

УДК 539.3

ГРАНИЧНО-ВРЕМЕННÓЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНОЙ ПОРОУПРУГОЙ ДИНАМИКИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ШАГОВОЙ СХЕМЫ НА УЗЛАХ МЕТОДОВ РУНГЕ – КУТТЫ*

© 2014 г. Л.А. Игумнов, С.Ю. Литвинчук, Я.Ю. Ратаушко

НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского

igumnov@mech.unn.ru

Поступила в редакцию 14.05.2014

Развита методика гранично-элементного моделирования решений краевых задач трехмерной пороупругой динамики на основе шаговых схем. Для решения краевой задачи в преобразованиях по Лапласу используется метод граничных элементов и шаговая по времени схема численного обращения преобразования Лапласа на узлах семейства методов Рунге – Кутты. Применяется вариация шаговой схемы с переменным шагом интегрирования при получении коэффициентов общей квадратуры с учетом симметрии подынтегральной функции и с использованием формул интегрирования сильно осциллирующих функций. С помощью разработанного подхода решена задача о действии вертикальной силы на поверхность пороупругого полупространства. Сравнение решений с результатами, полученными на основе традиционной шаговой схемы, позволяет судить об экономии вычислительных затрат при использовании методов Рунге – Кутты совместно с шаговой схемой метода граничных элементов.

Ключевые слова: метод граничных элементов, преобразование Лапласа, шаговая схема, методы Рунге – Кутты, трехмерная пороупругая динамика, полупространство.

Введение

В моделировании динамических процессов с помощью метода граничных элементов (МГЭ) можно условно выделить два основных подхода: решение во времени на основе шаговой схемы [1] и решение в преобразованиях Лапласа или Фурье с последующим обращением преобразований [2]. Первый из подходов имеет ряд существенных недостатков, таких как необходимость нахождения фундаментальных решений во времени, значительные вычислительные затраты, небольшой запас стабильности. В работах [3, 4] был предложен метод квадратур сверток, положенный в основу нового подхода к построению шаговых гранично-элементных схем на базе фундаментальных решений в преобразованиях по Лапласу. Этот метод позволяет избавиться от требования существования фундаментальных решений во времени, а

* Выполнено при частичном финансировании Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-593.2014.9) и РФФИ (гранты 12-01-00698а и 12-08-00984а).

также показывает гораздо лучшую стабильность [5]. Работы [6–8] используют аналогичную гранично-элементную схему на основе шагового метода численного обращения преобразования Лапласа. В [9] был рассмотрен вопрос использования метода квадратур сверток совместно с методами Рунге – Кутты. Это сочетание нашло применение в работах [10, 11]. В настоящей статье в рамках метода гранично-временных элементов для решения задач динамики трехмерных пороупругих тел применяется шаговая схема численного обращения преобразования Лапласа на узлах методов Рунге – Кутты. Используется модификация схемы с переменным шагом интегрирования с учетом симметрии подынтегральной функции, построенная на основе квадратур сильно осциллирующих функций.

Модель пороупругой среды

Краевая задача для полной модели Био линейной насыщенной пороупругой среды в преобразованиях Лапласа относительно перемещений \bar{u}_i и порового давления \bar{p} имеет вид [5]:

$$\begin{aligned} G\bar{u}_{i,jj} + \left(K + \frac{G}{3}\right)\bar{u}_{j,ij} - (\alpha - \beta)\bar{p}_{,i} - s^2(\rho - \beta\rho_f)\bar{u}_i &= -\bar{F}_i, \\ \frac{\beta}{s\rho_f}\bar{p}_{,ii} - \frac{\phi^2 s}{Q}\bar{p} - (\alpha - \beta)s\bar{u}_{i,i} &= -\bar{a}, \quad x \in \Omega, \\ \bar{u}'(x, s) = \tilde{u}', \quad x \in \Gamma^u, \quad \bar{u}' &= (\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{p}), \\ \bar{t}'_n(x, s) = \tilde{t}'_n, \quad x \in \Gamma^\sigma, \quad \bar{t}' &= (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \bar{t}_3, \bar{q}), \end{aligned} \quad (1)$$

где Γ^u – граница Дирихле; Γ^σ – граница Неймана; G, K – константы упругости; ϕ – пористость; \bar{F}_i, \bar{a} – объемные силы; q – поровый поток; t – усилие; t' и u' – обобщенные усилия и перемещения,

$$\beta = \frac{\kappa\rho_f\phi^2 s}{\phi^2 + \kappa(\rho_a + \phi\rho_f)}, \quad \alpha = 1 - \frac{K}{K_s}, \quad Q = \frac{\phi^2 K_f K_s^2}{K_f(K_s - K) + \phi K_s(K_s - K_f)}$$

– константы, описывающие взаимодействие упругого скелета с наполнителем; κ – проницаемость; ρ, ρ_a, ρ_f – плотности материала, присоединенной массы и наполнителя соответственно; K_s, K_f – объемные модули упругости скелета и наполнителя соответственно; s – параметр преобразования Лапласа.

Гранично-элементная методика

Решение краевой задачи может быть сведено к решению граничного интегрального уравнения вида [5, 12, 13]:

$$\begin{aligned} \alpha_\Omega u_k(x, s) + \int_{\Gamma} (\tilde{T}_{ik}(x, y, s)u_i(y, s) - \tilde{T}_{ik}^0(x, y, s)u_i(x, s) - \tilde{U}_{ik}(x, y, s)t_i(y, s))d\Gamma &= 0, \\ (x \in \Gamma, y \in \Gamma), \quad t &= (t_1, t_2, t_3, q)^T, \quad u = (u_1, u_2, u_3, p)^T, \end{aligned}$$

где α_Ω – обобщенный коэффициент жесткости, $\tilde{U}(x, s), \tilde{T}(x, s)$ – фундаментальные и сингулярные решения системы (1), $\tilde{T}^0(x, s)$ содержит выделенные особенности, x – точка коллокации.

Для аппроксимации граничной поверхности рассматривается ее разбиение на

совокупность четырехугольных и треугольных восьмиузловых биквадратичных элементов, при этом треугольные элементы считаются вырожденными четырехугольными. Каждый из элементов отображается на эталонный: соответственно квадрат $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in [-1, 1]^2$ либо треугольник $0 \leq \xi_1 + \xi_2 \leq 1, \xi_1 \geq 0, \xi_2 \geq 0$. Узлы интерполяции неизвестных граничных функций являются подмножеством геометрических узлов наложенной гранично-элементной сетки. Локальная аппроксимация строится по согласованной интерполяционной модели Р.В. Гольдштейна [14]: обобщенные граничные перемещения аппроксимируются по билинейным граничным элементам, в то время как обобщенные усилия представляются на элементах постоянными. Для получения дискретного аналога граничных интегральных уравнений (ГИУ) используется метод коллокации. В качестве узлов коллокации выбрано множество узлов аппроксимации исходных граничных функций. Интегральные коэффициенты дискретных аналогов ГИУ и гранично-временных интегральных уравнений (ГВИУ) вычисляются на основе квадратурной формулы Гаусса с использованием алгоритмов понижения порядка и устранения особенности [13].

Шаговая схема на узлах методов Рунге – Кутты

Для интегрального преобразования Лапласа

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$$

рассмотрим шаговую схему численного обращения на узлах метода Рунге – Кутты, представленного в виде таблицы Бутчера:

$$\frac{c|A^T}{b^T}, \quad A \in R^{m \times m}, \quad b, c \in R^m.$$

Шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа близок по своей формулировке к методу квадратур свертки. Однако в то время как метод квадратур свертки основан на теореме о свертке оригиналов, шаговый метод численного обращения преобразования Лапласа основан на теореме об интегрировании оригинала. Применим эту теорему к производной оригинала искомой функции, чтобы в результате интегрирования получить сам искомый оригинал:

$$f(t) = \int_0^t f'(\tau) d\tau.$$

Опираясь на [11], можем записать систему выражений для значений оригинала функции:

$$f(0) = 0, \quad f(n\Delta t) = b^T A^{-1} \sum_{k=1}^n \omega_k(\Delta t), \quad n = 1, \dots, N.$$

Коэффициенты $\omega_k(\Delta t)$ находятся численно с помощью комбинированной формулы, учитывающей специфику интегрирования сильно осциллирующих функций [6]. Вычисления производятся с переменным шагом интегрирования по аргументу φ и линейной аппроксимацией интегрируемой функции

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{\Phi_{k+1} - \Phi_k}{2} e^{-in(\Phi_k + \Phi_{k+1})/2} [D_1(w) \bar{f}(s_k) s_k + D_2(w) \bar{f}(s_{k+1}) s_{k+1}],$$

$$s_k = \frac{\gamma(R e^{i\Phi_k})}{\Delta t},$$

$$w = -n \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2}, \quad D_{1,2}(w) = \begin{cases} \frac{\sin w}{w} \pm \frac{w \cos w - \sin w}{w^2} i & \text{при } |w| > w_*, \\ e^{\mp wi} & \text{при } |w| \leq w_*, \end{cases}$$

i – мнимая единица, R – радиус области аналитичности функции f , φ – параметр шаговой схемы.

Характеристическая функция $\gamma(z)$ имеет вид [11]:

$$\gamma(z) = A^{-1} - zA^{-1}[1]b^T A^{-1}.$$

Задача о пороупругом полупространстве

Рассматривается задача о действии вертикальной силы $t_3 = t^0 f(t)$, $t^0 = -1000$ Н/м² на элемент поверхности однородного пороупругого полупространства $abcd$ площадью 1 м² (рис. 1). В качестве закона изменения нагрузки на участок взята функция Хевисайда $f(t) = H(t)$. Дневная поверхность полупространства свободна и пронизаема: на поверхности поровое давление $p = 0$. Для расчетов используются следующие параметры материала (скальная порода [5]): $K = 8 \cdot 10^9$ Н/м², $G = 6 \cdot 10^9$ Н/м², $\rho = 2458$ кг/м³, $\phi = 0,19$, $K_s = 3,6 \cdot 10^{10}$ Н/м², $\rho_f = 1000$ кг/м³, $K_f = 3,3 \cdot 10^9$ Н/м², $\kappa = 1,9 \cdot 10^{-10}$ м⁴/(Н·с).

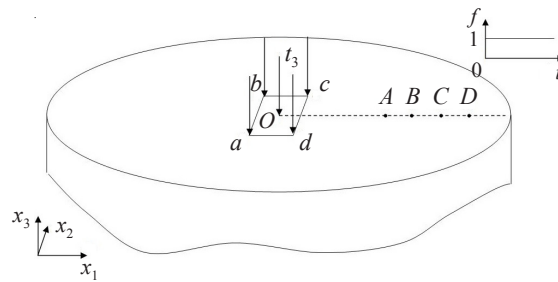


Рис. 1

Задача решалась методом гранично-временных элементов с применением шаговой схемы на узлах метода Радо (Radau IIА) [11]. На рис. 2, 3 продемонстрированы отклики горизонтальных и вертикальных перемещений в точке на расстоянии 15 м от центра нагруженного участка, рассчитанные с использованием гранично-элементной сетки из 1680 элементов (сетка 1). В качестве параметров шаговой схемы взяты: $R = 0,997$, число шагов по времени $N = 250$. Число узлов интегрирования по аргументу φ (с учетом двукратности для схемы Радо) \mathcal{L} менялось. Для сравнения приведены результаты на сетке из 1980 элементов (сетка 2) и решение из [8].

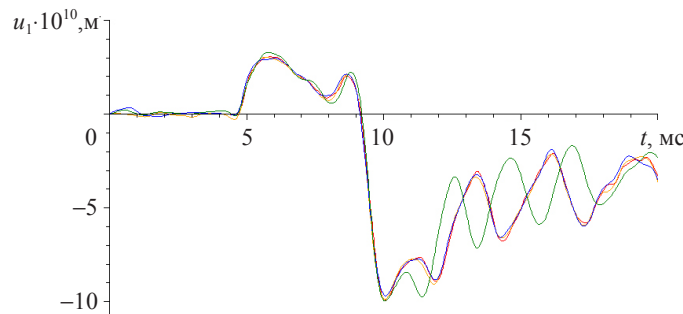


Рис. 2

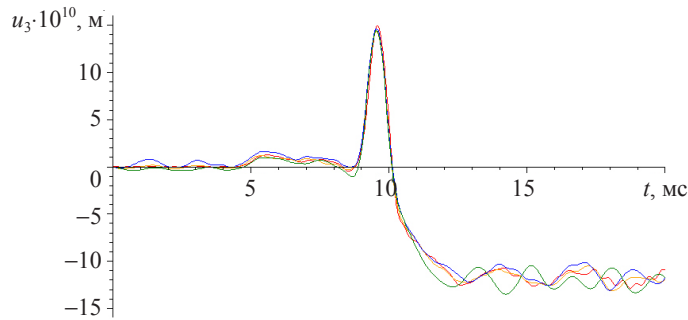


Рис. 3

На рис. 2, 3 цветными линиями обозначено: красная линия – решение из [8], $\mathcal{L} = N = 1000$, желтая – схема Радо, сетка 1, $\mathcal{L} = 4N = 1000$, синяя – схема Радо, сетка 1, $\mathcal{L} = 2N = 500$, зеленая – схема Радо, сетка 2, $\mathcal{L} = 2N = 500$.

На рис. 4, 5 представлены отклики перемещений, полученные на сетке 2 при различных N и \mathcal{L} . Результаты сравниваются с решением из [8] на сетке из 2160 элементов.

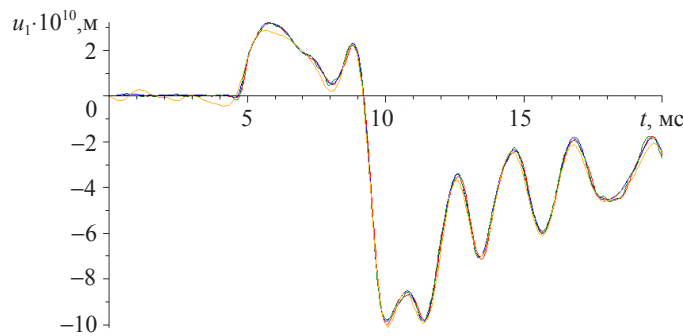


Рис. 4

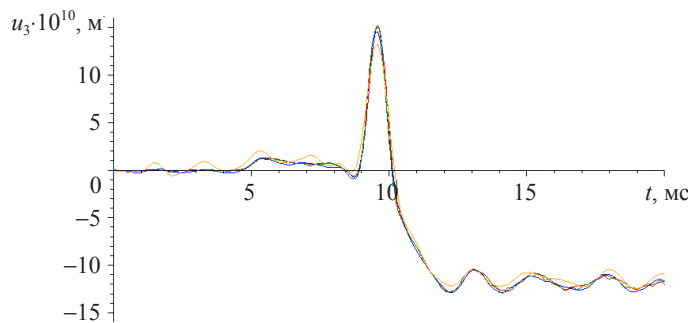


Рис. 5

На рис. 4, 5 цветными линиями обозначено: красная линия – решение из [8], $\mathcal{L} = N = 1000$, желтая – схема Радо, $\mathcal{L} = 2N = 250$, синяя – схема Радо, $\mathcal{L} = 2N = 500$, зеленая – схема Радо, $\mathcal{L} = 2N = 1000$.

Настоящее исследование подтверждает результаты, полученные в [8]. Однако для вычисления отклика перемещений с использованием шаговой по времени схемы на узлах метода Радо достаточно 250 узлов по времени и 250 двукратных узлов по аргументу φ .

На рис. 6, 7 показаны отклики перемещений в точках поверхности полупространства на различных расстояниях от центра приложения нагрузки: $l = 8; 11,7; 15; 18,47$ и 23 м.

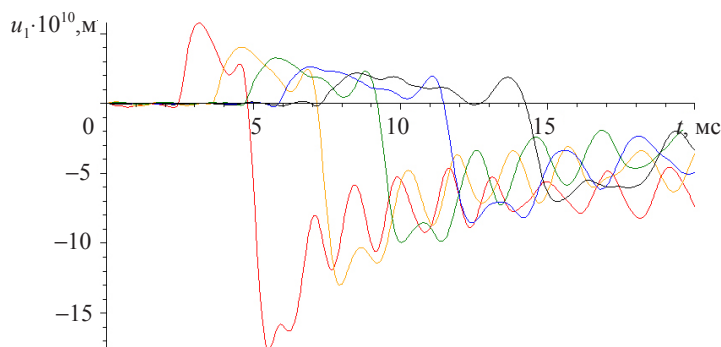


Рис. 6

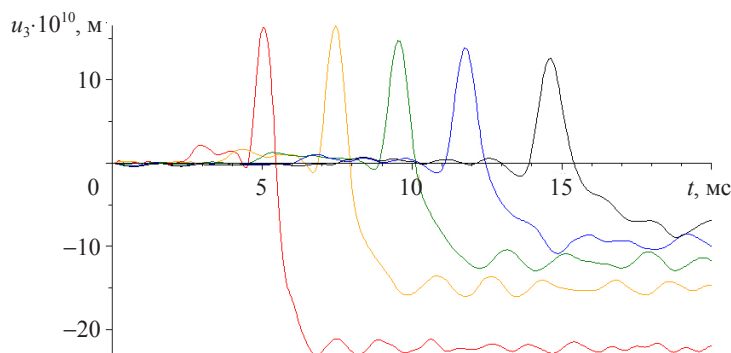


Рис. 7

На рис. 6, 7 обозначено: красная линия – $l = 8$ м, желтая – $l = 11,7$ м, синяя – $l = 15$ м, зеленая – $l = 18,47$ м, черная – $l = 23$ м.

Видно, что время прихода волны прямо пропорционально, а амплитуда волны обратно пропорциональна расстоянию до центра области приложения нагрузки. Компоненты отклика перемещений в разных точках проявляют один и тот же характер изменения во времени.

Список литературы

1. Mansur W.J. A time-stepping technique to solve wave propagation problems using the boundary element method: PhD thesis, University of Southampton, 1983.
2. Cruse T.A., Rizzo F.J. A direct formulation and numerical solution of the general transient elastodynamic problem. I. // J. Math. Anal. Appl. 1968. 22(1). P. 244–259.
3. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. I // Numer. Math. 1988. № 52. P. 129–145.
4. Lubich C. Convolution quadrature and discretized operational calculus. II. // Numer. Math. 1988. № 52. P. 413–425.
5. Schanz M. Wave propagation in viscoelastic and poroelastic continua. Berlin: Springer, 2001. 170 p.
6. Баженов В.Г., Белов А.А., Игумнов Л.А. Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций. Н.Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. 180 с.
7. Игумнов Л.А., Литвинчук С.Ю., Петров А.Н. Моделирование поверхностных волн на

упругих, вязко- и пористо-упругих полупространствах // Современные проблемы механики и математики / Под общ. ред. Р.М. Кушнира, Б.И. Пташника. Львов: Институт прикладных проблем механики и математики им. Я.С. Подстригача НАН Украины, 2013. С. 34–36.

8. *Петров А.Н.* Моделирование динамики составных пороупругих тел на основе метода гранично-временных элементов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Н.Новгород, 2013. 135 с.

9. *Lubich C., Ostermann A.* Runge – Kutta methods for parabolic equations and convolution quadrature // *Math. Comput.* 1993. №60. P. 105–131.

10. *Calvo M.P., Cuesta E., Palencia C.* Runge – Kutta convolution quadrature methods for well-posed equations with memory // *Numer. Math.* 2007. №107. P. 589–614.

11. *Banjai L., Messner M., Schanz M.* Runge – Kutta convolution quadrature for the boundary element method // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2012. №245-246. P. 90–101.

12. Граничные интегральные уравнения для решения динамических задач трехмерной теории пороупругости / А.В. Аменицкий, А.А. Белов, Л.А. Игумнов, И.С. Карелин // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та. 2009. №71. С. 164–171.

13. *Баженов В.Г., Игумнов Л.А.* Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.

14. *Гольдштейн П.В.* К вопросу о применении метода граничных интегральных уравнений для решения задач механики сплошных сред // Метод граничных интегральных уравнений: Вычислительные аспекты и приложения в механике (Механика: новое в зарубежной науке): Сб. ст. М.: Мир, 1978. С. 183–209.

3D POROELASTODYNAMICS MODELING WITH THE HELP OF TIME-STEPPING BOUNDARY ELEMENT SCHEME

L.A. Igumnov, S.Yu. Litvinchuk, Ya.Yu. Rataushko

Time-step boundary element schemes for computer modeling of 3D poroelastodynamic boundary problem solutions is developed. To solve boundary value problems in Laplace domain boundary element method is used, as well as time-step method built on Runge – Kutta scheme nodes is used for numerical Laplace transform inversion. Time-step scheme with a varied integration step in quadrature coefficients calculation, taking into account the integrand symmetry, and basing on the highly oscillatory quadrature, is employed here. With the help of the developed approach a problem of poroelastic half-space, surface subjected to a normal pressure, is treated. Comparison of the solutions with the results obtained by means of traditional time-step scheme indicates computational cost decrease when Runge – Kutta methods are involved into time-stepping procedure of the boundary element scheme.

Keywords: boundary element method, Laplace transform, stepping scheme, Runge – Kutta methods, 3D poroelastodynamics, half-space.