УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК С УЧЕТОМ НАКОПЛЕНИЯ ПОВРЕЖДЕННОСТЕЙ

Н.В. Баничук, С.Ю. Иванова, Е.В. Макеев, А.В. Синицын

Москва

Исследуются вопросы проектирования оболочек минимального веса из квазихрупких материалов. Формулируется и решается оптимизационная задача отыскания форм осесимметрических оболочек, которая учитывает возможность возникновения и развития трещин в результате прикладываемых к оболочке циклических воздействий. Данная задача характеризуется неполнотой информации относительно начальных размеров, положения и ориентации трещин. Представленная постановка задачи и способ ее решения основываются на гарантированном (минимаксном) подходе. Для отыскания глобального оптимального решения используется модифицированный алгоритм генетического (эволюционного) метода. Приводятся результаты оптимизации формы оболочек и некоторые данные, характеризующие сходимость применяемого алгоритма.

Введение

Накопление поврежденности и связанное с этим разрушение материала и конструкции представляют собой актуальную проблему механики, требующую развития как экспериментальных, так и теоретических методов исследования. Важнейшей задачей в этом направлении является проблема оптимального проектирования конструкций с учетом начальных дефектов и с учетом накопления повреждений, что, в свою очередь, приводит к необходимости развития объективных минимаксных (гарантированных), вероятностных и смешанных вероятностно-гарантированных методов учета поврежденностей в условиях неполноты информации. Данная тема – “Развитие методов оптимального проектирования конструкций с учетом накопления поврежденностей” включена в программу фундаментальных исследований Отделения энергетики, механики, машиностроения и процессов управления РАН (ОЭММПУ РАН) “Накопление поврежденности, разрушение, изнашивание и структурные изменения материалов при интенсивных механических, температурных и радиационных воздействиях”. Отметим, что методы оптимизации конструкций интенсивно развивались в последнее время в связи с проблемами оптимального проектирования вязко-упругих тел и конструкций. Однако большая часть исследований по теории оптимального проектирования конструкций была выполнена без учета начальных поврежденностей, допущения возможностей возникновения трещин и их развития. При этом следует учесть, что элементы многих важных конструкций изготовляются из хрупких и квазихрупких материалов, которые подвержены растрескиванию при относительно низких уровнях возникающих в них напряжений. Растрескивание не только снижает жесткость конструкции, но также приводит к таким нежелательным эффектам, как расслоение конструкции и ее глобальное разрушение. Сравнительно небольшое число исследований было посвящено задачам оптимизации хрупких и квазихрупких тел с использованием критериев механики хрупкого разрушения. В работе Р. Абди и соавторов [1], а также Н.Б. Томсена, Дж. Ванга и Б.Л. Карихалу [2–4] исследовались задачи оптимизации деформируемых тел с учетом возникновения в них трещин. В контексте оптимального проектирования конструкций фактор возникновения трещин принимался во внимание в работах М. Папилы и Р.Т. Хафтки [5], а также Р. Витали, Р.Т. Хафтки и Б.В. Санкара [6]. В этих исследованиях все параметры рассматриваемых трещин предполагались заданными. Здесь следует заметить, что в реальных ситуациях число трещин, их ориентация, размеры и моды разрушения (трещины нормального отрыва, сдвиговые трещины, трещины со смешанными формами раскрытия и сдвига) заранее неизвестно и поэтому оптимальное проектирование конструкций из хрупких и квазихрупких материалов включает в себя факторы неопределенности и вероятностные факторы. В этих случаях затруднительно или невозможно в принципе получить полную информацию относительно определяющих параметров и сформулировать задачу оптимизации конструкции как классическую детерминистическую задачу. Чтобы учесть факторы неполноты информации и применить основные положения механики разрушения в процессе оптимального проектирования конструкции, возможно использование минимаксных гарантированных подходов, вероятностных подходов и смешанных вероятностно-гарантированных подходов, развитых ранее в теории оптимального управления и в теории дифференциальных игр. С использованием минимаксного (гарантированного) подхода Н.В. Баничук [7–9] сформулировал и исследовал некоторые общие задачи оптимизации конструкций с учетом появления трещин в деформируемых телах. Некоторые вероятностные подходы к оптимальному проектированию конструкций и структурных элементов и смешанные вероятностно-гарантированные подходы были развиты в [10, 11]. В работе [12] исследовались вопросы оптимального проектирования однородных и слоистых композиционных конструкций с учетом возможных краевых дефектов и расслоений. Важные аспекты учета поврежденностей в процессе оптимального проектирования тонкостенных конструкций и балочных систем обсуждались в работах [13–15].

В данной работе рассматриваются задачи отыскания форм тонкостенных конструкций (оболочек), обладающих минимальной массой и удовлетворяющих соответствующим геометрическим ограничениям и ограничениям на допустимое число циклов до разрушения в случае циклического приложения внешних воздействий к конструкции. Все рассматриваемые вопросы связаны с проектированием безмоментных оболочек вращения (см., например, [16]) минимального веса из квазихрупких материалов. Исследуемые задачи оптимизации заключаются в отыскании оптимальных осесимметричных форм (геометрии срединной поверхности) оболочек и учитывают возможность возникновения усталостных трещин и их распространения (подрастания) в оболочках в процессе циклического нагружения. Предполагается, что распространение начальных сквозных трещин носит квазистатический характер и описывается дифференциальным уравнением (законом Париса), связывающим текущую длину рассматриваемой усталостной трещины с числом циклов нагружения и с амплитудой изменения коэффициента интенсивности напряжений. Оценка величин коэффициентов интенсивности напряжений производится с применением асимптотического подхода и с учетом геометрических ограничений, накладываемых на размеры начальной трещины и на величину критической трещины в момент возникновения неустойчивого и нелокального разрушения оболочки. В работе предполагается, что начальная длина сквозной трещины значительно превышает толщину оболочки, а критическое значение длины трещины оказывается много меньшим по сравнению с минимальным значением, принимаемым радиусами кривизны срединной поверхности оболочки в меридиональном и окружном направлениях. Критическое значение длины трещины определяется с применением критерия квазихрупкого разрушения Гриффитса–Ирвина–Орована, а сама трещина моделируется в виде прямолинейного разреза, характеризуемого координатами его центра, длиной и углом наклона разреза к меридиану оболочки. Существенно, что в процессе проектирования конструкций частично или полностью отсутствуют данные относительно начальных микродефектов (в частности, трещин, пор и других дефектов материала). Поэтому рассматриваемые в данном исследовании задачи оптимизации форм оболочки характеризуются неполнотой информации относительно начальных размеров, положения и ориентации трещин. Проводимые в данной работе исследования основываются на применении гарантированного или минимаксного (игрового) подхода к формулировке и исследованию оптимизационных задач с неполнотой информации. Наиболее существенными ограничениями в проводимых исследованиях являются моделирование трещин прямолинейными разрезами со свободными от нагрузок берегами, геометрические ограничения на начальные и текущие значения длин трещин, а также принимаемое предположение, что в рассматриваемой оболочке содержится только одна трещина. Начальная трещина характеризуется некоторым вектором (набором параметров), задающим длину, координаты центра трещины и ее ориентацию. Данный начальный вектор предполагается принадлежащим некоторому множеству начальных состояний. Принимаемые естественные предположения и имеющиеся дополнительные данные, касающиеся наиболее опасных частей конструкции, позволяют во многих случаях рассматривать множество начальных состояний как заданное множество. Рассматриваемая в работе задача оптимизации формы заключается в отыскании распределения радиуса оболочки вращения, для которой достигает минимума объем материала при выполнении геометрических ограничений, накладываемых на радиус оболочки, и прочностного ограничения, означающего, что критическое число циклов должно превышать заданное минимальное значение. Согласно гарантированному подходу, критическое число циклов функционирования конструкции, определяющее срок ее службы, находится в расчете на наихудший случай реализации вектора начальных параметров. В работе изучены “наихудшие” случаи возникновения и развития трещины в оболочках, позволяющие существенно сократить множество вариантов в минимаксном подходе. В частности, установлена достаточность рассмотрения двух экстремальных ориентаций трещин в оболочках (меридиональной и периферийной ориентаций). Показано, что сложное ограничение, накладываемое на допустимое число циклов до разрушения, сводится к более простой по форме системе двух прямых неравенств на нормальные напряжения (окружное и меридиональное напряжение). Для построения численного решения задачи оптимизации и отыскания форм оболочек минимального веса разработан подход, основанный на конструировании штрафных функционалов для учета рассматриваемых ограничений и построении расширенного функционала Лагранжа. С целью отыскания глобального минимума невыпуклого функционала Лагранжа используется эффективная модификация эволюционного (генетического) алгоритма. Главное отличие предложенной модификации от классического варианта генетического алгоритма заключается во введении специальных операций: фиксации, эллитизма, циклической инициализации популяций, операций с циклическими кусочно-постоянными вероятностями скрещивания и мутации. В разработанной модификации алгоритма предполагается, что число индивидуумов в популяции фиксировано, а запоминаются только лучшие индивидуумы. При проведении расчетов показаны преимущества предложенной модификации генетического алгоритма по сравнению с его классическими версиями.

1. Основные соотношения модели

Рассматривается упругая оболочка, срединная поверхность которой имеет форму поверхности вращения. Положение меридиана (меридианной плоскости) определяется углом θ, отсчитываемым от некоторой фиксированной меридианной плоскости, а положение параллельного круга задается углом φ, образованным нормалью к срединной поверхности и осью вращения (рис.1), или координатой x, измеряемой вдоль оси вращения: $0 \le x \le L$, L – заданная величина.

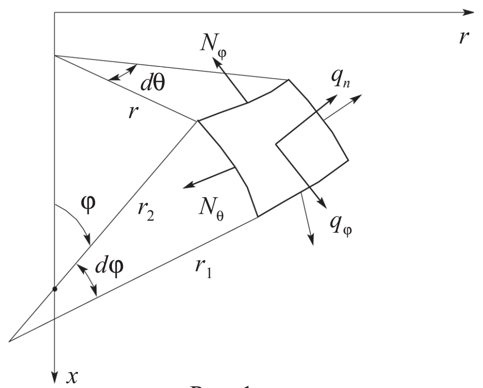


Рис. 1

Меридианная плоскость и плоскость, нормальная к меридиану, являются плоскостями главных кривизн в рассматриваемой точке. Соответствующие радиусы кривизны и радиус параллельного круга обозначаются через r_1, r_2, r_0. Геометрия оболочки является заданной, если задана форма ее срединной поверхности. Здесь и далее толщина оболочки h считается постоянной величиной. Ограничимся рассмотрением осесимметричных форм срединной поверхности (профиль каждого поперечного сечения является круговым) и используем расстояние $r_0(x)$ от оси вращения до срединной поверхности в качестве переменной, описывающей форму срединной поверхности (рис.2). Данная переменная $r_0(x)$ будет в дальнейшем рассматриваться в качестве переменной проектирования. Геометрические соотношения между радиусом кривизны меридиана $r_1(x)$, радиусом кривизны широты r_2 и радиусом параллельного круга имеют вид:

$$r_1 = -\frac{(1+(dr_0/dx)^2)^{3/2}}{d^2x_0/dx^2}, \quad r_2 = r_0(1+(dr_0/dx)^2)^{1/2}. \tag{1}$$

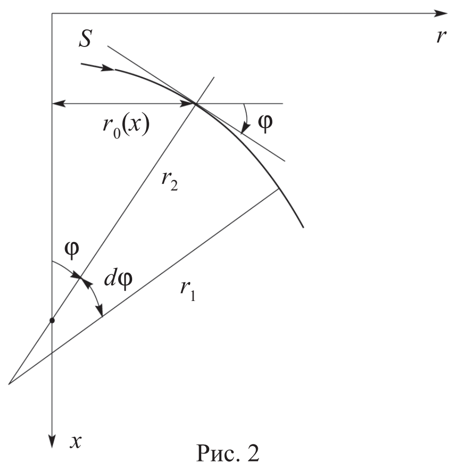


Рис. 2

При описании геометрии оболочки будем учитывать также, что

$$r_0 = r_2 \sin\varphi, \quad dr_0 / d\varphi = r_1 \cos\varphi, \quad dx / d\varphi = r_1 \sin\varphi. \tag{2}$$

Оболочка нагружена осесимметричными силами, действующими в меридианных плоскостях. Интенсивности внешних воздействий в нормальном к срединной поверхности и касательном к меридиану направлениях обозначаются через q_n и q_φ. Результирующая внешних воздействий, действующая в направлении оси x, обозначается через R. Равновесное напряженное состояние безмоментной оболочки вращения, нагруженной осесимметричными нагрузками q_n, q_φ, описывается следующими уравнениями:

$$d(r_0 N_\varphi) / d\varphi - N_\theta r_1 \cos\varphi + r_0 r_1 q_\varphi = 0, \tag{3}$$

$$N_\varphi / r_1 + N_\theta / r_2 = q_n, \tag{4}$$

с соответствующими граничными условиями (см., например, [17]), служащими для определения нормальных мембранных усилий (на единицу длины) N_φ и N_θ. Соответствующие нормальные мембранные напряжения σ_φ и σ_θ, действующие в меридиональном и окружном направлениях, находятся по формулам:

$$\sigma_\varphi = N_\varphi / h, \quad \sigma_\theta = N_\theta / h. \tag{5}$$

Все внешние нагрузки (q_n, q_φ) и их результирующие предполагаются пропорциональными параметру нагрузки p. Это предположение записывается в виде:

$$q_n = \tilde{q}_n p, \quad q_\varphi = \tilde{q}_\varphi p, \tag{6}$$

$$\tilde{q}_n = (q_n)_{p=1}, \quad \tilde{q}_\varphi = (q_\varphi)_{p=1}. \tag{7}$$

Считается, что внешние нагрузки q_n, q_φ являются циклическими и изменяются квазистатически в заданных пределах, то есть

$$0 \le p_{\min} \le p \le p_{\max}, \tag{8}$$

где $p_{\min}$ и $p_{\max}$ – заданные величины. Принимая во внимание, что для вычисления внутренних усилий и напряжений в оболочке в случае отсутствия в ней трещин используются уравнения линейной теории упругости, будем иметь:

$$N_j = p\tilde{N}_j, \quad \sigma_j = p\tilde{\sigma}_j, \tag{9}$$

где $j = \varphi, \theta$ и

$$\tilde{N}_j = (N_j)_{p=1}, \quad \tilde{\sigma}_j = (\sigma_j)_{p=1}. \tag{10}$$

Нетрудно заметить, что введенные величины $\tilde{N}_\varphi$, $\tilde{N}_\theta$, $\tilde{\sigma}_\varphi$, $\tilde{\sigma}_\theta$ удовлетворяют тем же уравнениям, что и исходные величины N_φ, N_θ, σ_φ, σ_θ. Знак "тильда" будет опускаться в дальнейшем. Предполагается, что в процессе изготовления или эксплуатации в оболочке может возникнуть начальная сквозная трещина и что материал оболочки является квазихрупким. Трещина считается прямолинейной, а ее начальная длина удовлетворяет условию $l_i \leq l_{cr}$. Величина l_{cr} определяет момент глобального разрушения оболочки. Условие невозникновения катастрофического неустойчивого разрушения, как это хорошо известно из механики разрушения квазихрупких тел и конструкций, записывается в виде следующего неравенства:

$$K_1 < K_{1C}, \tag{11}$$

накладываемого на величину коэффициента интенсивности напряжений K_1, фигурирующего в асимптотическом представлении напряжений в окрестности кончика трещины (раскрывающаяся трещина). Через K_{1C} обозначена константа прочности квазихрупкого материала (вязкость материала). В дальнейшем строгое неравенство (11) приближенно заменяется модифицированным неравенством [18–20]:

$$K_1 \leq K_{1\varepsilon}, \quad K_1 = K_{1C} - \varepsilon, \quad \varepsilon \geq 0, \tag{12}$$

включающим также случай строгого равенства. Здесь вводится положительный малый параметр ε и редуцированное значение $K_{1\varepsilon}$ предельной величины коэффициента интенсивности напряжений K_1. Данная аппроксимация вводится для удобства применения в дальнейшем оптимизационных процедур.

После приложения к оболочке цилиндрических нагрузок начальная трещина начинает распространяться, и ее длина l монотонно увеличивается ($l_i \leq l \leq l_{cr}$). Процесс усталостного роста трещины при циклических нагружениях описывается уравнением следующего вида [21, 22]:

$$dl / dn = C(\Delta K_1)^m, \tag{13}$$

$$l_i \leq l \leq l_{cr}, \quad 0 \leq n \leq n_{cr}. \tag{14}$$

Здесь C и m ($2 \leq m \leq 4$) – заданные материальные константы, а приращение ΔK_1 задается выражением:

$$\Delta K_1 = (K_1)_{\max} - (K_1)_{\min} = (K_1)_{p=p\max} - (K_1)_{p=p\min}, \tag{15}$$

где $(K_1)_{\max}$, $(K_1)_{\min}$ – соответственно максимальное и минимальное значения коэффициента интенсивности напряжений в каждом цикле нагружения. Обыкновенное дифференциальное уравнение (13) описывает квазистатический процесс роста трещины и определяет зависимость длины трещины l от числа циклов нагружения оболочки n. Это уравнение справедливо вплоть до момента, когда

$$n = n_{cr}, \quad l = l_{cr}, \tag{16}$$

и начинается неустойчивое распространение трещины (катастрофическое разрушение оболочки). Для нахождения l_{cr} используется критерий разрушения:

$$(K_1)_{l=lcr,\, p=p\max} = K_{1\varepsilon}. \tag{17}$$

В дальнейшем будем предполагать, что не только начальная трещина, но и увеличивающаяся в размерах в процессе циклических воздействий трещина ($l_i \le l \le$ $\le l_{cr}$) являются прямолинейными и что длина трещины l много больше толщины оболочки h и много меньше характерного размера r_m, то есть

$$h << l_i \le l \le l_{cr} << r_m, \tag{18}$$

$$r_m = \min\{\min_{0\le x\le L} r_1(x), \min_{0\le x\le L} r_2(x)\}. \tag{19}$$

Внешний минимум в (19) означает операцию определения минимальной из двух величин, записанных в фигурных скобках. Также предполагается, что функция $r_0 = r_0(x)$ является достаточно гладкой и что выражение

$$\begin{gathered} K_1 = p\sigma_n(\pi l/2)^{1/2} \quad (\sigma_n > 0), \\ K_1 = 0 \quad (\sigma_n \le 0) \end{gathered} \tag{20}$$

может использоваться для оценки величины коэффициента интенсивности напряжений при условии, что сквозная трещина достаточно мала и достаточно удалена от краев оболочки. Фигурирующая в (20) величина $p\sigma_n$ представляет собой нормальное напряжение в оболочке без трещины (неповрежденной идеальной оболочке) на месте расположения трещины в рассматриваемой реальной оболочке. Нижний индекс n у компоненты напряжения означает, что данное напряжение действует в направлении, нормальном к берегам трещины. Используя (17), (20) для отыскания критической длины трещины l_{cr}, приходим к следующей формуле:

$$l_{cr} = 2/\pi(K_{1\varepsilon}/(p_{\max}\sigma_n))^2. \tag{21}$$

2. Оптимизация формы оболочек при ограничениях по долговечности

Долговечность конструкции может оцениваться по числу циклов нагружения $n = n_{cr}$, приводящему к достижению трещиной критического размера $l = l_{cr}$ и последующему неустойчивому разрушению. В проблеме проектирования ограничение по долговечности может быть записано в виде следующего неравенства:

$$n_{cr} \ge n_*, \tag{22}$$

где n_* – заданное минимально допустимое значение. В последующих рассмотрениях предполагается, что возможное расположение начальных трещин, возникающих при изготовлении или эксплуатации оболочки, заранее неизвестно. В контексте проектирования конструкций это приводит к существенным усложнениям при вычислении n_{cr}, обусловленным необходимостью анализа множества расположений трещины и ее ориентаций и проведения соответствующих расчетов оболочки с трещиной. Допустим к рассмотрению только внутренние (не лежащие вблизи границ оболочки) сквозные трещины и охарактеризуем начальную трещину вектором

$$\omega = \{l_i, x_C, \alpha\},$$

содержащим координату центра трещины x_C, длину трещины l и угол α, задающий наклон трещины к меридиану (рис. 3). Вторая координата θ_C центра трещины является несущественной и исключается из проводимого анализа, так как рассматриваются осесимметричные задачи и применяется гарантированный подход, допускающий все расположения середины трещины на параллелях ($0 \le \theta_C \le 2x$). Если $\alpha = 0$, то трещина ориентирована в меридиональном направлении (аксиальная трещина), а для $\alpha = \pi/2$ трещина ориентирована в направлении параллелей (периферийная трещина). Предполагается, что начальные длины трещин l_i не превышают заданного предельного значения l_{im}, где $l_i \le l_{im} < l_{cr} << r_m$.

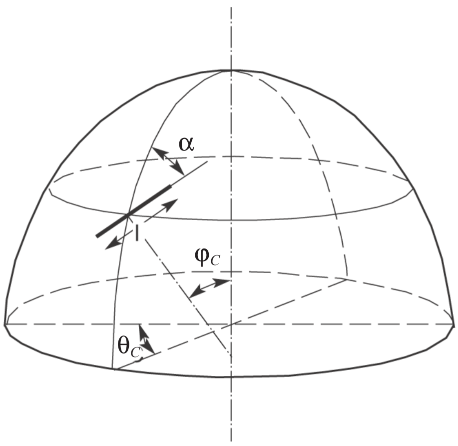


Рис. 3

Выделим основные предположения, используемые в дальнейшем при решении задач оптимального проектирования:

– квазихрупкая оболочка содержит внутреннюю сквозную трещину, моделируемую прямолинейным разрезом, причем берега разреза считаются свободными от поверхностных воздействий;

– начальная длина трещины l_i и ее текущая длина l ($l_i \le l \le l_{cr}$) удовлетворяют условию (18), причем $l \le l_{im}$;

– оболочка содержит только одну начальную трещину, но эта трещина может принимать произвольные начальные положения и ориентации, то есть характеризоваться произвольным вектором ω из заданного множества $\Lambda(\omega \in \Lambda)$.

Принятые допущения и имеющиеся дополнительные данные, касающиеся наиболее опасных в смысле появления трещин областей оболочки, определяют множество Λ допустимых начальных трещин. В частности, если дополнительная информация отсутствует, то множество Λ задается в виде:

$$\Lambda = \{l_i \le l_{im}, \quad 0 \le x_C \le L, \quad 0 \le \alpha \le \pi/2\}.$$

Учитывая фактор неполноты информации, касающейся возможного расположения начальной трещины, можно придать ограничению по долговечности следующую форму:

$$\min_{\omega\in\Lambda} n_{cr} \geq n_*. \tag{23}$$

Рассматриваемая оптимизационная задача заключается в отыскании формы меридиана оболочки $r_0 = r_0(x)$, так что объем материала оболочки

$$J = 2\pi\int_{s_0}^{s_1} r_0 h ds = 2\pi\int_0^L r_0 h(1+(dr_0/dx)^2)^{1/2}dx \tag{24}$$

достигает минимума при условии на долговечность (23) и дополнительного геометрического ограничения

$$r_0(x) \geq r_g(x), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{25}$$

где $r_g(x) \geq 0$ – заданная функция. Для исследования сформулированной задачи применим так называемый минимаксный или гарантированный подход. Согласно гарантированному подходу, критическое число циклов нагружения конструкции, определяющее срок ее службы, находится в расчете на наихудший случай реализации вектора начальных параметров. При этом определяемая форма оболочки считается оптимальной, если для любой другой оболочки меньшего веса возможно выбрать вектор ω начальных параметров из заданного допустимого множества Λ так, что по крайней мере одно из рассматриваемых ограничений оказывается нарушенным.

Эффективный анализ условия долговечности (23) можно провести, получив предварительно явное выражение для n_{cr} как функции параметров задачи. С этой целью заметим, что

$$\Delta K_1 = \Delta p\sigma_n(\pi l/2)^{1/2}, \quad \Delta p = p_{\max} - p_{\min}, \tag{26}$$

и выполним интегрирование с использованием соотношений (13), (14), (21). Будем иметь:

$$n_{cr} = n_{cr}(l_i, \sigma_n(\alpha, x)) = \frac{\psi_1(l_i, \sigma_n(\alpha, x))}{\psi_2(l_i, \sigma_n(\alpha, x))}, \tag{27}$$

$$\psi_1(l_i, \sigma_n(\alpha, x)) = 1 - [\pi l_i / 2(p_{\max}\sigma_n(\alpha, x)/K_{1\varepsilon})^2]^{m/2-1},$$

$$\psi_2(l_i, \sigma_n(\alpha, x)) = C(m/2-1)(\pi/2)^{m/2} l_i^{m/2-1}[p_{\max}\sigma_n(\alpha, x)(1 - p_{\min}/p_{\max})]^m.$$

Как это видно из выражений (27), критическое число циклов n_{cr} является монотонно убывающей функцией величин l_i и σ_n при любых x $(0 \leq x \leq L)$, и, следовательно, минимум величины n_{cr} по l_i и σ_n достигается при

$$l_i = l_{im}, \quad \sigma_n = \max_{\alpha} \sigma_n(\alpha, x), \tag{28}$$

где l_{im} – заданная максимальная длина рассматриваемых начальных трещин. Принимая во внимание, что экстремальные значения σ_n при изменении угла наклона α реализуются для $\alpha = 0$ (меридиональное направление) и для $\alpha = \pi/2$ (направление вдоль параллели), находим, что минимум величины n_{cr} по α достигается, когда α принимает одно из двух значений: $\alpha = 0$ (аксиальная трещина) или $\alpha = \pi/2$ (периферийная трещина). Имеем

$$\min_{\omega\in\Lambda} n_{cr}(l_i, \sigma_n(\alpha, x)) = \min_{0\le x\le L} \hat{n}_{cr}(x), \tag{29}$$

при этом

$$\begin{gathered} \hat{n}_{cr}(x) = \min\{n_{cr}(l_{im}, \sigma_\theta(x)), \quad n_{cr}(l_{im}, \sigma_\varphi(x))\}, \\ \sigma_\theta(x) = (\sigma_n(\alpha, x))_{\alpha=0}, \quad \sigma_\varphi(x) = (\sigma_n(\alpha, x))_{\alpha=\pi/2}. \end{gathered} \tag{30}$$

Операция минимума в (30) означает отыскание минимума из двух величин, записанных в фигурных скобках. При получении соотношения (29) используется свойство величины σ_n изменяться в пределах между значениями σ_θ и σ_φ.

Представим строгое доказательство соответствующих неравенств. С этой целью заметим, что в мембранной теории тонких оболочек, имеющих форму поверхности вращения, имеется три ненулевых компоненты тензора напряжений: две нормальные компоненты тензора напряжений – σ_φ, σ_θ – и одна сдвиговая компонента $\sigma_{\varphi\theta}$. Принимая во внимание, что форма оболочки и прикладываемые к ней внешние силы обладают осевой симметрией, и используя уравнения равновесия, получим, что сдвиговые напряжения $\sigma_{\varphi\theta}$ равны нулю ($\sigma_{\varphi\theta} = 0$) и только нормальные напряжения σ_φ и σ_θ оказываются ненулевыми [23]. Это означает, что рассматриваемые мембранные нормальные напряжения σ_φ и σ_θ являются главными напряжениями и, следовательно, имеют место требуемые неравенства:

$$\sigma_\varphi \le \sigma_n \le \sigma_\theta, \text{ если } \sigma_\varphi \le \sigma_\theta; \quad \sigma_\theta \le \sigma_n \le \sigma_\varphi, \text{ если } \sigma_\theta \le \sigma_\varphi. \tag{31}$$

Таким образом, при проведении дальнейших оценок необходимо рассматривать только аксиальные и периферийные трещины.

Исходное ограничение по долговечности (22) может быть записано в виде одного неравенства

$$\min_{0\le x\le L} \hat{n}_{cr}(x) \ge n_* \tag{32}$$

или в виде системы двух неравенств

$$n_{cr}(l_{im}, \sigma_\theta(x)) \ge n_*, \quad n_{cr}(l_{im}, \sigma_\varphi(x)) \ge n_* \tag{33}$$

$$0 \le x \le L.$$

Применение этих неравенств может быть значительно упрощено при помощи сведения (33) к прямым неравенствам, накладываемым непосредственно на σ_θ и σ_φ. Принимая во внимание монотонность величины $n_{cr}(l_{im}, \sigma_n)$ при изменении значений σ_n, определим величину n_* как корень алгебраического уравнения

$$n_{cr}(l_{im}, \sigma_*) = n_*,$$

которое записывается в явной форме следующим образом:

$$\frac{1 - [\pi l_{im} / 2(p_{\max}\sigma_* / K_{1\varepsilon})^2]^{m/2-1}}{C(m/2-1)(\pi/2)^{m/2}\, l_{im}^{m/2-1} [p_{\max}\sigma_*(1 - p_{\min}/p_{\max})]^m} = n_*. \tag{34}$$

Для $\sigma_n \le \sigma_*$ будем иметь

$$n_{cr}(l_{im}, \sigma_n) \geq n_{cr}(l_{im}, \sigma_*) = n_*. \tag{35}$$

Следовательно, условие долговечности (33) сводится к следующей системе двух неравенств:

$$\sigma_\varphi \leq \sigma_*, \quad \sigma_\theta \leq \sigma_*. \tag{36}$$

Таким образом, сформулированная оптимизационная задача свелась к минимизации интегрального функционала (24) при прочностных ограничениях (36) и геометрическом ограничении (25). Если процесс усталостного роста трещины при циклических нагружениях описывается законом Париса (13) с $m = 4$, то значение для величины σ_* может быть найдено в виде:

$$\begin{gathered}\sigma_*^2 = b_1(-1 + (1 + b_2)),\\ b_1 = (\pi C(1 - p_{\min} / p_{\max})^4 K_{1\varepsilon}^2 n_*)^{-1},\\ b_2 = 4n_* C K_{1\varepsilon}^4 l_{im}^{-1}(1 - p_{\min} / p_{\max})^4.\end{gathered} \tag{37}$$

Далее рассматривается случай, когда $m = 4$, $q_n = q_\varphi = 0$ $(0 \leq x \leq L)$ и внешние нагрузки приложены к краям оболочки при $x = 0$ и $x = L$, причем результирующая сила равна R (рис. 4).

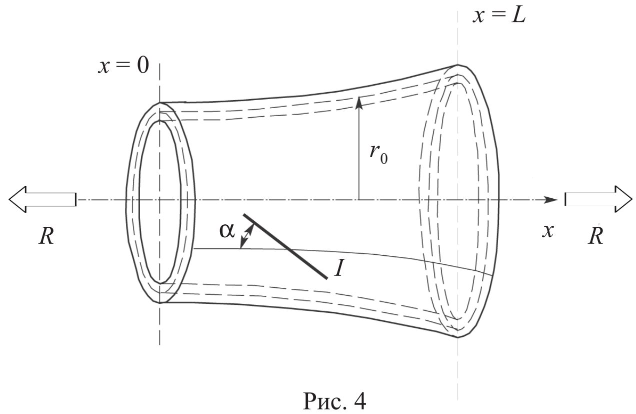


Рис. 4

В этом случае

$$\begin{gathered}\sigma_\varphi = R(1 + (dr_0 / dx)^2)^{1/2} / 2\pi r_0 h,\\ \sigma_\theta = R(1 + (dr_0 / dx)^2)^{-1/2} / 2\pi h d^2 r_0 / dx^2\end{gathered} \tag{38}$$

и оптимизационная задача формулируется следующим образом:

$$J = \int_0^L r_0 (1 + (dr_0 / dx)^2)^{1/2} dx \to \min, \tag{39}$$

$$\psi_1 = \beta / r_0 (1 + (dr_0 / dx)^2)^{1/2} - 1 \leq 0, \tag{40}$$

$$\psi_2 = \beta / (1 + (dr_0 / dx)^2)^{1/2} (d^2 r / dx^2) - 1 \leq 0, \tag{41}$$

$$\psi_3 = 1 - r_0 / r_g \le 0, \tag{42}$$

где $R = (R)_{p=1}$ и параметр задачи определяется как

$$\beta = R / 2\pi h \sigma_*. \tag{43}$$

Далее будут рассмотрены конкретные задачи оптимального проектирования оболочек. Предварительно сделаем некоторые замечания. В случае оболочек, подкрепленных круговыми стрингерами или другими подкреплениями, противодействующими окружным расширениям, вблизи опор могут возникать изгибные напряжения. Однако краевой эффект оказывается локализованным, и краевые зоны со значительными моментами относительно малы. На незначительных расстояниях от границы оболочки возможно использование мембранной теории оболочек [24]. Принимая это обстоятельство во внимание, будем распространять оптимальные решения на области, примыкающие к границе.

3. Численное решение

Для отыскания решения задачи (39)–(43) применим метод штрафных функций в комбинации с генетическим алгоритмом. Введем функции Ψ_i, $i = 1, 2, 3$, и функционалы штрафов J_i , $i = 1, 2, 3$:

$$\Psi_i = \begin{cases} \Psi_i, & \Psi_i > 0, \\ 0, & \Psi_i \le 0, \end{cases} \tag{44}$$

$$J_i = \int_0^L \Psi_i dx, \tag{45}$$

а также расширенный функционал

$$J^a = J + \sum_{i=1}^{3} \mu_i J_i. \tag{46}$$

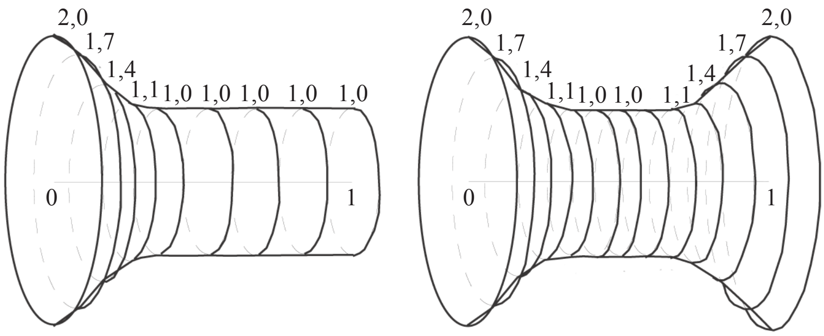
Здесь $\mu_i \ge 0$ – произвольные положительные параметры метода.

Для минимизации J^a применим эволюционный вероятностный метод оптимизации – генетический алгоритм (см., например, [25]). В этом случае этот метод оказывается эффективным при отыскании глобального минимума. Предложенные численные оптимизационные процедуры используют представление срединной поверхности $r_0(x)$ оболочки, форма которой описывается контрольными точками

$$(x_0, r_0(x_0)), \quad (x_1, r_0(x_1)), \quad \dots \quad (x_{n-1}, r_0(x_{n-1})).$$

Первая и последняя точки предполагаются фиксированными.

Вычисления были проведены для следующих значений параметров: $L = 1$, $r_g =$ $= 0{,}1$; $n = 13$; $r_0(0) = 2{,}0,\ 1{,}5,\ 1{,}0,\ 0{,}5$; $r_0(1) = r_g$, $r_0(0)/2$, $r_0(0)$ ($r_0(0)$, $r_0(1)$ – левый и правый радиусы оболочки). Параметры генетического алгоритма задавались следующим образом: число индивидуумов в популяции $q = 10$; число узлов $n = 13$; шаг фиксации $F_s = 20$. Результаты расчетов для случая $r_0(0) = 2{,}0$; $r_0(1) = r_0(0)/2 =$ $= 1{,}0$ и для случая $r_0(0) = 2{,}0$; $r_0(1) = r_0(0) = 2{,}0$ представлены на рис. 5 (варианты *а*) и *б*)).



а) *б*)

Рис. 5

Заключение

В работе изучены задачи отыскания форм тонкостенных конструкций (оболочек), обладающих минимальной массой и удовлетворяющих соответствующим геометрическим ограничениям и ограничениям, накладываемым на допустимое число циклов до разрушения в случае циклического приложения внешних воздействий к конструкции. Исследованы “наихудшие” случаи возникновения и развития трещин в оболочках, позволяющие существенно сократить множество вариантов в минимаксном подходе. Установлена достаточность рассмотрения двух экстремальных ориентаций трещин в оболочках (меридиональной и периферийной ориентаций). Показано, что сложное ограничение, накладываемое на допустимое число циклов до разрушения, сводится к более простой по форме системе двух прямых неравенств на нормальные напряжения (окружное и меридиональное напряжения). Для построения численного решения задачи оптимизации и отыскания форм оболочек минимального веса разработан подход, основанный на конструировании штрафных функционалов для учета рассматриваемых ограничений и построении расширенного функционала Лагранжа. Разработана эффективная модификация эволюционного (генетического) алгоритма. Проведены расчеты оптимальных форм оболочек и проиллюстрированы преимущества предложенной модификации генетического алгоритма по сравнению с его классическими версиями.

Работа выполнена при поддержке Программы ОЭММПУ “Накопление поврежденности, разрушение, изнашивание и структурные изменения материалов при интенсивных механических, структурных и радиационных воздействиях”, Гранта NWO, № 047.014.007 (Нидерландская Организация Фундаментальных Научных Исследований), Гранта РФФИ “Юг” (№ 34) “Методы оптимального проектирования конструкций при динамических нагружениях”, Гранта РФФИ № 05-08-18094а.

Литература

1. *Abdi, R.* Optimal design for minimum weight in cracked pressure vessel of a turboshaft / R. Abdi, M. Touratier, P. Convert // Communications in Numerical Methods in Engineering. – 1996. – V. 12. – P. 271–280.

2. *Thomsen, N.B.* Optimization – a tool in advanced material technology / N.B. Thomsen, J. Wang, B.L. Karihaloo // Struct. Optim. – 1994. – V. 8. – P. 9–15.

3. *Thomsen, N.B.* Optimum microstructure of transformation-toughened ceramics for enhanced wear performance / N.B. Thomsen, B.L. Karihaloo // J. Am. Ceram. Soc. – 1995. – V. 78(1). – P. 3–8.

4. *Wang, J.* Fracture mechanics and optimization – a useful tool for fibre-reinforced composite

design / J. Wang, B.L. Karihaloo // Composite Structures. - 1995. – V. 32. - P. 453-466.

5. *Papila, M.* Implementation of a crack propagation constraint within a structural optimization software / M. Papila, R.T. Haftka // Struct, Optim. – 2003. – V. 25. – P. 327–338.

6. *Vitali, R.* Multi-fidelity design of stiffned composite panel with a crack / R. Vitali, R.T. Haftka, B.V. Sankar // Struct. Multidisc. Optim. – V. 23(5). – P. 347–356.

7. *Banichuk, N.V.* Free boundary optimization under fracture mechanics constraints / N.V. Banichuk // Analete Stiintifice, Universitatii. OVIDIUS, Constanta. – 1996. – V. 5(1). – P. 13–20.

8. *Banichuk, N.V.* Optimal design of quasi-brittle elastic bodies with cracks / N.V. Banichuk // Mechanics of Structures and Mashines. – 1998. – V. 26(4). – P. 365–376.

9. *Banichuk, N.V.* Asymptotic approach to optimal structural design with brittle fracture constraints (Deterministic and stochastic problems) / N.V. Banichuk // In: Mechanics of Composite Materials and Structures, C.A.Mota Scares et all (eds). Kluwer-Academic Publisher. – 1999. – P. 477–487.

10. *Yu, X.* A mixed design approach for probabilistic structural durability / X. Yu, K.K. Choi, K.X. Chang // Structural Optimization. – 1997. – V. 14. – P. 81–90.

11. *Banichuk, N.V.* Probabilistic approaches for optimal beam design based on fracture mechanics / N.V. Banichuk, F. Ragnedda, M. Serra // Meccanica. – 1999. – V. 34. – P. 29–38.

12. *Borovkov, A.* Macrofailure criterion and optimization of composite structures with edge delamination / A. Borovkov[et al.] // Int. J. for Computatinal Civil and Structural Enbgineering. – 2000. – V. 1(1). – P. 91–104.

13. *Banichuk, N.V.* Shape optimization for structures from quasi-brittle materials subjected to cyclic loads / N.V. Banichuk, M. Makela, P. Neittaanmaki // In: Identification, Control and Optimization, G.De Roeck and B.H.V.Topping (eds). CIVIL-COMP Press, Edinburgh. – 2000. – P. 145–151.

14. *Serra, M.* Optimum beam based on fatigue crack propagation / M. Serra // Struct. Multidisc. Optim. – 2000. – V. 19(2). – P. 159–163.

15. *Любимов*, *А.К.* Вероятностный подход к задаче оптимизации подкрепленной пластины с трещиной / А.К. Любимов, Е.В. Макаренко // Прикладные проблемы прочности и пластичности. М.: ТНИ КМК. – 1996. – Вып. 54. – С. 120–131.

16. *Stadler, W.* Natural structural shapes for shells of revolution in the membrane theory of shells / W. Stadler, V. Krishnan // Struct. Optim. – 1989. – V. 1(1). – C. 19–27.

17. *Flugge, W.* Stresses in Shells / W. Flugge. – Berlin: Springer-Verlag, 1973.

18. *Streletskii, N.S.* The question of establishing safety factors for structures / N.S. Streletskii // Izv. AN SSSR. – 1949. – OTH. 1.

19. *Bolotin, V.V.* Statistical Methods in Structural Mechanics / V.V. Bolotin. – San Fracisco: Holden-Day, 1969.

20. *Smith, R.N.L.* BASIC Fracture Mechanics / R.N.L. Smith. – Oxford: Butterworth-Heinemann Ltd., 1991.

21. *Hellan, K.* Introduction to Fracture Mechanics / K. Hellan. – New York: Mc-Graw-Hill, 1984.

22. *Kanninen, M.F.* Advanced Fracture Mechanics / M.F. Kanninen, C.H. Popelar. – New York: Oxford University Press, 1985.

23. *Timoshenko, S.* Strength of Materials. Part II, Advanced Theory and Problems / S. Timoshenko. – New York: D.Van Nostrag Company, 1956 (P. 116–137).

24. *Timoshenko, S.* Theory of Plates and Shells / S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger. – New York: Mcgraw-Hill, 1959.

25. *Goldberg, D.E.* Genetic Algorithms in Search, Optimization and Nashine Learning / D.E. Goldberg. – Addision-Westley Publ. Comp., inc., 1989.

[24.02.2005]