

УДК 539.3

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ТЕЛ МЕТОДОМ ГРАНИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ\*

© 2014 г.

Л.А. Игумнов, И.П. Марков

*НИИ механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского*

igumnov@mech.unn.ru

*Поступила в редакцию 14.05.2014*

Для решения начально-краевых задач трехмерной линейной электроупругости применяется прямой вариант метода граничных интегральных уравнений в сочетании с интегральным преобразованием Лапласа по времени. Фундаментальные решения строятся на основе их интегрального представления. Приведен пример гранично-элементного решения нестационарной начально-краевой электроупругой задачи.

*Ключевые слова:* электроупругость, анизотропия, динамика, граничный элемент.

### Введение

Применение метода граничных элементов (МГЭ) для решения трехмерных динамических задач анизотропной упругости и электроупругости имеет существенную специфику, связанную с отсутствием явных выражений для фундаментальных решений. В статье С.А. Brebbia и D. Nardini [1] для решения нестационарных задач анизотропной теории упругости был предложен приближенный подход с двойным применением теоремы взаимности. Развитие этого подхода для динамической теории электроупругости осуществлено в работах [2, 3]. При построении динамических функций Грина для анизотропной упругой среды С.У. Wang и J.D. Achenbach [4] использовали интегральное преобразование Радона, которое позволяет выразить фундаментальные решения в виде интеграла по единичной сфере и полусфере. В дальнейшем С.У. Wang и Ch. Zhang [5] использовали преобразование Радона для построения фундаментальных решений линейной теории электроупругости. В настоящей статье представлена гранично-элементная методика, основанная на применении таких выражений динамической матрицы Грина в точных сингулярных граничных интегральных уравнениях (ГИУ). Возможности методики продемонстрированы на численном примере. Полученные результаты сопоставлены с результатами других авторов.

---

\* Выполнено при частичном финансировании в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки (проект № 2014/134 2226), РФФИ (гранты 12-08-00984, 13-08-00658, 14-08-31410) и Программой государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант НШ-593.2014.8).

## 1. Математическая модель

Рассматривается однородная электроупругая среда. При отсутствии объемных сил и при допущении, что электрическое поле является квазистатическим, уравнения движения сплошной электроупругой среды и закон Гаусса имеют следующий вид [3, 6, 7]:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij,j} &= \rho \ddot{u}_i, \\ D_{i,i} &= 0,\end{aligned}$$

где  $\sigma_{ij}$  – компоненты тензора напряжений,  $u_i$  – компоненты вектора перемещений,  $\rho$  – плотность материала,  $D_i$  – компоненты вектора электрической индукции.

Для линейного электроупругого материала связанность электрического и упругого полей описывается физическими соотношениями:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= C_{ijkl}^E \varepsilon_{kl} - e_{ijk} E_k, \\ D_i &= e_{kli} \varepsilon_{kl} + \tilde{\varepsilon}_{ik} E_k, \quad i, j, k, l = \overline{1, 3},\end{aligned}$$

где  $C_{ijkl}^E$  – тензор модулей упругости;  $\varepsilon_{ij}$  – компоненты линейного тензора деформации;  $E_k = -\phi_{,k}$  – компоненты вектора напряженности электрического поля,  $\phi$  – электрический потенциал;  $e_{ijk}$  и  $\tilde{\varepsilon}_{ik}$  – пьезоэлектрические коэффициенты и диэлектрические константы.

Используя линейный тензор деформации, получим связанные дифференциальные уравнения движения для линейной электроупругой среды:

$$\begin{aligned}C_{ijkl}^E u_{k,li} + e_{lij} \phi_{,li} &= \rho \ddot{u}_j, \\ e_{ikl} u_{k,li} - \tilde{\varepsilon}_{il} \phi_{,li} &= 0.\end{aligned}$$

Для объединения упругих и электрических переменных в обобщенные векторы и тензоры введем обобщенные векторы перемещений и усилий, а также обобщенный тензор модулей электроупругости:

$$\begin{aligned}U_k &= \begin{cases} u_k, & k = \overline{1, 3}, \\ \phi, & k = 4, \end{cases} \quad T_j = \begin{cases} t_j, & j = \overline{1, 3}, \\ q, & j = 4, \end{cases} \\ C_{ijkl} &= \begin{cases} C_{ijkl}^E, & i, j, k, l = \overline{1, 3}, \\ e_{lij}, & i, l, j = \overline{1, 3}, \quad k = 4, \\ e_{ikl}, & i, l, k = \overline{1, 3}, \quad j = 4, \\ -\tilde{\varepsilon}_{il}, & i, l = \overline{1, 3}, \quad k = j = 4, \end{cases}\end{aligned}$$

где  $q = D_i n_i$  – поверхностная плотность электрического заряда,  $n_i$  – компоненты единичного вектора нормали к площадке.

Использование введенных обозначений и применение интегрального преобразования Лапласа по времени позволяет записать начально-краевую задачу для электроупругого тела  $\Omega \subset R^3$  с границей  $\Gamma$  в виде:

$$\begin{aligned}C_{ijkl} \bar{U}_{k,il} &= \rho s^2 \delta_{jk}^* \bar{U}_k, \quad \Omega \subset R^3, \quad i, l = \overline{1, 3}, \quad j, k = \overline{1, 4}, \\ \bar{U}_k &= \tilde{U}_k \text{ на } \Gamma^U, \quad \bar{T}_k = \tilde{T}_k \text{ на } \Gamma^T,\end{aligned}$$

$$\delta_{jk}^* = \begin{cases} \delta_{jk}, & j = k = \overline{1, 3}, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases}$$

где  $\overline{U}_k$  и  $\overline{T}_k$  – компоненты векторов обобщенных перемещений и усилий в изображениях по Лапласу,  $s$  – параметр преобразования Лапласа,  $\delta_{jk}$  – дельта Кронекера.

В качестве метода решения поставленной начально-краевой задачи используется метод граничных интегральных уравнений в пространстве изображений по Лапласу. Интегральные представления амплитуд обобщенных перемещений на границе тела имеют вид [8]:

$$c_{jk} \overline{U}_k(\mathbf{y}, s) = \int_{\Gamma} g_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \overline{T}_k(\mathbf{x}, s) d\Gamma(\mathbf{x}) - \oint_{\Gamma} h_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) \overline{U}_k(\mathbf{x}, s) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad \mathbf{y} \in \Gamma, \mathbf{x} \in \Gamma,$$

$$c_{jk} = \delta_{jk} + \beta_{jk}(\mathbf{y}), \quad h_{mj}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = C_{ijkl} g_{mk,l} n_i, \quad (1)$$

где  $g_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)$  – матрица фундаментальных решений (матрица Грина),  $n_i$  – компоненты вектора единичной нормали к поверхности  $\Gamma$  в точке интегрирования  $\mathbf{x}$ , коэффициенты  $\beta_{jk}$  зависят от геометрии границы  $\Gamma$  в точке  $\mathbf{y}$ , интеграл по контуру используется в смысле главного значения по Коши.

## 2. Гранично-элементная схема

Граничные интегральные уравнения трехмерной линейной динамической электроупругости решаются методом граничных элементов. Гранично-элементная дискретизация основана на регуляризованных ГИУ и согласованной поэлементной аппроксимации [9]. Граница области аппроксимируется четырехугольными биквадратичными элементами, обобщенные перемещения – билинейными элементами, обобщенные поверхностные усилия – постоянными элементами. Дискретный аналог ГИУ получен с помощью применения метода коллокаций на узлах аппроксимации граничных функций. Ключевым вопросом в МГЭ является вычисление фундаментальных решений.

Динамические функции Грина в изображениях по Лапласу имеют вид [10, 11]:

$$g_{jk}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) = g_{jk}(\mathbf{r}, s) = g_{jk}^S(\mathbf{r}) + g_{jk}^R(\mathbf{r}, s),$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y},$$

где  $g_{jk}^S$  – статическая часть,  $g_{jk}^R$  – динамическая часть фундаментального решения.

Применение преобразования Радона позволяет получить интегральные представления фундаментальных решений. Для электроупругости динамическая часть имеет вид [5]:

$$g_{jp}^R(\mathbf{r}, s) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{\substack{|\mathbf{n}|=1 \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} > 0}} \sum_{m=1}^Q \frac{k_m \overline{P}_{jp}^m}{\rho c_m^2} e^{-k_m \mathbf{n} \cdot \mathbf{r}} dS(\mathbf{n}), \quad j, p = \overline{1, 4},$$

где

$$dS(\mathbf{n}) \in D^R = \{0 \leq b \leq 1; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$\bar{P}_{jp}^m = \begin{cases} P_{jp}^m, & j, p = \overline{1, 3}, \\ -\frac{\Gamma_{k4} P_{jk}^m}{\Gamma_{44}}, & j = \overline{1, 3}, p = 4, \\ \frac{\Gamma_{4k} P_{kl}^m \Gamma_{l4}}{\Gamma_{44}^2}, & j = p = 4, \end{cases}$$

$$P_{jp}^m = \frac{A_{jp}^m}{A_{ii}^m}, \quad A_{jp}^m = \text{adj}(L_{jp} - \rho c_m^2 \delta_{jp}), \quad L_{jp} = \Gamma_{jp} - \frac{\Gamma_{j4} \Gamma_{4p}}{\Gamma_{44}},$$

$$c_m = \sqrt{\frac{\lambda_m}{\rho}}, \quad k_m = \frac{s}{c_m}, \quad \mathbf{n} = \sqrt{1-b^2} \mathbf{d} + b \mathbf{e}, \quad \mathbf{e} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|},$$

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{d} = 0, \quad \mathbf{d} = \frac{(e_2 \cos \varphi + e_1 e_3 \sin \varphi, -e_1 \cos \varphi + e_2 e_3 \sin \varphi, -(1-e_3^2) \sin \varphi)}{\sqrt{1-e_3^2}},$$

где  $\lambda_m$  – собственные числа матрицы  $L_{jp}$ ;  $Q$  – количество различных собственных чисел;  $c_m, k_m$  – фазовые скорости и волновые числа;  $\mathbf{n}$  – единичный вектор направления распространения волны;  $D^R$  – область интегрирования динамической части решения, половина единичной сферы  $|\mathbf{n}| = 1, \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} > 0$  (рис. 1).

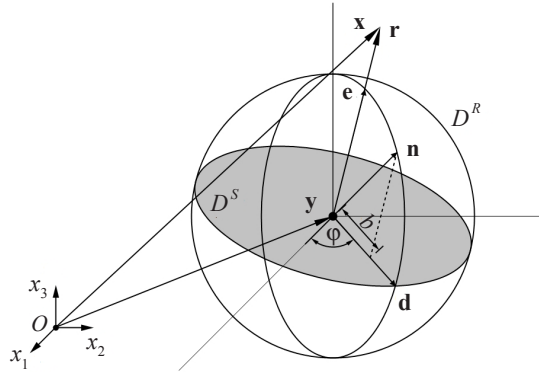


Рис. 1

Статическая часть матрицы фундаментальных решений имеет вид [3, 5, 12]:

$$g_{jk}^S(\mathbf{r}) = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\Omega} \Gamma_{jk}^{-1}(\mathbf{n}) \delta(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}) d\Omega(\mathbf{n}) = \frac{1}{8\pi^2 r} \int_{|\mathbf{d}|=1} \Gamma_{jk}^{-1}(\mathbf{d}) d\Omega(\mathbf{d}),$$

$$d\Omega(\mathbf{d}) \in D^S = \{0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

где  $D^S$  – область интегрирования статической части, единичная окружность  $|\mathbf{d}| = 1$  (см. рис. 1).

Матрица Неймана строится на основе выражения:

$$h_{mj}(\mathbf{r}, s) = C_{ijkl} g_{mk,l}(\mathbf{r}, s) n_l(\mathbf{r}).$$

Получаемые решения разрешающей системы линейных алгебраических урав-

нений параметризованы комплексным параметром интегрального преобразования Лапласа. Для получения оригинала решения применяется шаговая схема численного обращения интегрального преобразования Лапласа на узлах метода Эйлера с использованием комбинированной формулы, учитывающей специфику интегрирования сильно осциллирующих функций [13]:

$$\bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt,$$

$$f_0 = 0, \quad f(n\Delta t) = \sum_{k=1}^n \omega_k(\Delta t), \quad n = \overline{1, N},$$

$$\omega_n(\Delta t) = \frac{R^{-n}}{2\pi} \sum_{k=0}^{L-1} \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2} e^{-in(\varphi_k + \varphi_{k+1})/2} \times$$

$$\times [D_1(w)\bar{f}(s_k)s_k + D_2(w)\bar{f}(s_{k+1})s_{k+1}], \quad s_k = \frac{\gamma(z)}{\Delta t},$$

$$w = -n \frac{\varphi_{k+1} - \varphi_k}{2}, \quad D_{1,2}(w) = \begin{cases} \frac{\sin w}{w} \pm \frac{w \cos w - \sin w}{w^2} i & \text{при } |w| > w^*, \\ e^{\mp wi} & \text{при } |w| \leq w^*, \end{cases}$$

$$\gamma(z) = \frac{3}{2} - 2z + \frac{z^2}{2}, \quad z = Re^{i\varphi}, \quad \varphi_l = l \frac{2\pi}{L},$$

где  $R, L, \Delta t$  – параметры метода,  $w^*$  – ключ при интегрировании сильно осциллирующих функций.

### 3. Численные эксперименты

Конфигурация рассматриваемой электроупругой начально-краевой задачи [3] изображена на рис. 2.

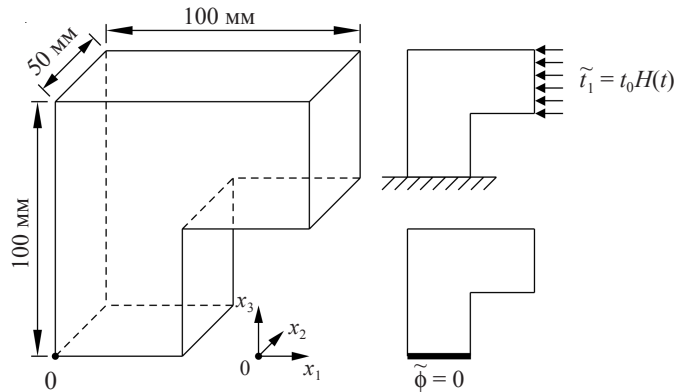


Рис. 2

На торце  $x_1 = 100$  мм заданы поверхностные усилия в виде функции Хевисайда по времени  $\tilde{t}_1(t) = t_0 H(t)$ ,  $t_0 = -1 \cdot 10^8$  Па. На жестко закрепленном торце  $x_3 = 0$  к телу приложен электрический потенциал  $\tilde{\phi}(t) = 0$ . Остальная поверхность тела является свободной от поверхностных усилий и поверхностной плотности заряда. В каче-

стве материала взят трансверсально-изотропный пьезокерамик PZT с плотностью  $\rho = 7800 \text{ кг/см}^3$  и следующими параметрами:

$$C = \begin{bmatrix} 107,6 & 63,1 & 61,9 & 0 & 0 & 0 \\ 63,1 & 107,6 & 61,9 & 0 & 0 & 0 \\ 61,9 & 61,9 & 100,4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 19,6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 19,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 22,2 \end{bmatrix} \text{ ГПа,}$$

$$e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 12,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12,0 & 0 & 0 \\ -9,6 & -9,6 & 15,1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ Кл/м}^2,$$

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 1,714 & 0 & 0 \\ 0 & 1,714 & 0 \\ 0 & 0 & 1,867 \end{bmatrix} \cdot 10^{-8} \text{ Кл/(В}\cdot\text{м)}.$$

Исследовался отклик перемещений  $u_1(t)$  и электрического потенциала  $\phi(t)$  в точке с координатами (0; 0; 100) мм. На рис. 3, 4 приведены полученные авторами гранично-элементные решения (ГЭ-решения) и ГЭ-решения из [3]. Необходимо отметить, что решения в [3] получены по приближенному методу с двойным применением теоремы взаимности.

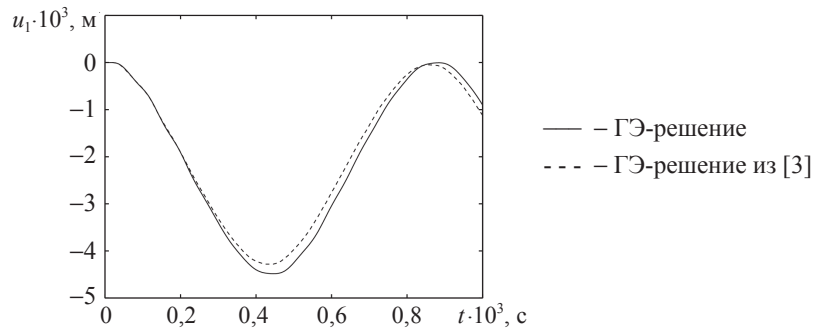


Рис. 3

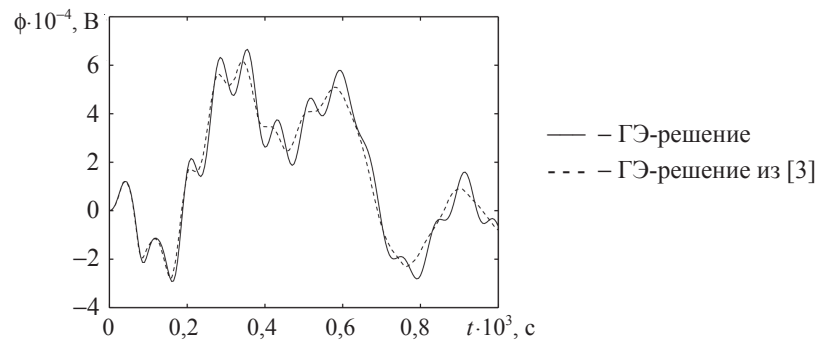


Рис. 4

## Заключение

Представлена гранично-элементная схема решения трехмерных нестационарных задач анизотропной линейной теории электроупругости. Применен прямой вариант метода граничных интегральных уравнений в сочетании с шаговым методом численного обращения интегрального преобразования Лапласа и фундаментальными решениями в форме Радона. Приведены результаты гранично-элементного моделирования начально-краевой электроупругой задачи. Работоспособность методики подтверждена сопоставлением полученных решений с результатами других авторов.

### Список литературы

1. Nardini D., Brebbia C.A. A new approach to free vibration analysis using boundary elements // *Boundary Element Methods in Engineering*. Berlin: Springer, 1982. P. 313–326.
2. Kogl M., Gaul L. A boundary element method for transient piezoelectric analysis // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2000. **24**(7-8). P. 591–598.
3. Gaul L., Kogl M., Wagner M. *Boundary element methods for engineers and scientists*. Berlin: Springer, 2003. 488 p.
4. Wang C.Y., Achenbach J.D. Elastodynamic fundamental solution for anisotropic solids // *Geophys. J. Int.* 1994. **118**. P. 384–392.
5. Wang C.Y., Zhang Ch. 3-D and 2-D dynamic Green's functions and time-domain BIEs for piezoelectric solids // *Eng. Anal. Bound. Elem.* 2005. **29**. P. 454–465.
6. Parton V.Z., Kudryavtsev B.A. *Electromagnetoelasticity*. Gordon and Breach Science Publishers, 1988.
7. Tiersten H.F. *Linear piezoelectric plate vibrations*. New York: Plenum Press, 1969.
8. Баженов В.Г., Игумнов Л.А. Методы граничных интегральных уравнений и граничных элементов в решении задач трехмерной динамической теории упругости с сопряженными полями. М.: Физматлит, 2008. 352 с.
9. Угодчиков А.Г., Хуторянский Н.М. Метод граничных элементов в механике деформируемого твердого тела. Казань: Изд-во КГУ, 1986. 296 с.
10. Norris A.N. Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermoelastic and poroelastic solids // *Proc. R. Soc. London. A.* 1994. **447**. P. 175–188.
11. Wang C.Y., Achenbach J.D. Three-dimensional time-harmonic elastodynamic Green's functions for anisotropic solids // *Proc. R. Soc. London. A.* 1995. **449**. P. 441–458.
12. Игумнов Л.А., Марков И.П. Гранично-элементное моделирование трехмерных краевых задач электроупругого равновесия // *Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. / Нижегород. ун-т.* 2013. Вып. 75(3). С. 185–191.
13. Баженов В.Г., Белов А.А., Игумнов Л.А. Гранично-элементное моделирование динамики кусочно-однородных сред и конструкций: Учеб. пособие. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2009. 180 с.

## MODELING THE DYNAMICS OF 3D HOMOGENEOUS PIEZOELECTRIC SOLIDS USING BOUNDARY ELEMENT METHOD

L.A. Igumnov, I.P. Markov

Initial boundary-value problems of linear piezoelectricity are analyzed using a direct approach of the boundary integral equations method in combination with Laplace transform. Evaluation of fundamental solutions is based on their integral representations. An example of BE-analysis of a transient initial boundary-value problem of piezoelectricity is given.

*Keywords:* piezoelectricity, anisotropy, dynamics, boundary element.