

УДК 539.3

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОДКРЕПЛЕННОЙ РЕБРАМИ ПЛАСТИНЫ ПО КРИТЕРИЮ УСТОЙЧИВОСТИ

В.А. Постнов, Г.А. Тумашик

Санкт-Петербург

Приведено точное решение задачи устойчивости пластины, подкрепленной поперечными ребрами произвольной изгибной жесткости. Решение учитывает дискретность расположения подкрепляющих ребер, а также допускает наличие разной толщины пластины в отдельных ее пролетах. Дается оценка погрешности решения устойчивости пластин, основанного на использовании концепции присоединенного пояса (решение И.Г. Бубнова). Приведен алгоритм оптимизации подкрепленной пластины по критерию устойчивости. Показано, что путем перераспределения общей массы ребер можно существенно повысить устойчивость подкрепленной пластины.

1. Основные зависимости для решения задачи устойчивости подкрепленных пластин

Одним из наиболее эффективных конструктивных мероприятий увеличения несущей способности пластин и оболочек при их работе на изгиб или на устойчивость является подкрепление их упругими ребрами. Подкрепленные пластины, оболочки и перекрытия являются основными элементами современных конструкций, в том числе и судового корпуса.

Из используемых при решении задач для подкрепленных конструкций моделей (конструктивной ортотропии, присоединенного пояса [1, 2]) наиболее строгой является модель, предложенная В.А. Постновым, учитывающая как дискретность расположения, так и условия сопряжения подкрепляющих ребер с пластинчатой частью конструкции [3]. Применение этой модели позволяет решать задачи для пластины переменной при переходе от пролета к пролету толщины, подкрепленной ребрами различной жесткости, при различных материалах пластины и подкрепляющих ребер.

Для составления дифференциальных зависимостей, которыми описывается задача об устойчивости пластины, подкрепленной ребрами, применим метод расчленения. С этой целью отделим от пластины ребра по линии их притыкания к пластине. Взаимодействие j -го ребра с пластиной по линии их притыкания будем характеризовать нормальной нагрузкой интенсивности $r_j(y)$ и касательными усилиями интенсивности $q_j(y)$. Предполагается, что расстояния между ребрами, как и толщины пластины t_j , в отдельных пролетах могут различаться.

При решении поставленной задачи будем полагать, что к ребру применима техническая теория изгиба балок, а к пластине – нелинейная теория изгиба пластин. Крутильной жесткостью ребер будем пренебрегать, хотя учет таковой при принятом методе решения задачи не вносит значительных усложнений.

В итоге устойчивость рассматриваемой пластины описывается системой урав-

нений, включающей в себя: уравнения, определяющие поперечный прогиб пластины и функцию напряжений; условия для поперечного прогиба и функции напряжений по линиям притыкания ребер; уравнения изгиба ребер; условие равенства линейной деформации пластины и ребра по линии их притыкания.

Если через $w(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ обозначить прогиб срединной плоскости пластины и функцию напряжения соответственно, то для их определения могут быть выписаны следующие дифференциальные уравнения:

$$D_j \nabla^2 \nabla^2 w(x, y) + T \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} = 0, \quad (1)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y) = 0, \quad (2)$$

где T – постоянные усилия сжатия вдоль оси OX пластины, $D_j = Et_j^3 / 12(1 - \nu^2)$ и t_j – цилиндрическая жесткость и толщина пластины в пределах j -го пролета (между $(j - 1)$ -м и j -м ребрами), E – модуль продольной упругости материала изотропной пластины, ν – коэффициент Пуассона.

Выпишем условия, которым должны удовлетворять функции $w(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ по линии притыкания ребер $x = x_j$.

Для функции при переходе через сечения расположения подкрепляющих ребер ($x = x_j$) должны быть соблюдены условия непрерывности нормального перемещения, углов поворота, изгибающего момента $M_x(x, y)$ и, наконец, наличие скачка в интенсивности поперечных сил:

$$\left. \begin{aligned} w(x, y) \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0, \\ \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0, \\ M_x(x, y) \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} &= -D \left(\frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, y)}{\partial y^2} \right) \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} = 0, \\ - \left(D \left(\frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right) - T \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right) \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} &= r_j(y), \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $r_j(y)$ – интенсивность поперечных усилий взаимодействия j -го ребра со срединной поверхностью пластины.

Условия, которым должны удовлетворять функция напряжения $\varphi(x, y)$ при переходе через сечение $x = x_j$, могут быть получены из следующих четырех зависимостей:

$$\left. \begin{aligned} T_x \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0, \\ \varepsilon_y \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0, \\ S \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} &= -q_j(y), \\ u(x, y) \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Здесь T_x, S – продольное и сдвиговое усилия в срединной плоскости пластины; ϵ_y – деформация срединной плоскости в направлении оси Oy ; $u(x, y)$ – перемещение точки срединной плоскости в направлении оси Ox ; $q_j(y)$ – интенсивность касательных усилий взаимодействия j -го ребра со срединной плоскостью пластины.

Используя зависимости плоской задачи теории упругости

$$\begin{aligned} T_x(x, y) &= -T + \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2}, & T_y(x, y) &= \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2}, \\ S(x, y) &= -\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y}, \end{aligned} \quad (5)$$

после несложных преобразований из (4) могут быть получены следующие условия перехода функции напряжения $\varphi(x, y)$ через сечение $x = x_j$:

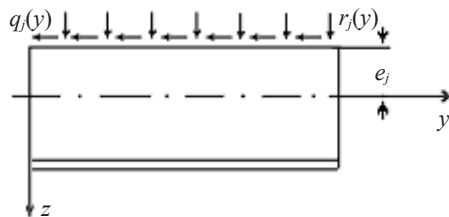
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0, \\ \frac{1}{t} \left(\frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial y^2} \right) \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \varphi(x, y)}{\partial x \partial y} \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} &= q_j(y), \\ \frac{1}{t} \left[\frac{\partial^3 \varphi(x, y)}{\partial x^3} + (2 + \nu) \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right] \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Вторая зависимость в (6) предполагает, что до момента потери устойчивости (изгиба пластины) и появления неравномерного распределения напряжений в срединной поверхности пластины деформация ϵ_y постоянна по длине пластины.

Далее, непосредственно по данным рисунка составим дифференциальное уравнение изгиба j -го ребра ($x = x_j$):

$$EI_j \frac{d^4 w(x_j, y)}{dy^4} = r_j(y) + e_j q'_j(y), \quad (7)$$

где I_j – собственный момент инерции j -го ребра; e_j – расстояние центра тяжести j -го ребра до срединной плоскости пластины. Здесь и в дальнейшем штрихом обозначена операция производной.



Последнее, необходимое для решения задачи устойчивости подкрепленной пластины уравнение получим, приравняв линейные деформации пластины и j -го ребра по линии их притыкания (при этом будем полагать, что линия притыкания ребра к пластине лежит в срединной поверхности последней):

$$e_j \frac{\partial^2 w_j(x, y)}{\partial y^2} + \frac{Q_j(y)}{EF_j} = \left| \frac{1}{Et} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \right|_{x=x_j-0}, \quad (8)$$

где

$$Q_j(y) = \int_0^y q_j(y) dy; \quad (9)$$

F_j – площадь поперечного сечения j -го ребра.

Системой дифференциальных зависимостей (1)–(9) описывается задача устойчивости пластины, подкрепленной поперечными ребрами. Точное решение этой системы возможно лишь для частного случая свободного опирания на жесткие опоры продольных кромок пластины и торцевых сечений подкрепляющих ребер. При этом условия защемления срединного слоя пластины вдоль продольных кромок должны соответствовать условиям “свободного подвеса”. Для данного случая закрепления пластины функции, подлежащие определению, можно искать в виде:

$$\left. \begin{aligned} w(x, y) &= \sum_n w_n(x) \sin(\beta_n y), \\ \varphi(x, y) &= \sum_n \varphi_n(x) \sin(\beta_n y), \\ M_x(x, y) &= \sum_n M_n(x) \sin(\beta_n y), \\ \varepsilon_y(x, y) &= \sum_n \varepsilon_n(x) \sin(\beta_n y), \\ r_j(y) &= \sum_n r_n^j \sin(\beta_n y), \\ q_j(y) &= \sum_n q_n^j \cos(\beta_n y), \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

где $\beta_n = n\pi/l$, n – число полуволин изменения данной функции вдоль оси Oy ; l – ширина пластины.

Подстановка (10) в систему дифференциальных зависимостей (1)–(9) после исключения усилий взаимодействия ребра с пластиной $r_j(y)$ и $q_j(y)$ с помощью зависимостей (7)–(9) приводит к двум связанным системам дифференциальных зависимостей, одна из которых описывает функцию $w_n(x)$, вторая – функцию напряжений $\varphi_n(x)$.

1.1. Система дифференциальных зависимостей для функции $w_n(x)$. Основное дифференциальное уравнение:

$$\begin{aligned} w_n^{(IV)}(x) + a_{1n} w_n''(x) + a_{2n} w_n(x) &= 0, \\ a_{1n} &= \frac{T}{D} - 2\beta_n^2, \quad a_{2n} = \beta_n^4. \end{aligned} \quad (11)$$

Дополнительные условия на линии притыкания j -го ребра:

$$\begin{aligned} w_n(x)|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0, \quad w_n'(x)|_{x_j-0}^{x_j+0} = 0, \\ D(w_n''(x) - \nu\beta_n^2 w_n(x))|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

$$D((w_n''(x) - (2 - \nu)\beta_n^2 w_n'(x)) + Tw_n'(x))|_{x_j-0}^{x_j+0} = B_{j1} w_n(x_j) + B_{j2} \varphi_n(x_j) + B_{j3} \varphi_n''(x_j - 0),$$

где

$$B_{j1} = -(EI_j + e_j^2 EF_j) \beta_n^4, \quad B_{j2} = -\frac{\nu e_j F_j \beta_n^4}{t_j}, \quad B_{j3} = -\frac{e_j F_j \beta_n^2}{t_j}.$$

1.2. Система дифференциальных зависимостей для функции $\varphi_n(x)$. Основное дифференциальное уравнение:

$$\varphi_n^{(IV)}(x) + b_{1n} \varphi_n''(x) + b_{2n} \varphi_n(x) = 0, \quad (13)$$

где $b_{1n} = -2\beta_n^2$, $b_{2n} = \beta_n^4$. Дополнительные условия на линии притыкания j -го ребра:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_n(x)|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0, \\ \varphi_n'(x)|_{x_j-0}^{x_j+0} &= C_{j1} w_n(x_j) + C_{j2} \varphi_n(x_j) + C_{j3} \varphi_n''(x_j - 0), \\ \frac{1}{t} (\varphi_n''(x) + \nu\beta_n^2 \varphi_n(x))|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0, \\ \frac{1}{t} (\varphi_n''(x) - C_{j4} \varphi_n'(x))|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

где

$$C_{j1} = e_j \beta_n^2 EF_j, \quad C_{j2} = \nu\beta_n^2 \frac{F_j}{t_j}, \quad C_{j3} = \frac{F_j}{t_j}, \quad C_{j4} = (2 + \nu)\beta_n^2.$$

Выписанную систему дифференциальных зависимостей необходимо дополнить граничными условиями для функций $w_n(x)$ и $\varphi_n(x)$. Они могут быть получены из рассмотрения условий закрепления поперечных пластины в отношении функций $w(x)$ и $\varphi(x)$.

1.3. Функции влияния. Общий интеграл уравнения (11) имеет вид:

$$w_n(x) = \sum_{k=1}^4 A_k e^{\lambda_k x}, \quad (15)$$

где A_k – постоянные интегрирования, а λ_k – корни характеристического уравнения:

$$\lambda_k^4 + a_{1n} \lambda_k^2 + a_{2n} = 0. \quad (16)$$

Нетрудно убедиться, что в рассматриваемом случае ($T > 4D\beta_n^2$) все корни уравне-

ния (16) будут чисто мнимыми и выражение (15) для прогиба запишется в виде:

$$w_n(x) = A_1 \cos(\lambda_1 x) + A_2 \sin(\lambda_1 x) + A_3 \cos(\lambda_2 x) + A_4 \sin(\lambda_2 x), \quad (17)$$

где

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{a_{1n}}{2} + \sqrt{\left(\frac{a_{1n}}{2}\right)^2 - a_{2n}}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{\frac{a_{1n}}{2} - \sqrt{\left(\frac{a_{1n}}{2}\right)^2 - a_{2n}}}. \quad (18)$$

Введем дополнительно следующие обозначения:

$$K_j^{(i)} = \frac{d^i w_n(x_j)}{dx^i} \quad (i=0,1), \quad H_j^{(i)} = \frac{d^i w_n(x_j)}{dx^i} \quad (i=2,3) \quad (19)$$

и рассмотрим изгиб j -го пролета пластины (участок между $(j-1)$ -м и j -м ребрами) при граничных условиях (начало координат на $(j-1)$ -м ребре):

$$x = x_{j-1} = 0: K_{j-1}^{(i)} = 0 \quad (i=0,1); \quad x = x_j = 0: K_j^{(i)} = 0 \quad (i=0,1).$$

Далее загружаем сечение $x = x_j$ последовательно величинами $K_j^{(i)}$ ($i=0,1$) и определяем возникающие при этом значения величин $H_{j-1}^{(k)}$ и $H_j^{(k)}$ ($k=2,3$). Тогда отношение $\Phi_{ik}^{(1)} = H_{j-1}^{(k)} / K_j^{(i)}$ определяет функцию влияния $K_j^{(i)}$ на величину $H^{(i)}$ в противоположном опорном сечении рассматриваемого j -го пролета, а отношение $\Phi_{ik}^{(2)} = H_j^{(k)} / K_j^{(i)}$ определяет функцию влияния $K_j^{(i)}$ на величину $H^{(k)}$ в том же сечении.

В дополнение к (19) введем обозначения для функции $\Phi_n(x)$ и ее производных в сечениях $x = x_j$:

$$\begin{aligned} S_j^{(0)} &= \Phi_n(x_j), \\ S_j^{(2)} &= \frac{1}{t_j} (\Phi_n'(x_j - 0) + \nu \beta_n^2 \Phi_n(x_j)) = \frac{1}{t_{j+1}} (\Phi_n'(x_j + 0) + \nu \beta_n^2 \Phi_n(x_j)), \\ R_j^{(i)} &= \frac{d^i \Phi_n(x_j)}{dx^i} \quad (i=1,3). \end{aligned} \quad (20)$$

Тогда по аналогии с введенными выше функциями влияния для $w_n(x)$ введем функции влияния для $\Phi_n(x)$: $\Phi_{ik}^{(1)} = R_{j-1}^{(k)} / S_j^{(i)}$, $\Phi_{ik}^{(2)} = R_j^{(k)} / S_j^{(i)}$.

При решении задачи устойчивости подкрепленной пластины в качестве основных неизвестных выберем величины $K_j^{(i)}$ и $S_j^{(i)}$ ($j=0,1,\dots,m$, где m – число пролетов подкрепленной пластины). Такой выбор неизвестных продиктован тем обстоятельством, что величины $K_j^{(0)}$, $K_j^{(1)}$, $S_j^{(0)}$ и $S_j^{(2)}$ не имеют разрывов при переходе через сечения $x = x_j$ и четыре условия перехода через эти сечения из восьми оказываются тождественно выполненными.

С помощью введенных выше функций влияния выразим значения $H_j^{(k)}$ и $R_j^{(k)}$ слева и справа от сечения $x = x_j$ через основные неизвестные $K_j^{(i)}$ и $S_j^{(i)}$:

$$\begin{aligned} H_{j-0}^{(k)} &= \sum_{i=0,1} (\Phi_{ik}^{(2)} K_j^{(i)} - \Phi_{ik}^{(1)} K_{j-1}^{(i)}), \\ H_{j+0}^{(k)} &= \sum_{i=0,1} (-\Phi_{ik}^{(2)} K_j^{(i)} + \Phi_{ik}^{(1)} K_{j+1}^{(i)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{j-0}^{(k)} &= \sum_{i=0,2} \left(\phi_{ik}^{(2)} S_j^{(i)} - \phi_{ik}^{(1)} S_{j-1}^{(i)} \right), \\
R_{j+0}^{(k)} &= \sum_{i=0,2} \left(-\phi_{ik}^{(2)} S_j^{(i)} + \phi_{ik}^{(1)} S_{j+1}^{(i)} \right).
\end{aligned} \tag{21}$$

Используя зависимости (21), оставшиеся невыполненными условия перехода функций $w_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ через сечение $x = x_j$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0,1} \left(D_{j+1} \phi_{i2}^{(1)} K_{j+1}^{(i)} - (D_{j+1} + D_j) \phi_{i2}^{(2)} K_j^{(i)} + D_j \phi_{i2}^{(1)} K_{j-1}^{(i)} \right) = A_{j1} K_j^{(0)}, \\
&\sum_{i=0,1} \left(D_{j+1} \phi_{i3}^{(1)} K_{j+1}^{(i)} - (D_{j+1} + D_j) \phi_{i3}^{(2)} K_j^{(i)} + D_j \phi_{i3}^{(1)} K_{j-1}^{(i)} \right) = \\
&\quad = B_{j1} K_j^{(0)} + B_{j2} K_j^{(1)} + (B_{j3} - \nu \beta_n^2 B_{j4}) S_j^0 + t_j B_{j4} S_j^{(2)}, \\
&\sum_{i=0,2} \left(\phi_{i2}^{(1)} S_{j+1}^{(i)} - 2\phi_{i2}^{(2)} S_j^{(i)} + \phi_{i2}^{(1)} S_{j-1}^{(i)} \right) = C_{j1} K_j^{(0)} + (C_{j2} - \nu \beta_n^2 C_{j3}) S_j^{(0)} + C_{j3} t_j S_j^{(2)}, \tag{22} \\
&\sum_{i=0,2} \left(\frac{1}{t_{j+1}} (\phi_{i3}^{(1)} - C_{j4} \phi_{i1}^{(1)}) S_{j+1}^{(i)} - \left(\frac{1}{t_{j+1}} + \frac{1}{t_j} \right) (\phi_{i3}^{(2)} - C_{j4} \phi_{i1}^{(2)}) S_j^{(i)} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{t_j} (\phi_{i3}^{(1)} - C_{j4} \phi_{i1}^{(1)}) S_{j-1}^{(i)} \right) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m-1).
\end{aligned}$$

Дополняя систему (22) граничными условиями для функций $w_n(x)$ и $\varphi_n(x)$ на поперечных краях пластины ($j = 0, j = m$), получим систему $4(m+1)$ однородных линейных алгебраических уравнений с тем же числом неизвестных. Равенство нулю определителя этой системы приводит к получению искомого уравнения устойчивости подкрепленной пластины

$$\Delta(T) = 0. \tag{23}$$

Наименьший корень уравнения (23) и определяет эйлерово значение сжимающей силы. Необходимо заметить, что нахождение корней трансцендентного уравнения (23) может вызвать значительные вычислительные трудности. Эти трудности легко преодолимы с помощью использования методов, изложенных в [4].

Следует отметить, что изложенное выше решение охватывает как общую (пластина с ребрами в целом), так и местную (пролеты пластины между ребрами) потерю устойчивости.

2. Сравнение точного решения и приближенного решения И.Г. Бубнова

В табл. 1 приведены критические напряжения подкрепленной ребрами стальной пластины ($E = 2 \cdot 10^6$ кгс/см², $\nu = 0,3$), полученные при использовании точного ($\sigma_{\text{точн}}$) и приближенного ($\sigma_{\text{прибл}}$) решений. Размеры пластины в плане 100×100 см, толщина пластины $t = 1$ см. Рассмотрено подкрепление пластины одним, двумя, тремя и четырьмя равноотдаленными стальными ребрами. Профиль ребер принят удовлетворяющим соотношениям:

$$I = \left(\frac{1}{0,71} \right)^2 F^2, \quad e = 2,73^4 \sqrt{I}.$$

Площадь ребер в ходе расчетов повышалась до возникновения локальной потери устойчивости ($\sigma_{\text{лок}}$) пролетов между ребрами.

Таблица 1

Критические напряжения стальной подкрепленной пластины σ , кгс/см²

Площадь ребра F , см ²	Число пролетов							
	$m = 2$		$m = 3$		$m = 4$		$m = 5$	
	$\sigma_{\text{точн}}$	$\sigma_{\text{прибл}}$	$\sigma_{\text{точн}}$	$\sigma_{\text{прибл}}$	$\sigma_{\text{точн}}$	$\sigma_{\text{прибл}}$	$\sigma_{\text{точн}}$	$\sigma_{\text{прибл}}$
0,5	843	890	904	978	965	1063	1024	1146
2,0	$\sigma_{\text{лок}} = 1198$		1762	1854	2053	2198	2297	2462
5,0			$\sigma_{\text{лок}} = 2008$		$\sigma_{\text{лок}} = 3265$		4600	4582
7,0							$\sigma_{\text{лок}} = 4887$	

Анализ данных табл. 1 показывает, что для рассматриваемой подкрепленной пластины расхождение в критических напряжениях, получаемых при использовании точного решения и приближенного решения И.Г. Бубнова, основанного на концепции присоединенного пояска, достигает 12%. Увеличение изгибной жесткости ребер, как и их числа, приводит к уменьшению этого расхождения.

Проведенное сравнение показало достаточную обоснованность применения концепции присоединенного пояска в расчетах устойчивости подкрепленных стальных пластин. Однако заметим, что для композитных пластин, подкрепленных стальными ребрами, погрешность приближенного решения существенно возрастает и достигает 20–30 %.

3. Основные зависимости оптимизационного алгоритма [5–7]

С позиции устойчивости возможны два подхода к постановке задачи оптимизации подкрепленной пластины: первый предполагает уменьшение массы конструкции при сохранении заданной критической нагрузки; второй – увеличение критической нагрузки при сохранении начальной массы. Целью оптимизации в нашей задаче является повышение критической силы за счет перераспределения массы подкрепляющих ребер при сохранении их суммарной массы. В качестве параметров проектирования рассматривается площадь ребер жесткости.

В общем случае задача оптимизации по критической силе будет нелинейной. Для ее решения ниже используется непрямой метод нелинейного математического программирования, основанный на удовлетворении необходимых условий оптимальности. В случае задачи с ограничениями таким условием является равенство нулю градиента обобщенной функции Лагранжа:

$$L(x, \mu) = f(x) + \sum_{i=1}^k \mu_i f_i(x),$$

то есть

$$\nabla L(x, \mu) = \nabla f(x) + \sum_{i=1}^k \mu_i \nabla f_i(x) = 0, \quad (24)$$

где x – вектор переменных проектирования, μ – вектор множителей Лагранжа, $f(x)$ – функция цели, k – число ограничений задачи оптимизации, $f_i(x)$ – функция i -го ограничения.

В нашем случае функция цели $f(x) = \sigma_{\text{кр}}(x)$, а в качестве ограничения на параметры состояния выступает условие сохранения суммарной массы ребер:

$$f_1(x) = M(x) - M_0 = 0, \quad (25)$$

где M_0 и $M(x)$ – соответственно массы ребер исходной и оптимизированной конструкции. Тогда для рассматриваемой задачи из условия (24) получим систему уравнений:

$$l_j + \mu_1 l_{1j} = 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad (26)$$

где введены следующие обозначения:

$$l_j = \frac{\partial \sigma_{\text{кр}}(x)}{\partial x_j}, \quad l_{1j} = \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_j}. \quad (27)$$

Получить в рассматриваемой задаче из условий оптимальности (26) явные выражения для определения параметров проектирования и множителей Лагранжа не представляется возможным. В связи с этим используется нижеследующая численная итерационная схема.

Введем с учетом $l_{1j} \neq 0$ новую неизвестную

$$\chi_j = -\frac{l_j}{\mu_1 l_{1j}}. \quad (28)$$

С учетом (28) условия оптимальности (26) примут вид:

$$\chi_j = 1, \quad j = 1, \dots, m. \quad (29)$$

Умножив обе части каждого из уравнений (29) на $(x_j)^{1/\eta}$ и возведя затем их в степень η , получим

$$x_j = (\chi_j)^\eta x_j, \quad j = 1, \dots, m. \quad (30)$$

Непосредственно из (30) получаем рекуррентное соотношение для вычисления переменных проектирования

$$x_j^{(v+1)} = (\chi_j^{(v)})^\eta x_j^{(v)}. \quad (31)$$

Для вычисления входящих в эти зависимости градиентов функции цели и ограничений, а также множителей Лагранжа, целесообразно воспользоваться итерационной процедурой, использующей уравнения ограничений и метод Ньютона–Рафсона.

Рассмотрим функцию ограничения $f_1(x)$. При изменении переменных проектирования x на величину Δx изменение функции ограничений приближенно может быть представлено в виде:

$$\Delta f_1 = f_1(x + \Delta x) - f_1(x) = \nabla f_1(x) \Delta x. \quad (32)$$

В соответствии с требованиями метода Ньютона–Рафсона выберем Δx так, чтобы удовлетворялось условие $f_1(x + \Delta x) = 0$. Тогда из (32) получим

$$f_1(x) = -\nabla f_1(x) \Delta x. \quad (33)$$

Величина Δx определяется из линеаризованной формы рекуррентного соотношения (31):

$$\Delta x_j^{(v)} = \eta(\chi_j^{(v)} - 1)x_j^{(v)}. \quad (34)$$

В результате функция ограничения по массе ребер примет вид:

$$f_1(x) = -\sum_{j=1}^m l_{1j} \eta(\chi_j^{(v)} - 1)x_j^{(v)}. \quad (35)$$

Подставляя в (35) значение χ_j из соотношения (28), получаем выражение для определения множителя Лагранжа

$$\mu_1 = \frac{\sum_{j=1}^m l_j x_j^{(v)}}{f_1(x) / \eta - \sum_{j=1}^m l_{1j} x_j^{(v)}}. \quad (36)$$

С учетом соотношений (31)–(36) итерационный процесс включает в себя последовательность следующих операций:

1. Определение $\sigma_{кр}$ при заданных или полученных на предыдущем шаге значениях площадей ребер x_j .
2. Вычисление коэффициентов чувствительности – функций влияния переменных проектирования на критическую нагрузку из (27).
3. Определение множителя Лагранжа из (36).
4. Изменение переменных проектирования с помощью рекуррентных соотношений (31) при заданном значении параметра шага η .
5. Проверка критерия окончания итерационного процесса, в качестве которого принята малая разность между двумя последовательными значениями функции цели. В случае его удовлетворения процесс оптимизации прекращается, в противном случае происходит переход к шагу 1.

4. Результаты оптимизации

Приведенный выше алгоритм был использован для оптимизации подкрепленных стальных квадратных пластин (см. п. 3). Основные результаты проведенных расчетов сведены в табл. 2–4.

В этих таблицах приведено сравнение исходных, не оптимизированных “проектов” постановки подкрепляющих ребер, с наилучшими по критическому напряжению оптимизированными “проектами”. В таблицах приводятся вектора площадей подкрепляющих ребер обоих “проектов”, а также соответствующие им критические напряжения и вид продольной формы потери устойчивости.

В общем случае изменение площади ребер на каждом шаге итерационного процесса определяется формой потери устойчивости проекта: вблизи вершин полуволн формы потери устойчивости имеет место рост площади ребер, вблизи же узлов наблюдается их уменьшение. Так, для представленных в табл. 2 проектов пластины, подкрепленной тремя и четырьмя ребрами и теряющей устойчивость по одной продольной полуволне, в процессе оптимизации происходит рост площади центральных ребер при соответствующем уменьшении площади боковых ребер. Напротив, при оптимизации пластины, теряющей устойчивость по двум полувол-

нам, происходит перенос материала с центральных ребер на боковые (см. табл. 4).

Таблица 2

Результаты оптимизации подкрепленной пластины

Число пролетов m	Вектор исходных площадей ребер, см ²	Исходное критическое напряжение, кгс/см ²	Форма потери уст-ти	Вектор итоговых площадей ребер, см ²	Итоговое критическое напряжение, кгс/см ²	Форма потери уст-ти	Прирост, %
4	$\begin{Bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{Bmatrix}$	878	Одна полу-волна	$\begin{Bmatrix} 0,125 \\ 0,95 \\ 0,125 \end{Bmatrix}$	1133	Одна-две полу-волны	29
5	$\begin{Bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{Bmatrix}$	916	Одна полу-волна	$\begin{Bmatrix} 0,077 \\ 0,723 \\ 0,723 \\ 0,077 \end{Bmatrix}$	1175	Одна-две полу-волны	28
6	$\begin{Bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{Bmatrix}$	955	Одна полу-волна	$\begin{Bmatrix} 0,0 \\ 1,0 \\ 0,0 \\ 1,0 \\ 0,0 \end{Bmatrix}$	1306	Две полу-волны	36,8
6	$\begin{Bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{Bmatrix}$	933	Одна полу-волна	$\begin{Bmatrix} 0,0 \\ 1,2 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 1,2 \\ 0,0 \end{Bmatrix}$	1454	Две полу-волны	46,4

Таблица 3

Результаты оптимизации подкрепленной пластины

Число пролетов m	Вектор исходных площадей ребер, см ²	Исходное критическое напряжение, кгс/см ²	Форма потери уст-ти	Вектор итоговых площадей ребер, см ²	Итоговое критическое напряжение, кгс/см ²	Форма потери уст-ти	Прирост, %
4	$\begin{Bmatrix} 0,4 \\ 0,4 \\ 0,4 \end{Bmatrix}$	878	Одна полу-волна	$\begin{Bmatrix} 0,125 \\ 0,95 \\ 0,125 \end{Bmatrix}$	1133	Одна-две полу-волны	29
5	$\begin{Bmatrix} 0,3 \\ 0,3 \\ 0,3 \\ 0,3 \end{Bmatrix}$	832	Одна полу-волна	$\begin{Bmatrix} 0,0 \\ 0,6 \\ 0,6 \\ 0,0 \end{Bmatrix}$	1032	Одна полу-волна	24
6	$\begin{Bmatrix} 0,24 \\ 0,24 \\ 0,24 \\ 0,24 \end{Bmatrix}$	807	Одна полу-волна	$\begin{Bmatrix} 0,0015 \\ 0,26 \\ 0,677 \\ 0,26 \\ 0,0015 \end{Bmatrix}$	988	Одна полу-волна	22,4
7	$\begin{Bmatrix} 0,2 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ 0,2 \end{Bmatrix}$	791	Одна полу-волна	$\begin{Bmatrix} 0,0 \\ 0,11 \\ 0,49 \\ 0,49 \\ 0,11 \\ 0,0 \end{Bmatrix}$	948	Одна полу-волна	19,8

Таблица 4

Результаты оптимизации подкрепленной пластины							
Число пролетов m	Вектор исходных площадей ребер, см ²	Исходное критическое напряжение, кгс/см ²	Форма потери уст-ти	Вектор итоговых площадей ребер, см ²	Итоговое критическое напряжение, кгс/см ²	Форма потери уст-ти	Прирост %
4	$\begin{Bmatrix} 1,0 \\ 1,0 \\ 1,0 \end{Bmatrix}$	1370	Две полу-волны	$\begin{Bmatrix} 1,484 \\ 0,032 \\ 1,484 \end{Bmatrix}$	1548	Одна-две полу-волны	13,02
5	$\begin{Bmatrix} 0,75 \\ 0,75 \\ 0,75 \\ 0,75 \end{Bmatrix}$	1300	Две полу-волны	$\begin{Bmatrix} 0,85 \\ 0,65 \\ 0,65 \\ 0,85 \end{Bmatrix}$	1322	Одна-две полу-волны	1,74
6	$\begin{Bmatrix} 0,6 \\ 0,6 \\ 0,6 \\ 0,6 \\ 0,6 \end{Bmatrix}$	1240	Одна полу-волна	$\begin{Bmatrix} 0,0 \\ 1,5 \\ 0,0 \\ 1,5 \\ 0,0 \end{Bmatrix}$	1511	Две полу-волны	21,8
6	$\begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \\ 0,5 \end{Bmatrix}$	1143	Одна полу-волна	$\begin{Bmatrix} 0,0 \\ 1,5 \\ 0,0 \\ 0,0 \\ 1,5 \\ 0,0 \end{Bmatrix}$	1628	Две полу-волны	42,5

Рост первого критического напряжения сопровождается одновременным падением величины второго критического напряжения. При перераспределении определенной части материала первое и второе критические напряжения подкрепленной пластины оказываются равными; при дальнейшем переносе материала ребер происходит смена формы потери устойчивости с уменьшением критического напряжения. Однако при большом различии двух низших критических напряжений исходного проекта их равенство для оптимизированных проектов может быть не достигнуто. В этом случае распределение материала ребер полностью определяется формой потери устойчивости исходного проекта (см. табл. 3).

Следует отметить, что оптимизация, сопровождающаяся сменой формы потери устойчивости, в большинстве случаев приводит к наибольшему относительному выигрышу по критическим напряжениям.

Особый интерес представляют результаты оптимизации, представленные в табл. 4 для пластины, подкрепленной ребрами общей площадью $F = 3,0$ см² при постановке пяти и шести ребер. В обоих случаях материал ребер сконцентрировался в двух промежуточных ребрах. При этом за счет более близкого расположения промежуточных ребер к вершинам полуволн формы потери устойчивости в случае шести ребер критическое напряжение оптимизированного варианта оказалось на 42,5 % выше исходного.

Необходимо также отметить, что при оптимизации пластин, имеющих высокие формы потери устойчивости, относительное увеличение критического напряжения при оптимизации оказывается значительно меньшим по сравнению с пластинами, теряющими в исходном варианте устойчивость по низшим формам.

Заключение

Решена задача оптимизации подкрепленной пластины по критерию устойчивости. Показано, что путем перераспределения общей массы ребер можно существенно повысить устойчивость подкрепленной пластины.

Литература

1. Бубнов, И.Г. Строительная механика корабля. Ч.1. / И. Г. Бубнов. – СПб, 1912. – 440 с.
2. Папкович, П.Ф. Об устойчивости пластин, подкрепленных упругими ребрами жесткости / П.Ф. Папкович // Тр. ВНИТОСС. – Госстройиздат. – 1934. – Т. 1. – Вып. 2.
3. Постнов, В.А. Устойчивость плоской пластины, подкрепленной поперечным ребрами / В.А. Постнов // Л.: Тр. Ленинград. кораблестроит. ин-та. – 1964. – Вып. 46. – С. 46–54.
4. Постнов, В.А. Метод решения частичной проблемы собственных значений в механике на основе использования теоремы Рауса / В.А. Постнов // Изв. РАН, МТТ. – 1998. – №5. – С. 89–97.
5. Малков, В.П. Оптимизация упругих систем / В.П. Малков, А.Г. Угодчиков. – М.: Наука, 1981. – 288 с.
6. Баничук, Н.В. Введение в оптимизацию конструкций / Н.В. Баничук. – М.: Наука, 1986. – 302 с.
7. Родионов, А.А. Математические методы проектирования оптимальных конструкций судового корпуса / А.А. Родионов. – Л.: Судостроение, 1990. – 248 с.

[3.07.2005]