

УДК 534.1:517.938

## ДИНАМИКА УПРУГОГО ПРОДОЛЬНО НАГРУЖЕННОГО СТЕРЖНЯ ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ\*

© 2014 г. **Д.В. Капитанов<sup>1</sup>, В.Ф. Овчинников<sup>2</sup>, Л.В. Смирнов<sup>1,2</sup>**

<sup>1</sup>Нижегородский госуниверситет им. Н.И. Лобачевского

<sup>2</sup>НИИ механики Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского

dis-kdv@mail.ru

Поступила в редакцию 07.07.2014

Представлены результаты численно-аналитического исследования устойчивости аксиально нагруженного стержня. Рассмотренная модель позволяет получить границу устойчивости в пространстве параметров и изучить поведение стержня непосредственно после потери устойчивости. Потеря устойчивости проявляется в виде бифуркации, при которой рождаются новые равновесные состояния или устойчивый предельный цикл.

*Ключевые слова:* нагруженный стержень, шарнирное закрепление, консоль, устойчивость, бифуркации, формы равновесия, автоколебания.

Раздел теории упругой устойчивости, связанный с реакцией упругих конструкций на различные виды механической нагрузки, имеет важные технические приложения для оценки критических значений последних, вызывающих потерю устойчивости инженерных сооружений. Решение рассматриваемой проблемы позволяет описать особенности потери устойчивости упругих стержней при наличии продольной нагрузки и поведение упругих конструкций после потери устойчивости.

По данной проблеме имеется обширная литература, обзор приводимых в ней результатов не является целью настоящей работы, однако далее приводятся краткие сведения о некоторых результатах решения близких к рассматриваемым в работе задач.

### **1. Вывод уравнения и краевых условий, описывающих поперечные колебания продольно нагруженного стержня, с использованием вариационного принципа Гамильтона – Остроградского**

Согласно общей формулировке принципа действия движение материальной системы с голономными связями отличается от других, совместимых со связями движений, тем, что для этого движения интеграл от суммы вариации кинетической

---

\* Выполнено при частичной поддержке грантом Минобрнауки РФ (соглашение от 27.08.2013 №02.В.49.21.0003 между Минобрнауки РФ и ННГУ), РФФИ (грант 13-08-00785 а) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-593.2014.8).

энергии и работы сил на виртуальных перемещениях, взятый между двумя произвольными фиксированными моментами времени, равен нулю, то есть

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi + \delta A_1) dt = 0, \quad (1)$$

где  $T$  и  $\Pi$  – кинетическая и потенциальная энергии соответственно,  $\delta A_1$  – виртуальная работа непотенциальных сил.

Выражение (1) обычно выводится из общего уравнения динамики. Следует обратить внимание на то, что предполагается выполнение основных постулатов классической механики [1]. Нарушение любого из этих постулатов требует уточнения выражения (1), что производится введением так называемых дополнительных сил в общее уравнение динамики, а значит, и в выражение (1). Примером такого уточнения может служить случай систем переменной массы, рассмотренный в [2].

На базе вариационной задачи, задаваемой выражением (1), может быть получено дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция, дающая минимум интегралу действия. Это уравнение Эйлера – Лангранжа при рассмотрении системы с конечным числом степеней свободы или уравнение Эйлера – Остроградского в случае системы с бесконечным числом степеней свободы (модель с распределенными параметрами).

Будем рассматривать малые низкочастотные плоские колебания однородного прямого стержня. Для вывода уравнения и краевых условий воспользуемся выражением (1). Предполагается, что справедлива система гипотез, исключающая связь деформаций по различным компонентам вектора перемещений и позволяющая отдельно рассматривать колебания, которые обусловлены чистым плоским изгибом. В данном случае для описания деформации изгиба оси стержня достаточно одной компоненты вектора перемещения, зависящей от одной пространственной координаты, отсчитываемой вдоль оси недеформированного стержня.

Кинетическая и потенциальная энергии стержня имеют вид:

$$T = \frac{1}{2} \int_0^l m \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \right)^2 dx, \quad \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EI \left( \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} \right)^2 - P \left( \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \right)^2 \right] dx, \quad (2)$$

где  $y(x, t)$  – поперечные перемещения стержня,  $m$  – приходящаяся на единицу длины масса стержня,  $EI$  – изгибная жесткость,  $P$  – продольная сжимающая нагрузка,  $l$  – длина стержня.

Здесь учтено, что при малых деформациях кривизна стержня мала, а сила растяжения не зависит от продольной координаты. Первое слагаемое, содержащееся в выражении для потенциальной энергии, учитывает энергию деформации, обусловленную собственной изгибной жесткостью стержня; второе слагаемое учитывает влияние продольной нагрузки на поперечную деформацию.

Работа непотенциальных и внешних сил является суммой работ силы вязкого трения  $\delta A_{\text{тр}}$ , приложенных на концах стержня сил растяжения-сжатия  $\delta A_{[0,l]}$  и внешней поперечной силы  $\delta A_F$ :

$$\delta A_{\text{тр}} = - \int_0^l \xi \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} \delta y(x,t) dx, \quad \delta A_{[0,l]} = P \beta \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} \delta y(x,t) \Big|_0^l, \quad (3)$$

$$\delta A_F = \int_0^l F(x,t) \delta y(x,t) dx.$$

Здесь  $\xi$  – коэффициент трения;  $\beta = 1$ , если сила «следающая», то есть направленная по оси стержня и дающая составляющую в направлении поперечного перемещения;  $\beta = 0$ , если сила «замороженная», т.е. направленная по оси  $x$ ;  $F(x, t)$  – внешняя поперечная сила.

После подстановки полученных выражений (2) и (3) в (1) и формальных преобразований, состоящих в исключении производных от вариации путем взятия соответствующих интегралов по частям, с учетом произвольности этой вариации получим соответствующее уравнение Эйлера – Остроградского и краевые условия:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = F(x, t), \quad (4)$$

$$\begin{aligned} EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} - \delta \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} - \delta \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} = 0, \\ \left[ EI \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} + P(1-\beta) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right]_{x=0} \delta y(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad (5) \\ \left[ EI \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} + P(1-\beta) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right]_{x=l} \delta y(x, t) \Big|_{x=l} = 0. \end{aligned}$$

Уравнение (4), используемое в технической теории стержней, описывает поперечные колебания. Выражения (5) – это краевые условия в альтернативной форме: в соответствии с видом закрепления на каждом из концов стержня обращается в нуль один из двух сомножителей. При решении задачи устойчивости в уравнении (4) полагается  $F = 0$ .

При совпадении оси координат с осью недеформированного стержня получаем следующие физические и геометрические краевые условия.

В случае шарнирного закрепления из (5) следует:

$$y(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad y(x, t) \Big|_{x=l} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0. \quad (6)$$

В случае консольного закрепления стержня с одним жестко закрепленным концом и нагруженным продольной силой на другом конце имеем:

$$\begin{aligned} y(x, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad EI \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=l} = 0, \\ \left( EI \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} + P(1-\beta) \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) \Big|_{x=l} = 0. \quad (7) \end{aligned}$$

## 2. Случай шарнирного закрепления концов

Представляя в (4) решение в виде  $y(x, t) = Y(x)T(t)$ , получим уравнения для нахождения собственных значений и форм и зависимости этих форм от времени:

$$\frac{d^4 Y(x)}{dx^4} + \frac{P}{EI} \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} - \frac{\gamma m}{EI} Y(x) = 0, \quad (8)$$

$$Y(x) \Big|_{x=0} = 0, \quad Y(x) \Big|_{x=l} = 0, \quad \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{d^2 Y(x)}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0,$$

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \frac{\xi}{m} \frac{dT(t)}{dt} + \gamma T(t) = 0. \quad (9)$$

Решение проблемы собственных значений (8), состоящее в определении отличных от тождественного нуля функций и параметра  $\gamma$ , имеет вид [3]:

$$\gamma_j = \frac{EI(\pi j/l)^4 - P(\pi j/l)^2}{m}, \quad Y_j(x) = C_j \sin \frac{\pi j x}{l}, \quad j = 1, 2, \dots$$

Для соответствующей первой смены знака собственного значения  $\gamma$  имеем выражение для критического значения нагрузки, называемое формулой Эйлера:

$$P_{\text{кр}} = EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^2.$$

При переходе границы устойчивости, когда  $P > P_{\text{кр}}$  ( $\gamma_1 = 0$ ), стержень начинает аperiодически деформироваться по первой моде. В этом случае один корень характеристического уравнения системы (9) переходит через начало координат:

$$\prod_{j=1}^{\infty} \left( \lambda^2 + \frac{\xi}{m} \lambda + \gamma_j \right) = 0. \quad (10)$$

При этом потенциальная энергия уже не имеет минимума, соответствующего устойчивому состоянию равновесия недеформированного стержня. Этот результат может быть получен без рассмотрения движения чисто статическим подходом либо в виде обнаружения появления смежных форм равновесия, либо анализом изменения потенциальной энергии. Первый подход использовал Эйлер в качестве иллюстрации созданного им вариационного исчисления, а второй, который часто называют энергетическим методом, предложил Лагранж.

Исследование поведения стержня вблизи границы устойчивости при  $P > P_{\text{кр}}$  требует учета нелинейных факторов и представлено в заключительном разделе.

### 3. Изменение полной механической энергии стержня

Случай консольного закрепления, особенно при следящей силе на свободном конце ( $\beta = 1$ ), значительно сложнее и имеет ряд качественных особенностей. Для изучения с общих позиций этого и уже рассмотренного случая получим выражение для изменения во времени полной механической энергии.

После умножения уравнения (4) на  $\partial y / \partial t$ , интегрирования по  $x$  и преобразования с учетом краевых условий получаем:

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = -\xi \int_0^l \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 dx + \int_0^l F(x, t) \frac{\partial y}{\partial t} dx - P\beta \frac{\partial y}{\partial x} \Big|_{x=l} \frac{\partial y}{\partial t} \Big|_{x=l}, \quad (11)$$

где

$$T + \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \left[ EI \left( \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right)^2 - P \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 + m \left( \frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \right] dx.$$

Первое слагаемое в правой части выражения (11) представляет собой величину потерь энергии из-за вязкого трения. Внутренние потери в материале, учитываемые по гипотезе Кельвина – Фойгта [4], приводят к появлению дополнительных слагаемых в уравнении (4) и в физических краевых условиях, а в выражении (11)

появляется слагаемое вида  $-\mu EI \int_0^l (\partial^3 y / \partial x^2 \partial t)^2 dx$ , где  $\mu$  – коэффициент внутреннего трения. Влияние этого вида потерь качественно аналогично влиянию вязких потерь и в дальнейшем не рассматривается, хотя анализ его влияния на характер потери устойчивости позволяет обнаружить ряд особенностей [5].

Если второе слагаемое в выражении (11) учитывает только влияние сил, не зависящих от деформации, т.е. от  $y(x, t)$ , то при исследовании устойчивости это слагаемое можно опустить. Если же эти силы имеют составляющую, которая выражается через деформацию  $y(x, t)$  и ее производные, то приходится решать более сложную задачу. Примером является анализ гидроупругой системы в виде оболочки трубопровода, рассматриваемой как стержень с учетом гидродинамической силы, выражающейся через  $y(x, t)$  [2, 6].

Основной интерес представляет соответствующее консольному закреплению третье слагаемое, отличное от нуля при  $\beta = 1$ , когда при наличии следящей нагрузки имеется еще одна неконсервативная сила. Следует отметить, что этот случай соответствует несамосопряженному упругому оператору. Это приводит к несамосопряженной проблеме собственных значений [7, 8].

Для шарнирного закрепления стержня в правой части выражения (11) остается только первое слагаемое и, как уже отмечено, потеря устойчивости при  $P > P_{кр}$  связана с переходом одного корня характеристического уравнения через начало координат и определяет аperiodический рост деформации по первой моде. Следует добавить, что в данном случае трение на границу потери устойчивости не влияет и имеет место так называемый консервативный сценарий потери устойчивости.

#### 4. Случай консольно закрепленного стержня со следящей силой на свободном конце

Математическая модель для этого случая – уравнение (4) и краевые условия (7). Провести аналитическое исследование устойчивости данной задачи не представляется возможным. Среди возникающих при исследовании проблем основной является несамосопряженность упругого оператора задачи [9]. Применение обычно используемого в подобных задачах приближенного метода Бубнова – Галеркина требует анализа сходимости метода, которая для этого случая строго не доказана [8]. В работе [10] представлена методика численного получения не приближенного, а точного решения. Не останавливаясь на деталях, приведем результаты исследования, необходимые для иллюстрации особенностей потери устойчивости в этой задаче. Для перехода к безразмерным переменным поделим уравнение (4) на  $EI/l^4$  и проведем замену:  $x = l\varphi$ ,  $t = l^2 \tau \sqrt{m/(EI)}$ . В предположении, что сила на свободном конце является следящей, получим:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial \varphi^4} + b \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \delta \frac{\partial y}{\partial \tau} + \frac{\partial^2 y}{\partial \tau^2} = 0, \quad (12)$$

$$y(\varphi, \tau)|_{\varphi=0} = 0, \quad \frac{\partial y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi} \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^2} \Big|_{\varphi=1} = 0, \quad \frac{\partial^3 y(\varphi, \tau)}{\partial \varphi^3} \Big|_{\varphi=1} = 0.$$

Здесь

$$\delta = \frac{\xi l^2}{EI} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad b = \frac{Pl^2}{EI}.$$

После подстановки в (12) решения в виде  $y(\varphi, \tau) = W(\varphi)e^{\lambda\tau}$  приходим к задаче на собственные значения:

$$\frac{d^4W}{d\varphi^4} + b\frac{d^2W}{d\varphi^2} + (\delta\lambda + \lambda^2)W = 0, \quad (13)$$

$$W(\varphi)|_{\varphi=0} = 0, \quad \left. \frac{dW(\varphi)}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2W(\varphi)}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=1} = 0, \quad \left. \frac{d^3W(\varphi)}{d\varphi^3} \right|_{\varphi=1} = 0.$$

Задача состоит в анализе характера потери устойчивости в зависимости от безразмерных параметров  $b, \delta$ . При аналитическом рассмотрении случая шарнирного закрепления показано, что задаваемая формулой Эйлера граница устойчивости не зависит от трения, неустойчивость соответствует переходу корня характеристического уравнения через начало координат и проявляется в виде апериодического роста деформации по первой форме. В рассматриваемом здесь случае для исследования устойчивости недостаточно чисто статического подхода и необходим более универсальный динамический подход. Решение задачи (13) получено численно с использованием алгоритма, приведенного в [5]. Результаты исследования представлены в виде зависимости от параметров  $b$  и  $\delta$  годографов характеристических показателей  $\lambda_k = h_k + iw_k$ . На рис. 1, 2 приведены годографы, соответствующие двум нижшим собственным формам деформации, при увеличении параметра нагрузки  $b$  для  $\delta = 0$  (см. рис. 1) и  $\delta = 2,15$  (см. рис. 2). Стрелками на рисунках показано направление движения корней с ростом  $b$ .

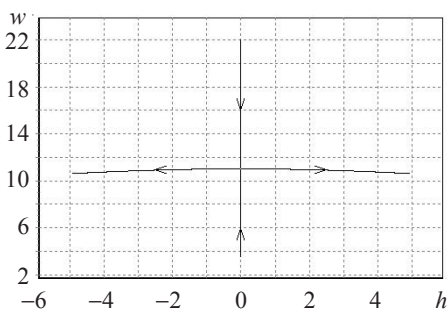


Рис. 1

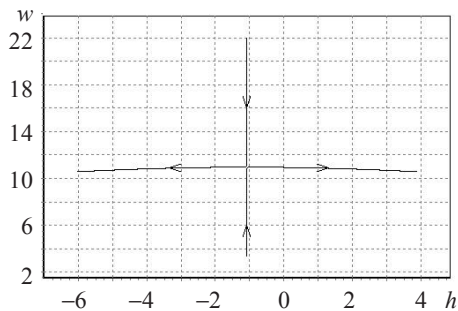


Рис. 2

В силу симметрии графиков относительно оси  $h$  приведена только верхняя часть плоскости  $hw$ . Годографы характеристических показателей, соответствующие более высоким модам, также получаемые при расчете, для определения границы устойчивости не представляют интереса и не приводятся. С ростом параметра  $b$ , определяющего отношением сжимающей силы к собственной изгибной жесткости, характеристические показатели этих первых двух форм идут навстречу друг другу, сливаются и один из них переходит в правую часть плоскости  $hw$ .

Потеря устойчивости в этом случае при  $\delta = 0$  происходит при  $b_{кр} = Pl^2/(EI) = 20,05$  сразу после слияния первых двух характеристических показателей, годограф которых представлен на рис. 1. Найденное критическое значение параметра  $b$  очень близко к представленному в [8, 11]. При этом следует напомнить, что используемый в [8] метод Бубнова – Галеркина для несамосопряженных задач не имеет строгого обоснования. Вместе с тем сравнение полученного в настоящей работе точного значения  $b_{кр}$  с указанным приближенным значением лишний раз свиде-

тельствует о справедливости приведенного в [8] утверждения, что формы потери устойчивости в несамосопряженных задачах могут быть удачно аппроксимированы при помощи линейной комбинации небольшого числа первых форм собственных колебаний, а примеров, когда это не так, не имеется.

В случае  $\delta > 0$  характеристические показатели сдвигаются на одинаковое значение в левую полуплоскость (см. рис. 2). Качественное поведение корней аналогично первому случаю, но потеря устойчивости наступает при больших значениях параметра нагрузки: для  $\delta = 2,15$ ,  $b_{кр} = 20,29$ .

Зависимость  $b_{кр}$  от характеризующего трение параметра  $\delta$  представлена на рис. 3. Зависимость критической нагрузки от трения подтверждает вывод, что в отличие от случая шарнирного закрепления задача устойчивости является неконсервативной. Рост  $b_{кр}$  с ростом  $\delta$  следует из анализа выражения (11). Расчеты позволяют построить границу устойчивости на плоскости параметров  $b\delta$  (см. рис. 3). Таким образом, установлено, что потеря устойчивости в рассматриваемом случае проявляется в виде нарастающих колебаний и соответствует переходу двух корней характеристического уравнения через мнимую ось.

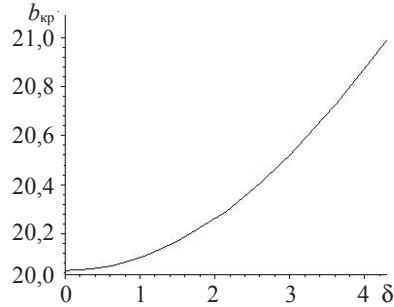


Рис. 3

Из рис. 3 также следует, что величина критической силы слабо зависит от уровня внешнего затухания, что дает возможность в технических системах не учитывать затухание при оценке величины критической силы.

## 5. Динамика сжатого стержня вблизи границы устойчивости

Потеря устойчивости в случае превышения критического значения нагрузки приводит к росту деформации, и для рассмотрения поведения стержня в этом случае необходимо уточнение математической модели (4), которая справедлива только при малых деформациях. Поведение стержня и подход к анализу этого поведения вблизи границы устойчивости в двух рассматриваемых случаях различны.

**5.1. Случай шарнирного закрепления.** При потере устойчивости в малой окрестности критического значения сжимающей нагрузки, когда потери устойчивости по второй моде ( $j = 2$ ) нет, появляется изгиб стержня по первой моде деформации. При этом из-за изгиба появляется компенсирующая нагрузку сила  $P_1$ . Для учета этой силы коэффициент перед  $\partial^2 y(x, t) / \partial x^2$  в уравнении (4) следует заменить на  $P - P_1$ . Это уравнение с учетом соответствующего изгибу приближения выражения для силы  $P_1$  при  $F = 0$  имеет вид [3]:

$$EI \frac{\partial^4 y(x, t)}{\partial x^4} + \left[ P - \frac{ES}{2l} \int_0^l \left( \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right)^2 dx \right] \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} + \xi \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

с краевыми условиями (6). Здесь  $S$  – площадь поперечного сечения стержня.

Детальный анализ поведения стержня в этом случае приведен в [3], поэтому ниже кратко представлены основные результаты. Отмеченная выше граница неустойчивости, проявляющаяся в виде роста изгиба по первой форме деформации, дает основание представить решение в окрестности границы устойчивости в виде

$$y(x, t) = T(t) \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Исследование поведения стержня в одномодовом приближении сводится к рассмотрению уравнения Дуффинга

$$m \frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \xi \frac{dT(t)}{dt} + \Phi(T(t)) = 0, \quad (15)$$

где

$$\Phi(T(t)) = T(t)(k_1 + k_2 T^2(t)), \quad k_1 = EI \left( \frac{\pi}{l} \right)^4 - P \left( \frac{\pi}{l} \right)^2, \quad k_2 = \frac{ES}{4} \left( \frac{\pi}{l} \right)^4.$$

Анализ устойчивости и структуры фазового пространства  $dT/dt$ ,  $T$  в зависимости от параметров  $k_1$ ,  $k_2$  проводится обычными методами качественной теории дифференциальных уравнений [12] и позволяет сделать следующие выводы.

1. Граница устойчивости в пространстве основных параметров  $EI$ ,  $P$  задается формулой Эйлера.

2. При  $k_1 > 0$  соответствующее недеформированному стержню единственное состояние равновесия  $T_1^0$  является устойчивым узлом или фокусом. В этом случае потенциальная энергия

$$\Pi = \int_0^T \Phi(\xi) d\xi = \frac{k_1 T^2}{2} + \frac{k_2 T^4}{4} \quad (16)$$

имеет единственный минимум.

3. При  $k_1 < 0$  состояние равновесия  $T_1^0 = 0$  неустойчиво (седло), график потенциальной энергии (14) имеет в этой точке максимум и появляются два соответствующих изогнутому стержню минимума в точках  $T_{2,3}^0 = \pm \sqrt{-k_1/k_2}$ . То есть при потере устойчивости возникает бифуркация в виде рождения двух дополнительных устойчивых состояний равновесия с сохранением значения суммарного индекса Пуанкаре всех особых точек, равного 1. В этом случае система переходит в одно из двух новых состояний равновесия, соответствующих изогнутому по первой моде стержню.

4. Величина коэффициента трения определяет вид сепаратрис становящегося седлом состояния равновесия, соответствующего недеформированному стержню, не влияет на появление новых состояний равновесия и их координаты, а определяет только скорость и характер установления этих новых состояний равновесия и области их притяжения.

**5.2. Случай консольного стержня, нагруженного следящей силой.** Анализ этого случая требует учета взаимодействия, по крайней мере, двух форм деформации. Математическим признаком потери устойчивости является смена знака действительной части двух корней характеристического уравнения. При этом возникают нарастающие колебания и рассмотрение характеристик этих колебаний требует учета ограничивающих колебания нелинейных факторов. Согласно общим представлениям теории динамических систем [12], в этом случае возникают автоколебания. Потеря устойчивости состояния равновесия, соответствующего недеформированному стержню, сопровождается рождением предельного цикла, однако учет взаимодействия форм деформации требует рассмотрения эволюции структуры, по меньшей мере, четырехмерного фазового пространства, что довольно затруднительно. Для доказательства возникновения автоколебаний и определения параметров



соответствующего предельного цикла было использовано представление в виде комбинации нелинейных нормальных форм [13]. Это позволило свести задачу к анализу двухмерного фазового пространства. Остановимся кратко на демонстрации этой методики и получаемых в рассматриваемом случае результатов.

В закритической области параметра нагрузки  $b > b_{кр}$ , когда наблюдается рост отклонений стержня, в математической модели динамики стержня необходимо, как уже отмечено, учесть нелинейные эффекты. При  $\delta = 0$  уравнение (12) можно записать в виде системы:

$$\frac{\partial y}{\partial \tau} = v, \quad \frac{\partial^4 y}{\partial \varphi^4} + b \frac{\partial^2 y}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial v}{\partial \tau} + \Phi(y, v, \varphi) = 0. \quad (17)$$

В этих выражениях  $v(\varphi, \tau)$  – скорость точек оси стержня,  $\Phi(y, v, \varphi)$  – нелинейная функция относительно своих аргументов. Структура этой функции определяется учитываемыми в модели нелинейными эффектами. К таким эффектам можно отнести нелинейное вязкое трение, геометрические нелинейности, которые следует учитывать при колебаниях стержней с большой амплитудой, нелинейность упругих сил при деформации стержня.

Из решения линейного варианта задачи (12) следует, что при  $b > b_{кр}$  два корня характеристического уравнения задачи переходят в правую полуплоскость, что приводит к возникновению колебаний с нарастающей амплитудой по одной неустойчивой форме колебаний. Именно эта форма колебаний определяет дальнейшее поведение системы, все остальные движения с течением времени затухают. В соответствии с терминологией [13] эта форма называется активной пространственной модой. Использование идеи метода центральных многообразий [13] дает возможность в закритической области параметра нагрузки свести исследование распределенной системы (17) к анализу обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка (в общем случае нелинейного). Следуя [13], получено обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее движение стержня в закритической области с учетом нелинейных эффектов.

При  $b > b_{кр}$  неустойчивое решение задачи (12) определяется корнями  $\lambda_{1,2} = h \pm iw$ , которым соответствуют две комплексно сопряженные формы колебаний:

$$u_1(\varphi) = u_R(\varphi) + iu_I(\varphi), \quad u_2(\varphi) = u_R(\varphi) - iu_I(\varphi).$$

Действительная и мнимая части этих форм являются решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^4 u_R}{d\varphi^4} + b \frac{d^2 u_R}{d\varphi^2} - (w^2 - h^2)u_R - 2hwu_I &= 0, \\ \frac{d^4 u_I}{d\varphi^4} + b \frac{d^2 u_I}{d\varphi^2} - (w^2 - h^2)u_I + 2hwu_R &= 0 \end{aligned}$$

с граничными условиями (12).

Если через  $u_0(t)$ ,  $v_0(t)$  обозначить перемещения и скорость свободного конца стержня, то при использовании для форм колебаний условия нормировки  $u_1(1) = u_2(1) = 1$  для активной пространственной моды в случае линейной математической модели справедливо представление:

$$\begin{aligned} y(\varphi, \tau) &= a_1(\varphi)u_0(\tau) + a_2(\varphi)v_0(\tau), \\ v(\varphi, \tau) &= b_1(\varphi)u_0(\tau) + b_2(\varphi)v_0(\tau), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_1(\varphi) &= u_R(\varphi) - \frac{h}{w} u_I(\varphi), & a_2(\varphi) &= \frac{1}{w} u_I(\varphi), \\
b_1(\varphi) &= -\frac{h^2 + w^2}{w} u_I(\varphi), & b_2(\varphi) &= u_R(\varphi) + \frac{h}{w} u_I(\varphi).
\end{aligned} \tag{18}$$

Этим представлением можно воспользоваться и при построении решения первого приближения нелинейной задачи (17), (12). С учетом (18) уравнения (17) преобразуются к виду

$$\left[ \frac{d^2 u_0}{d\tau^2} - 2h \frac{du_0}{d\tau} + (w^2 + h^2) u_0 \right] b_2(\varphi) + \Phi_* \left( u_0, \frac{du_0}{d\tau}, \varphi \right) = 0,$$

где  $\Phi_*$  – функция, полученная подстановкой (18) в выражение  $\Phi$  из (17).

Следуя процедуре метода Бубнова – Галеркина (после умножения этого выражения на функцию  $b_2(\varphi)$  и интегрирования по пространственной координате  $\varphi$  в пределах  $(0, 1)$ ), задачу анализа поведения консольного стержня, нагруженного следящей силой, сведем к исследованию обыкновенного нелинейного дифференциального уравнения второго порядка

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u_0}{d\tau^2} - 2h \frac{du_0}{d\tau} + (w^2 + h^2) u_0 + \Phi_0 \left( u_0, \frac{du_0}{d\tau} \right) &= 0, \\
\Phi_0 \left( u_0, \frac{du_0}{d\tau} \right) &= \int_0^1 \Phi_* \left( u_0, \frac{du_0}{d\tau}, \varphi \right) b_2(\varphi) \frac{d\varphi}{\rho}, & \rho &= \int_0^1 b_2^2(\varphi) d\varphi.
\end{aligned} \tag{19}$$

Рассмотрим случай действия на стержень сил кубического вязкого трения

$$\Phi \left( y, \frac{\partial y}{\partial \tau}, \varphi \right) = \left[ \frac{\partial y}{\partial \tau} \right]^3.$$

Так как рассматриваемая задача автономна, то к такой записи уравнений всегда можно прийти с использованием замены масштаба для переменной  $y$  ( $y = Kz$ ).

Для случая кубического вязкого трения

$$\begin{aligned}
\Phi_0 \left( u_0, \frac{du_0}{d\tau} \right) &= d_0 u_0^3 + 3d_1 u_0^2 \left[ \frac{du_0}{d\tau} \right] + 3d_2 u_0 \left[ \frac{du_0}{d\tau} \right]^2 + d_3 \left[ \frac{du_0}{d\tau} \right]^3, \\
d_k &= \int_0^1 b_1^{3-k}(\varphi) b_2^{k+1}(\varphi) \frac{d\varphi}{\rho}, & k &= 0, 1, 2, 3.
\end{aligned}$$

Представляет интерес задача определения стационарных периодических режимов движения, соответствующих уравнению (19). В первом приближении такие режимы можно считать гармоническими

$$u_0 = a \cos \Omega \tau, \tag{20}$$

и для определения амплитуды  $a$  и частоты процесса  $\Omega$  можно воспользоваться методом усреднения [12]. После подстановки (20) в (19), последовательного умножения полученного выражения на функции  $\cos \Omega \tau$ ,  $\sin \Omega \tau$  и выполнения процедуры усреднения по периоду получена система уравнений

$$w^2 + h^2 - \Omega^2 + \frac{3}{4} a^2 (d_0 + \Omega^2 d_2) = 0, \quad 2h = \frac{3}{4} a^2 (d_1 + \Omega^2 d_3).$$

Эта система уравнений имеет действительное решение, что свидетельствует о существовании у системы предельного цикла. Наличие предельного цикла подтверждается прямым интегрированием уравнений (17) с использованием двухчленного приближения метода Бубнова – Галеркина.

В качестве примера на рис. 4 представлен процесс установления режима автоколебаний при разных начальных условиях.

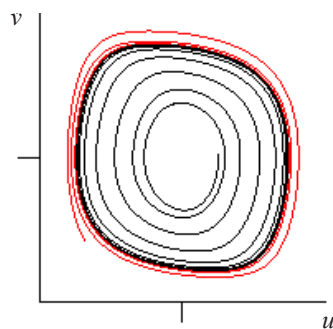


Рис. 4

## Выводы

Для прямого стержня, нагруженного осевой силой, исследован характер его поведения при потере устойчивости. Потеря устойчивости проявляется в виде бифуркации, в результате которой могут рождаться новые равновесные состояния, предельные циклы.

### Список литературы

1. Айзерман М.А. Классическая механика. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980. 367 с.
2. Смирнов Л.В. Применение аналитической механики при математическом моделировании динамики гидромеханических и гидроупругих систем: Учеб. пособие. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2001. 45 с.
3. Смирнов Л.В., Капитанов Д.В. Динамика упругого сжатого стержня при потере устойчивости: Учебно-методич. пособие / Нижегород. ун-т. 2010. 20 с.
4. Сорокин Е.С. К теории внутреннего трения при колебаниях упругих систем. М.: Гос. изд-во по строительству, архитектуре и строительным материалам, 1960. 130 с.
5. Капитанов Д.В., Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В. Неконсервативная устойчивость трубопровода и консольного стержня // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2010. №2. С. 117–123.
6. Динамика конструкций гидроаэроупругих систем / К.В. Фролов, Н.А. Махутов, С.М. Каплунов, Л.В. Смирнов. М.: Наука, 2002. 397 с.
7. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
8. Болотин В.В. Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. 339 с.
9. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1968. 504 с.
10. Капитанов Д.В., Овчинников В.Ф., Смирнов Л.В. Численно-аналитическое исследование устойчивости закрепленного стержня со следящей силой на свободном конце // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т. 2007. Вып. 69. С. 177–184.
11. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем. М.: Наука, 1979. 362 с.
12. Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний: Учеб. пособие для вузов. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Высшая школа, 2001. 391 с.

13. *Аврамов К.В., Михлин Ю.В.* Нелинейная динамика упругих систем. Т. 1. Модели, методы, явления. М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. 704 с.

**THE DYNAMICS OF AN AXIALLY LOADED ELASTIC BAR  
AFTER LOSS OF STABILITY**

**D.V. Kapitanov, V.F. Ovchinnikov, L.V. Smirnov**

The results of numerically-analytically investigating the stability of an axially loaded bar are presented. The model considered makes it possible to obtain the stability limit in the parameter space and to analyze the behavior of the bar immediately after the loss of stability. Depending on the type of boundary conditions, loss of stability is manifested in the form of bifurcation resulting in the appearance of new equilibrium states or a stable limiting cycle.

*Keywords:* loaded bar, pinning, cantilever, stability, bifurcation, equilibrium forms, self-excited oscillations.