

УДК 539.3

**ИССЛЕДОВАНИЕ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ
ДЕФОРМАЦИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК
ПРИ КОМБИНИРОВАННЫХ НАГРУЖЕНИЯХ
ВНУТРЕННИМ ДАВЛЕНИЕМ И КРУЧЕНИЕМ***

© 2014 г.

В.Г. Баженов, А.А. Артемьева

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

aranan@mail.ru

Поступила в редакцию 18.06.2014

Излагается методика численного решения нелинейных нестационарных задач осесимметричного упругопластического деформирования оболочек вращения с учетом кручения при больших деформациях. Методика основывается на геометрически нелинейной теории оболочек типа Тимошенко и теории пластичности с изотропным и кинематическим упрочнением. Решение задачи осуществляется вариационно-разностным методом в сочетании с явной схемой интегрирования уравнений движения по времени. Приводятся оценки устойчивости и способ регуляризации разностной схемы, позволяющий увеличить шаг интегрирования по времени. Представлены результаты исследования устойчивости упругопластического процесса деформирования цилиндрической металлической оболочки при комбинированных нагружениях давлением-кручением.

Ключевые слова: упругопластичность, большие деформации, кручение, осесимметричные оболочки, численное моделирование, вариационно-разностный метод.

Введение

Обзор работ, посвященных численным решениям геометрически нелинейных задач упругопластического деформирования и устойчивости оболочек при статических и динамических нагружениях, представлен в [1–3]. Эти публикации в основном посвящены решению задач с малыми деформациями и немалыми перемещениями металлических оболочек. Обзор математических моделей, постановок задач и методов решения нелинейных задач динамики оболочек и массивных тел представлен в работах [4–7]. К настоящему времени процессы упругопластического деформирования оболочек вращения при действии внутреннего давления и (или) растяжения с кручением в осесимметричной постановке изучены недостаточно. Численное решение таких задач в трехмерной постановке трудоемко и малоэффективно.

* Выполнено при частичном финансировании Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (НШ-593.2014.8), грантом Минобрнауки (соглашение от 27.08.2013 №02.В.49.21.0003 между Минобрнауки РФ и ННГУ), РФФИ (проект 14-08-01129-а).

но без выделения больших вращений оболочки как жесткого целого при использовании коротационной производной Яуманна.

В статье описывается вариационно-разностный метод решения обобщенных двумерных задач кручения, позволяющий моделировать процессы деформирования упругопластических оболочек вращения при комбинированных воздействиях осесимметричного нагружения и кручения с учетом больших деформаций. Наиболее простым способом численного решения нестационарных упругопластических задач с большими деформациями является применение метода конечных элементов и явной схемы интегрирования по времени, которая позволяет осуществлять пошаговое перестроение геометрии оболочки, где на каждом шаге по времени используются линеаризованные кинематические соотношения в метрике текущего состояния [3, 4].

Определяющая система уравнений

Обобщенная осесимметричная задача (с кручением) формулируется в цилиндрической системе эйлеровых координат Orz , Oz – ось вращения. Для каждого оболочечного элемента введем местную сопутствующую (лагранжеву) систему координат $Os\xi$. Здесь s – длина дуги меридиана оболочечного элемента, ξ – координатная линия, нормальная к срединной поверхности. Общая и местная системы координат связаны соотношениями:

$$s = r\psi_z - z\psi_r, \quad \xi = r\psi_r + z\psi_z, \quad (1)$$

где $\psi_z = -r_{,s}$, $\psi_r = -z_{,s}$ – направляющие косинусы нормали к срединной поверхности.

Оболочечные элементы полагаются тонкими, изменением метрики по толщине пренебрегаем. Деформации поперечного сдвига и изгиба считаем малыми, а деформации срединной поверхности – большими. Кинематические соотношения формулируются в скоростях и строятся в метрике текущего состояния, что позволяет учитывать большие деформации и формоизменения оболочки. Распределения компонент скоростей перемещений и скоростей деформаций (симметричной части градиента скорости перемещений) по толщине оболочки записываются в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_s(s, \xi, t) &= \dot{u}_s(s, t) + \xi \dot{u}_\varphi(s, t), \quad \tilde{u}_\xi(s, \xi, t) = \dot{u}_\xi(s, t), \quad \tilde{u}_\beta(s, \xi, t) = r \dot{u}_\beta(s, t), \\ \dot{\varepsilon}_{ii} &= \dot{\varepsilon}_{ii}^0 + \xi \dot{\varepsilon}_{ii}^I, \quad i = s, \beta, \quad \dot{\varepsilon}_{s\xi} = \dot{\varepsilon}_{s\xi}^0 (1 - (2\xi/h)^2), \quad \dot{\varepsilon}_{s\beta} = \dot{\varepsilon}_{s\beta}^0, \\ \dot{\varepsilon}_{ss}^0 &= \dot{u}_{r,s} \psi_z - \dot{u}_{z,s} \psi_r, \quad \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^0 = \dot{u}_r r^{-1}, \quad \dot{\varepsilon}_{ss}^I = \dot{u}_{\varphi,s}, \quad \dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^I = \dot{u}_\varphi \psi_z r^{-1}, \\ \dot{\varepsilon}_{s\beta}^0 &= \frac{1}{2} r \dot{u}_{\beta,s}, \quad \dot{\varepsilon}_{s\xi}^0 = \frac{1}{2} (\dot{u}_\varphi + \dot{u}_{r,s} \psi_r + \dot{u}_{z,s} \psi_z), \quad \dot{\omega}_{s\beta} = -\frac{1}{2} r \dot{u}_{\beta,s}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\dot{u}_s(s, t)$, $\dot{u}_\xi(s, t)$ – скорости перемещений срединной поверхности в направлениях касательной и нормали; $\dot{u}_\varphi(s, t)$ – угловая скорость поворота поперечных сечений в плоскости меридионального сечения; $\dot{u}_\beta(s, t)$ – угловая скорость поворота относительно оси вращения; $\dot{\varepsilon}_{ij}^0$, $\xi \dot{\varepsilon}_{ii}^I$ – компоненты скорости деформации срединной поверхности и изгиба; $\dot{\omega}_{s\beta}$ – скорость вращения элемента, h – толщина оболочки.

Компоненты тензора напряжений Коши σ_{ij} и скоростей напряжений $\dot{\sigma}_{ij}$ в местном базисе $Os\xi$ определяются по формулам:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p, \quad \dot{\varepsilon}_{ii}^p = 0, \quad i, j = s, \beta, \xi,$$

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{ss} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\dot{\varepsilon}_{ss}^e + \mu\dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^e), & \dot{\sigma}_{\beta\beta} &= \frac{E}{1-\mu^2}(\dot{\varepsilon}_{\beta\beta}^e + \mu\dot{\varepsilon}_{ss}^e), \\
\dot{\sigma}_{s\beta} &= \frac{E}{1+\mu}\dot{\varepsilon}_{s\beta}^e, & \dot{\sigma}_{s\xi} &= \frac{E}{1+\mu}\dot{\varepsilon}_{s\xi}^e, & \sigma_{\xi\xi} &= \sigma_{\beta\xi} = 0, \\
D_J\sigma_{ij} &= \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{jk}\dot{\omega}_{ki} + \sigma_{ik}\dot{\omega}_{kj}, & i, j, k &= s, \beta, \\
\sigma_{ij} &= \int_0^t D_J\sigma_{ij}dt, & i, j &= s, \beta, & \sigma_{s\xi} &= \int_0^t \dot{\sigma}_{s\xi}dt,
\end{aligned} \tag{3}$$

где E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, символ D_J обозначает производную по Яуманну, которая учитывает поворот элемента оболочки за счет сдвиговой деформации как квазижесткого целого относительно нормали к ее срединной поверхности при кручении. Следует отметить, что местная сопутствующая система координат s, ξ определяется формоизменениями оболочки без учета сдвиговых деформаций кручения, то есть она является лагранжевой только для осесимметричной деформации. Деформации сдвига при кручении тонких оболочек ограничены из соображений устойчивости осесимметричного процесса деформирования. Поэтому введение производной Яуманна вполне обосновано при использовании явной схемы интегрирования с малыми шагами по времени [6].

Учет упругопластических свойств материала оболочки осуществляется в рамках теории течения с нелинейным изотропным и кинематическим упрочнением [8]:

$$\begin{aligned}
\dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda}n_{ij}, & n_{ij} &= \frac{\sigma'_{ij}}{\sqrt{\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}}}, & \sigma'_{ij}\sigma'_{ij} &= \sigma_T^2(\kappa), & \sigma'_{ij} &= \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij} - \rho_{ij}, & \sigma &= \frac{\sigma_{ss} + \sigma_{\beta\beta}}{3}, \\
\dot{\rho}_{ij} &= g_1\dot{\varepsilon}_{ij}^p - g_2\rho_{ij}\dot{\kappa}, & \rho_{ij} &= \int_0^t \dot{\rho}_{ij}dt, & \kappa &= \sqrt{\frac{2}{3}} \int_0^t \sqrt{\dot{\varepsilon}_{ij}^p\dot{\varepsilon}_{ij}^p}dt, & i, j &= s, \beta, \xi.
\end{aligned} \tag{4}$$

Здесь $\sigma_T(\kappa)$ – радиус поверхности текучести; κ – параметр Одквиста; δ_{ij} – символ Кронекера; ρ_{ij} – тензор микронапряжений; g_1, g_2 – модули анизотропного упрочнения. Параметр $\dot{\lambda}$, тождественно равный нулю при упругом деформировании, определяется при пластическом деформировании из условия прохождения мгновенной поверхности текучести через конец вектора догрузки. При сложном нагружении память материала, обусловленная кинематическим упрочнением, ограничена областью малых изменений деформаций текущего состояния. При больших сдвиговых деформациях осцилляций компонент тензора напряжений не возникает, так как тензор микронапряжений ρ_{ij} определяется не тензором пластических деформаций, а интегро-дифференциальными соотношениями с затухающей памятью.

Вариационно-разностный метод решения

Рассмотрим элемент оболочки, ограниченный контурными сечениями $s = 0, L$. Пусть к контурам приложены внешние усилия $[P_r(t), P_z(t), P_\beta(t)]_{s=0, L}$ и изгибающий момент $[M^H(t)]_{s=0, L}$. Кроме контурных нагрузок, на оболочечный элемент могут действовать распределенные по поверхности нагрузки $p_r(s, t), p_z(s, t)$.

Вариационное уравнение движения оболочки выводится из уравнения баланса мощностей виртуальных работ:

$$\int_0^L \{ (Q\psi_r + N_s\psi_z)\delta\dot{u}_{r,s} + (Q\psi_z - N_s\psi_r)\delta\dot{u}_{z,s} + M_s\delta\dot{u}_{\varphi,s} + rT\delta\dot{u}_{\beta,s} +$$

$$+ (M_\rho \ddot{u}_z - p_z) \delta \dot{u}_z + [r^{-1} N_\beta + M_\rho (\ddot{u}_r - r \dot{u}_r^2) - p_r] \delta \dot{u}_r + (Q + r^{-1} M_\beta \Psi_z + J_\rho \ddot{u}_\varphi) \delta \dot{u}_\varphi + \\ + r^2 M_\rho \ddot{u}_\beta \delta \dot{u}_\beta \} r ds - [r (P_r \delta \dot{u}_r + P_z \delta \dot{u}_z + M^N \delta \dot{u}_\varphi + P_\beta \delta \dot{u}_\beta)]_{s=0,L} = 0, \quad (5)$$

где $N_s, N_\beta, T, Q, M_s, M_\beta$ – внутренние усилия и моменты, M_ρ и J_ρ – масса и момент инерции, определенные интегралами:

$$N_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ii} d\xi, \quad M_i = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{ii} \xi d\xi, \quad i = s, \beta, \quad (6)$$

$$Q = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{s\xi} (1 - (2\xi/h)^2) d\xi, \quad T = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{s\beta} d\xi, \quad M_\rho = \int_{-h/2}^{h/2} \rho d\xi, \quad J_\rho = \int_{-h/2}^{h/2} \rho \xi^2 d\xi.$$

Решение полученной системы уравнений строится по явной конечно-разностной схеме «крест» второго порядка точности [7]. Дискретный аналог вариационного уравнения записывается в виде:

$$\sum_{j=1}^N [(\Phi_M \ddot{u}_r - \Phi_r)_j (\delta \dot{u}_r)_j + (\Phi_M \ddot{u}_z - \Phi_z)_j (\delta \dot{u}_z)_j + (\Phi_J \ddot{u}_\varphi - \Phi_\varphi)_j (\delta \dot{u}_\varphi)_j + \\ + (\Phi_Y \ddot{u}_\beta - \Phi_\beta)_j (\delta \dot{u}_\beta)_j] = 0, \quad (7)$$

где N – суммарное количество узлов дискретной модели оболочки. Учитывая произвольность и независимость вариаций, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающую движение дискретной модели:

$$(\Phi_\zeta \ddot{u}_\alpha)_j = (\Phi_\alpha)_j, \quad \zeta = M, J, Y, \quad \alpha = r, z, \varphi, \beta. \quad (8)$$

Здесь Φ_α – обобщенные силы, действующие на расчетный узел j ; Φ_ζ – узловые массы и моменты инерции.

Скорости, перемещения, координаты узлов сетки и толщины элементов оболочки вычисляются по рекуррентным формулам:

$$(\dot{u}_\alpha)_j^{k+1/2} = (\dot{u}_\alpha)_j^{k-1/2} + \frac{(\Phi_\alpha)_j^k}{(\Phi_\zeta)_j^k} \Delta t^{k+1/2}, \quad \Delta t^{k+1/2} = \frac{\Delta t^{k+1} + \Delta t^k}{2}, \quad (9)$$

$$(\dot{u}_\alpha)_j^{k+1} = (\dot{u}_\alpha)_j^k + (\dot{u}_\alpha)_j^{k+1/2} \Delta t^{k+1}, \quad \alpha_j^{k+1} = \alpha_j^0 + \sum_{p=1}^{k+1} (u_\alpha)_j^p, \quad h_j^{k+1} = h_j^k [1 + (\Delta \varepsilon_{\xi\xi})_j^{k+1/2}].$$

Регуляризация разностной схемы

Изложенная выше явная разностная схема имеет на гладких решениях второй порядок точности от шагов сетки по пространству и времени при задании кинематических граничных условий. Оценки устойчивости схемы получены в [7] в виде

$$\begin{cases} \Delta t \leq \Delta s / c, & h \geq \Delta s, \\ \Delta t \leq h / c, & h < \Delta s. \end{cases} \quad (10)$$

При решении большинства задач достаточная точность достигается при использовании пространственного шага сетки вдоль срединной поверхности порядка толщины оболочки. Но с точки зрения эффективности вне зоны краевых эффектов целесообразно применять сетки с большими размерами ячеек. В этом случае ограничение на временной шаг $\Delta t \leq h/c$, где h – толщина оболочки, c – скорость звука,

становится весьма обременительным. Поскольку оно определяется длинноволновыми высокочастотными сдвиговыми колебаниями, имеет смысл регуляризация разностной схемы, которая позволит понизить частоты этих форм колебаний. В [7] предложен и обоснован метод повышения эффективности явных численных схем интегрирования уравнений теории оболочек типа Тимошенко путем введения регуляризирующего множителя к инерции вращения. В результате при $\Delta s/h = n \gg 1$ удастся без понижения точности существенно (в n раз) увеличить шаг интегрирования по времени.

Численное исследование

При численном моделировании используется диаграмма деформирования [9], полученная экспериментально-расчетным методом при растяжении трубчатых образцов из стали 12X18H10T ($L = 92$ мм, $R = 14,5$ мм, $h = 1$ мм) до момента разрушения. При квазистатическом нагружении начальное распределение скоростей перемещений вдоль оболочки полагается линейным, а скорость перемещения торца оболочки – постоянной, чтобы вклад сил инерции в решение задачи был пренебрежимо мал.

Простое нагружение внутренним давлением. Проводится численное моделирование деформирования оболочки с неподвижно заземленными торцами под действием линейно нарастающего внутреннего давления q . На рис. 1 приведено сопоставление изменения формы u_r/R оболочки в процессе нагружения, полученное в результате численного решения задачи (сплошные линии), с данными, полученными в работе [4] (штриховые линии). Для характеристики процесса нагружения вводится параметр $q^* = qR/(h\sigma_T)$, характеризующий текущий уровень давления. Различия по полученным прогибам не превышает 1%.

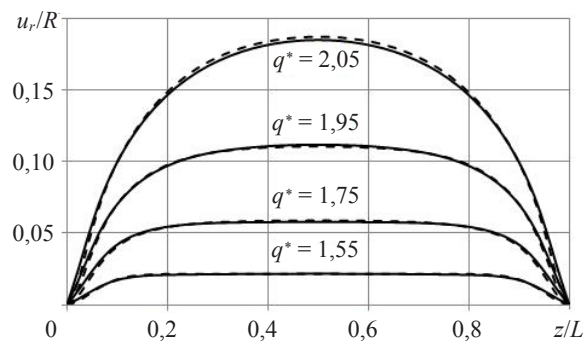


Рис. 1

Последовательное нагружение внутренним давлением-кручением. Моделируется задача цилиндрической оболочки при сложном нагружении. Оболочка подвергается действию внутреннего давления до достижения параметром q^* величин, отмеченных маркерами 1–6 (рис. 2а), затем при неизменном давлении один торец оболочки закручивается с постоянной угловой скоростью $\dot{\theta}_\beta$, а второй остается неподвижно заземленным. На рис. 2 представлены максимальные прогибы u_r/R на плоскости симметрии оболочки при нагружении линейно возрастающим давлением в зависимости от параметра q^* (а) и при нагружении давлением-кручением в зависимости от условной сдвиговой деформации $\varepsilon_{z\beta} = Ru_\beta/L$ (б).

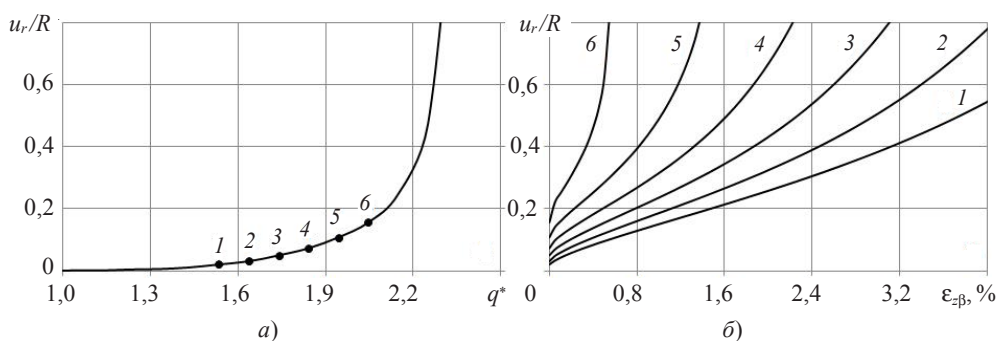


Рис. 2

Численное решение задачи показывает увеличение прогиба оболочки при наложении кручения на предварительно нагруженную давлением оболочку. Таким образом, в зависимости от предварительно заданного уровня давления при наложении кручения могут быть достигнуты предельные состояния оболочки.

Список литературы

1. Аннин Б.Д., Жигалкин В.М. Поведение материалов в условиях сложного нагружения. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999. 341 с.
2. Коробейников С.Н. Численное решение уравнений с особенностями деформирования упругопластических оболочек вращения // Вычислительные технологии. 2001. Т. 6, № 5. С. 39–59.
3. Выпучивание упругопластических цилиндрических и конических оболочек при осевом ударном нагружении / В.Г. Баженов, М.С. Баранова, А.И. Кибец и др. // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2010. Т. 152, № 4. С. 86–105.
4. Баженов В.Г., Ломунов В.К. Устойчивость и закритическое состояние оболочек вращения при осевом ударе // Прикладная механика. 1986. Т. 22, №9. С. 28–33.
5. Васин Р.А., Ильющин А.А., Моссаковский П.А. Исследование определяющих соотношений и критериев разрушения на сплошных и толстостенных трубчатых цилиндрических образцах // Изв. РАН. МТТ. 1994. №2. С. 177–184.
6. Аннин Б.Д., Коробейников С.Н. Допустимые формы упругих законов деформирования в определяющих соотношениях упругопластичности // Сиб. ж. индустр. математики. 1998. Т. 1, №1. С. 21–34.
7. Баженов В.Г., Чекмарев Д.Т. Численные методы решения задач нестационарной динамики тонкостенных конструкций // Механика твердого тела. 2001. №5. С. 156–173.
8. Chaboche J.L. Constitutive equation for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity // Inter. J. of Plasticity. 1989. Vol. 5, №3. P. 247–302.
9. Баженов В.Г., Жегалов Д.В., Павленкова Е.В. Численное и экспериментальное исследование упругопластических процессов растяжения-кручения осесимметричных тел при больших деформациях // Механика твердого тела. 2011. №2. С. 57–66.

ANALYSIS OF LARGE ELASTOPLASTIC DEFORMATIONS FOR CYLINDRICAL SHELLS UNDER COMBINED LOADING OF INNER PRESSURE AND TORSION

V.G. Bazhenov, A.A. Artemyeva

The paper presents a technique for solving numerically the nonlinear nonstationary problems of axisymmetric elastoplastic deformation of shells of revolution taking into consideration torsion under the large deformation. The method is based on the geometrically nonlinear Timoshenko

theory of shells and the plasticity theory with isotropic and kinematic hardening. A variational difference method in combination with a scheme for explicit time integration of the equations of motion is used for solving the problem of interest. Stability estimates and a regularization technique for difference schemes that can increase the integration time step are given. Studying the stability of the elastoplastic deformation of a cylindrical metal shell under combined pressure and torsion is conducted.

Keywords: elastoplasticity, large deformation, torsion, axisymmetric shells, numerical modeling, variate difference method.