
10. Абросимов Н.А., Елесин А.В. Обоснование применимости макронеоднородных моделей в задачах динамики многослойных композитных балок // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Всесоюз. межвуз. сб. / Горьк. ун-т, 1987. С. 69–74.
11. Баженов В.Г., Игоничева Е.В. Нелинейные процессы ударного выпучивания упругих элементов конструкций в виде ортотропных оболочек вращения. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 1991. 132 с.
12. Немировский Ю.В., Янковский А.П. Структурная модель механики металлокомпозитов // Проблемы и достижения прикладной математики и механики: к 70-летию акад. В.М. Фомина: Сб. науч. тр. / Новосибирск: Параллель, 2010. С. 98–103.
13. Янковский А.П. Упругопластическое деформирование изгибаемых армированных пластин при ослабленном сопротивлении поперечному сдвигу // Прикладная математика и механика. 2013. Т. 77. Вып. 6. С. 853–876.
14. Справочник по композитным материалам. В 2-х кн. Кн. 1 / Под ред. Дж. Любина; Пер. с англ. А.Б. Геллера, М.М. Гельмонта; Под ред. Б.Э. Геллера. М.: Машиностроение, 1988. 448 с.
15. Композиционные материалы: Справочник / Под ред. Д.М. Карпиноса. Киев: Наукова думка, 1985. 592 с.
16. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968. 400 с.

References

1. Yankovskiy A.P. Issledovanie uprugoplasticheskogo deformirovaniya armiro-vannykh balok-stenok s uchetom oslablennogo soprotivleniya poperechnomu sdvigu // Problemy prochnosti i plastichnosti: Mezhd. sb. / Nizhegorod. un-t, 2012. Vyp. 74. S. 92–103.
2. Ambartsumyan S.A. Teoriya anizotropnykh plastin (prochnost', ustoychivost' i kolebaniya). M.: Nauka, 1967. 268 s.
3. Andreev A.N., Nemirovskiy Yu. V. Mnogosloynnye anizotropnye obolochki i plastiny. Izgib, ustoychivost' i kolebaniya. Novosibirsk: Nauka, 2001. 287 s.
4. Vasil'yev V.V. Mekhanika konstruksiy iz kompozitsionnykh materialov. M.: Mashinostroenie, 1988. 272 s.
5. Abrosimov N.A., Bazhenov V.G. Nelineynye zadachi dinamiki kompozitnykh konstruksiy. N. Novgorod: Izd-vo NNGU, 2002. 400 s.
6. Pikul' V.V. Mekhanika obolochek. Vladivostok: Dal'nauka, 2009. 536 s.
7. Karpov V.V. Prochnost' i ustoychivost' podkreplennykh obolochek vrashcheniya. V 2-kh ch. Ch. 1. Modeli i algoritmy issledovaniya prochnosti i ustoychivosti podkreplennykh obolochek vrashcheniya. M.: Fizmatlit, 2010. 288 s.
8. Bazhenov V.G., Pavlenkova E.V., Artem'yeva A.A. Chislennoe reshenie obobshchennykh osesimmetrichnykh zadach dinamiki uprugoplasticheskikh obolochek vrashcheniya pri bol'shikh deformatsiyakh // Vychisl. mekh. splosh. sred. 2012. T. 5, №4. S. 427–434.

9. *Abrosimov N.A., Bazhenov V.G.* O primenimosti modeli tipa Timoshenko pri lokal'nom impul'snom nagruzhении uprugoplasticheskikh tsilindricheskikh obolochek // Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti: Vsesoyuz. mezhvuz. sb. / Gor'k. un-t, 1980. S. 57–62.

10. *Abrosimov N.A., Elesin A.V.* Obosnovanie primenimosti makroneodnorodnykh modeley v zadachakh dinamiki mnogoslonykh kompozitnykh balok // Prikladnye problemy prochnosti i plastichnosti: Vsesoyuz. mezhvuz. sb. / Gor'k. un-t, 1987. S. 69–74.

11. *Bazhenov V.G., Igonicheva E.V.* Nelineynye protsessy udarnogo vypuchivaniya uprugikh elementov konstruktsiy v vide ortotropnykh obolochek vrashcheniya. N. Novgorod: Izd-vo NNGU, 1991. 132 s.

12. *Nemirovskiy, Yu.V., Yankovskiy A.P.* Strukturnaya model' mekhaniki metallokompozitov // Problemy i dostizheniya prikladnoy matematiki i mekhaniki: k 70-letiyu akad. V.M. Fomina: Sb. nauch. tr. / Novosibirsk: Parallel', 2010. S. 98–103.

13. *Yankovskiy A.P.* Uprugoplasticheskoe deformirovanie izgibaemykh armirovannykh platin pri oslablennom soprotivlenii poperechnomu sdvigu // Prikladnaya matematika i mekhanika. 2013. T. 77. Vyp. 6. S. 853–876.

14. Spravochnik po kompozitnym materialam: V 2-kh kn. Kn. 1 / Pod red. Dzh. Lyubina; Per. s angl. A.B. Gellera, M.M. Gel'monta; Pod red. B.E. Gellera. M.: Mashinostroenie, 1988. 448 s.

15. Kompozitsionnye materialy. Spravochnik / Pod red. D.M. Karpinosa. Kiev: Naukova dumka, 1985. 592 s.

16. *Malinin N.N.* Prikladnaya teoriya plastichnosti i polzuchesti. M.: Mashinostroenie, 1968. 400 c.

COMPARATIVE ANALYSIS OF MODELS OF BENDING DEFORMATION OF REINFORCED WALLS-BEAMS OF NONLINEAR ELASTIC MATERIALS

Romanova T.P., Yankovskii A.P.

The study obtained the ratios for describing of bending deformation of reinforced walls-beams with different accuracy, from which the classical Tymoshenko theory and both Bernoulli theory are follow as particular cases. On the example of study of mechanical behavior of hinge supported beam it is shown that for the nonlinear-elastic behavior of materials of its composition the classical theory and both Tymoshenko theory don't guarantee obtaining of reliable results within 5%-engineering accuracy. It is requires the use refined theories with accounting edge effects in phase materials for conducting reliable calculations.

Keywords: longitudinal reinforcement, wall-beam, nonlinear elastic deformation, Tymoshenko theories, Bernoulli theory, refined theories of bending.