

УДК 539.4+539.37

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕДЕНИЯ
ДВУСВЯЗНОЙ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ
ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ С ВНУТРЕННЕЙ
КРИВОЛИНЕЙНОЙ ОПОРОЙ ПРИ ВЗРЫВНЫХ НАГРУЗКАХ***

© 2014 г.

Ю.В. Немировский, Т.П. Романова

*Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича
СО РАН, Новосибирск*

nemirov@itam.nsc.ru

Поступила в редакцию 22.04.2014

Получено общее решение задачи о предельном и динамическом деформировании идеальной жесткопластической пластины произвольной формы с произвольным свободным отверстием, опертой по криволинейному гладкому замкнутому контуру, расположенному внутри пластины. На пластину действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Показано, что существуют несколько механизмов деформирования в зависимости от форм контуров пластины и контура опирания. Получены аналитические формулы для вычисления предельной нагрузки и остаточных прогибов пластины. Определено оптимальное расположение опоры, при котором пластина имеет максимальную предельную нагрузку. Приведены численные примеры.

Ключевые слова: жесткопластическая двусвязная пластина, криволинейный контур, свободное отверстие, внутренняя криволинейная опора, взрывная нагрузка, предельная нагрузка, остаточный прогиб.

Введение

Исследование повреждаемости пластин, разнообразных по форме и способам закрепления, являющихся элементами многих технических конструкций, при воздействии нагрузок взрывного типа необходимо для анализа рисков и прогнозирования чрезвычайных ситуаций. До последнего времени изучение динамического деформирования ограничивалось простыми геометрическими формами типа кольцевых и правильных полигональных пластин. Подходы к построению схемы расчетов динамического деформирования разнообразных односвязных и двусвязных пластин с произвольными контурами рассмотрены в работах [1–5]. В статье [6] определено оптимальное расположение дополнительной круговой опоры для шарнирно опертой, защемленной и свободной на контуре круглой пластины под действием импульса, когда все точки пластины, за исключением опорных, движутся в начальный момент с одинаковой скоростью. В настоящей статье проанализировано пове-

* Выполнено при поддержке РФФИ (грант № 14-01-00102-а).

дение двусвязных пластин под действием равномерно распределенной динамической нагрузки взрывного типа; внешний и внутренний контуры пластин свободны, а криволинейный замкнутый опорный контур расположен внутри области пластины. Получены аналитические формулы для определения предельной нагрузки и остаточных прогибов пластины. Решения таких динамических задач для жесткопластических пластин в литературе не известны. В качестве примера рассмотрена пластина в форме эллипса со свободным отверстием в форме эллипса и с внутренним круглым опорным контуром, а также изучена кольцевая пластина, опертая по эллиптическому контуру.

1. Формулировка задачи и вывод определяющих уравнений

Рассмотрим двусвязную пластину из идеального жесткопластического материала, опертую по криволинейному гладкому выпуклому контуру L_1 , расположенному внутри пластины (рис. 1).

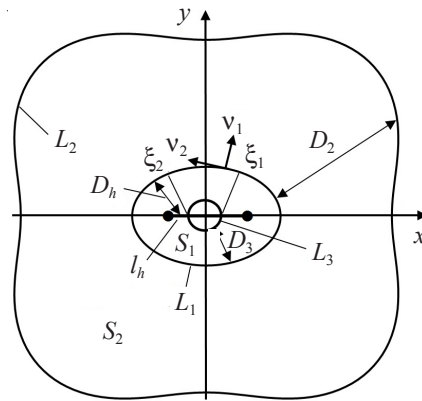


Рис. 1

Внешний произвольный контур пластины L_2 является свободным. В центральной части пластины расположено свободное отверстие с контуром L_3 . Считаем, что контур L_3 расположен полностью внутри опорного контура L_1 . На пластину действует равномерно распределенная по поверхности динамическая нагрузка взрывного типа высокой интенсивности $P(t)$, которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения $P_{\max} = P(0)$ в начальный момент времени $t = 0$ и затем быстрым ее уменьшением (t – текущее время).

Пусть уравнение опорного контура L_1 задано в параметрической форме $x = x_1(\varphi)$, $y = y_1(\varphi)$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Радиус кривизны контура L_1 равен $R_1(\varphi) = L^3(\varphi)/(x_1'y_1'' - x_1''y_1')$. Здесь $L(\varphi) = \sqrt{x_1'^2(\varphi) + y_1'^2(\varphi)}$, $(\bullet)' = d(\bullet)/d\varphi$. Введем криволинейную ортогональную систему координат (v_1, v_2) , связанную с декартовой системой координат (x, y) соотношениями

$$x = x_1(v_2) + v_1 y_1'(v_2)/L(v_2), \quad y = y_1(v_2) + v_1 x_1'(v_2)/L(v_2).$$

Кривые $v_1 = \text{const} \geq 0$ находятся на расстоянии v_1 от контура L_1 в сторону внешнего контура L_2 и имеют радиус кривизны $\rho_1 = R_1(v_2) + v_1$. Прямые линии $v_2 = \text{const}$ перпендикулярны контуру L_1 (радиус кривизны $\rho_2 = \infty$). В этом случае уравнение контура пластины L_1 имеет вид $v_1 = 0$, $0 \leq v_2 \leq 2\pi$. Уравнения свободных контуров

пластины L_2 и L_3 заданы и имеют вид: $v_1 = D_2(v_2)$, $0 \leq v_2 \leq 2\pi$; $v_1 = -D_3(v_2)$, $\xi_1 \leq v_2 \leq \xi_2$, $2\pi - \xi_2 \leq v_2 \leq 2\pi - \xi_1$, ξ_1 и ξ_2 – заданные параметры области определения контура L_3 (см. рис. 1). Элемент площади в координатах (v_1, v_2) равен $ds = L(v_2) \times (1 + v_1/R_1) dv_1 dv_2$.

Для определенности считаем, что пластина симметрична относительно оси Oy , а геометрические размеры контура L_1 по оси Ox не меньше, чем по оси Oy .

В динамике рассматриваемой пластины из жесткопластического материала возможны несколько схем деформирования в зависимости от величины P_{\max} и от соотношений размеров контуров L_i ($i = 1, 3$). Обозначим область пластины внутри контура L_1 через S_1 , а остальную часть пластины – через S_2 (см. рис. 1). Будем рассматривать поведение пластины при нагрузках, незначительно превышающих предельные (то есть при «средних» нагрузках по терминологии, принятой в [1–5]). В этом случае возможны несколько схем деформирования, для которых скорости прогибов пластины в сечении $v_2 = \xi_1$ представлены на рис. 2.

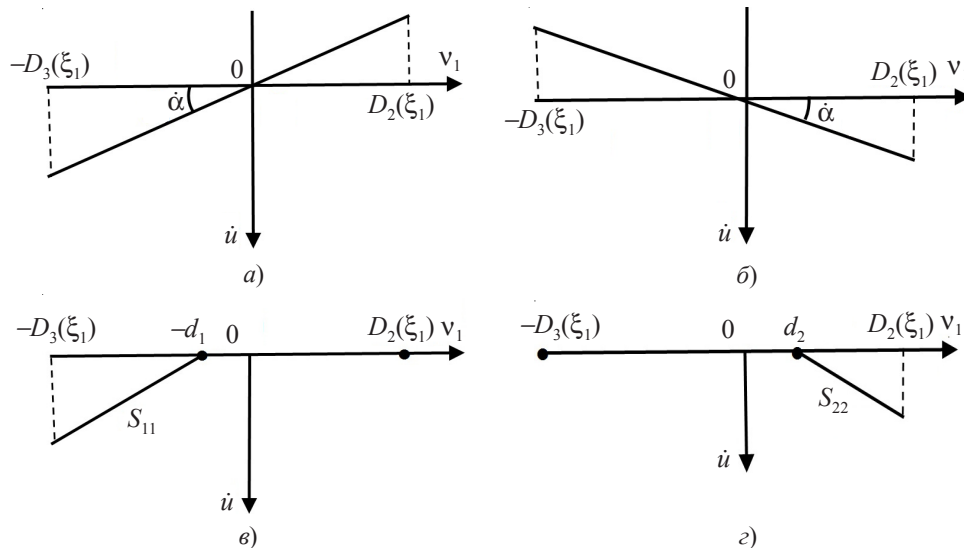


Рис. 2

При деформировании по схеме 1 (рис. 1, 2а), как и в случае опирания по внешнему контуру [4], во внутренней области пластины возможно образование пластической шарнирной линии l_h , которая может состоять из нескольких участков. На l_h нормальный изгибающий момент равен предельному значению M_0 . Вся пластина деформируется в линейчатую поверхность, вращающуюся вокруг опорного контура L_1 , при этом область S_1 движется вниз в направлении действия нагрузки, а область S_2 движется вверх. В схеме 2 на рис. 2б, наоборот, область S_1 движется вверх, а часть пластины – область S_2 – движется вниз. В схемах 3 и 4, показанных на рис. 2в и 2г, возможно образование дополнительных шарнирных линий l_1 и l_2 , расположенных на расстоянии d_1 и d_2 от опорного контура L_1 , при этом величины d_1 и d_2 не зависят от параметра v_2 . Тогда уравнения линий l_i имеют вид $v_1 = (-1)^i d_i$ ($i = 1, 2$). Обозначим область внутри контура l_1 через S_{11} (рис. 3), а область снаружи контура l_2 – через S_{22} .

Обе области S_{11} и S_{22} деформируются в линейчатую поверхность, движущуюся вниз. При этом области S_{11} и S_{22} движутся независимо друг от друга и возможны

варианты, когда одна из этих областей деформируется, а вторая остается жесткой. Шарнирная линия l_h (или часть ее) движется вниз в направлении действия нагрузки при схемах деформирования 1, 3 и вверх при схеме 2.

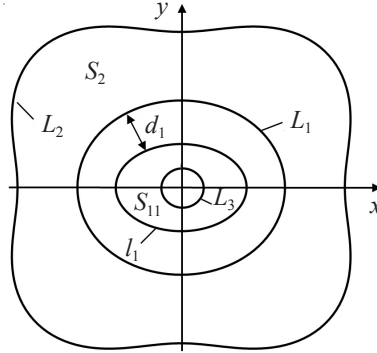


Рис. 3

В силу симметрии линия l_h находится на оси Ox . Пусть уравнение прямой l_h имеет вид: $x = x_h(v_2), y = 0$. Расстояние D_h по нормали к контуру L_1 от линии l_h до линии l_h равно (см. рис. 1):

$$D_h(v_2) = \sqrt{[x_1(v_2) - x_h(v_2)]^2 + y_1(v_2)^2}.$$

Из уравнения нормали, опущенной из точки $(x_h(v_2), 0)$ к контуру L_1 , следует:

$$-x'_1(v_2)[x_h(v_2) - x_1(v_2)] + y'_1(v_2)y_1(v_2) = 0.$$

Из двух последних равенств получаем

$$D_h(v_2) = L(v_2) |y_1(v_2) / x'_1(v_2)|. \quad (1)$$

Уравнение линии l_h в координатах (v_1, v_2) имеет вид: $v_1 = -D_h(v_2), 0 \leq v_2 \leq \pi$. Если $D_3(v_2) = D_h(v_2)$, то отверстие в пластине отсутствует.

Рассмотрим подробно схемы 1 и 2 (рис. 2а, б). Считаем, как и в случае криволинейных пластин, рассмотренных в [1, 4], что на опорном контуре угол поворота плоскости пластины в направлении действия нагрузки не зависит от параметра v_2 . Обозначим его через α . Скорость изменения этого угла $\dot{\alpha}$ также не зависит от v_2 ($(\bullet) = \partial(\bullet)/\partial t$). Уравнение движения пластины выведем из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера [7]:

$$K = A - N, \quad (2)$$

$$K = \iint_S \rho \ddot{u} u^* ds, \quad A = \iint_S P(t) \dot{u}^* ds, \quad (3)$$

$$N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\dot{\theta}^*]_m dl_m + M_0 \iint_S (|\kappa_1^*| + |\kappa_2^*|) ds. \quad (4)$$

Здесь K, A, N – мощности инерционных, внешних и внутренних сил; S – площадь пластины; ρ – поверхностная плотность материала пластины; u – прогиб; ds – элемент площади; l_m – линии разрыва угловых скоростей; M_m – изгибающий момент на l_m ; $[\dot{\theta}]_m$ – разрыв угловой скорости на l_m ; dl_m – элемент линии l_m ; κ_1^* и κ_2^* – главные кривизны поверхности допустимых скоростей прогибов пластины. Верхним индексом «*» обозначены кинематически допустимые величины.

Скорости прогибов пластины для схем 1, 2 представим в виде:

$$\dot{u}(v_1, v_2, t) = (-1)^i \dot{\alpha}(t) v_1 \quad (i = 1, 2), \quad (5)$$

где $i = 1$ для схемы 1 и $i = 2$ для схемы 2. Главные кривизны поверхности скоростей прогибов пластины:

$$\kappa_1 = -\frac{\partial^2 \dot{u}}{\partial v_1^2} = 0, \quad \kappa_2 = -\frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \dot{u}}{\partial v_1} = (-1)^{i+1} \frac{\dot{\alpha}(t)}{R_1 + v_1}. \quad (6)$$

Выражения (3) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} K &= \rho \ddot{\alpha} \iint_S v_1^2 ds = \rho \ddot{\alpha} \left\{ \int_0^{\xi_1} \int_{-D_h}^{D_2} v_1^2 L(v_2) \left[1 + \frac{v_1}{R_1(v_2)} \right] dv_1 dv_2 + \right. \\ &+ \left. \int_{\xi_2-D_3}^{\xi_1} \int_{-D_3}^{D_2} v_1^2 L(v_2) \left[1 + \frac{v_1}{R_1(v_2)} \right] dv_1 dv_2 + \int_{\xi_2-D_h}^{2\pi} \int_{-D_h}^{D_2} v_1^2 L(v_2) \left[1 + \frac{v_1}{R_1(v_2)} \right] dv_1 dv_2 \right\} = \\ &= \ddot{\alpha} \frac{\rho \ddot{\alpha}}{6} [\Sigma_1(0, \xi_1, D_h) + \Sigma_1(\xi_1, \xi_2, D_3) + \Sigma_1(\xi_2, \pi, D_h)], \quad (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= P(t) \dot{\alpha}^*(t) (-1)^i \iint_S v_1 ds = \\ &= 2P(t) \dot{\alpha}^*(t) (-1)^i \left\{ \int_0^{\xi_1} \int_{-D_h}^{D_2} v_1 L(v_2) \left[1 + \frac{v_1}{R_1(v_2)} \right] dv_1 dv_2 + \right. \\ &+ \left. \int_{\xi_1-D_3}^{\xi_2} \int_{-D_3}^{D_2} v_1 L(v_2) \left(1 + \frac{v_1}{R_1} \right) dv_1 dv_2 + \int_{\xi_2-D_h}^{\pi} \int_{-D_h}^{D_2} v_1 L(v_2) \left(1 + \frac{v_1}{R_1} \right) dv_1 dv_2 \right\} = \\ &= \dot{\alpha}^*(t) (-1)^{i+1} \frac{P(t)}{3} \Sigma, \quad (8) \end{aligned}$$

где $D_h(v_2)$ определено в (1) и введены следующие обозначения:

$$\Sigma_1(\mu_1, \mu_2, D) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} L \frac{D_2 + D}{R_1} [4R_1(D_2^2 - D_2 D + D^2) - 3(D - D_2)(D_2^2 + D^2)] dv_2,$$

$$\Sigma = \Sigma_2(0, \xi_1, D_h) + \Sigma_2(\xi_1, \xi_2, D_3) + \Sigma_2(\xi_2, \pi, D_h),$$

$$\Sigma_2(\mu_1, \mu_2, D) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} L \frac{D_2 + D}{R_1} [3R_1(D - D_2) - 2(D_2^2 - D_2 D + D^2)] dv_2,$$

аргумент μ_1 принимает значения 0, ξ_1 или ξ_2 ; $\mu_2 - \xi_1, \xi_2$ или π ; $D = D_h(v_2)$ или $D = D_3(v_2)$.

Учитывая, что на свободных контурах L_2 и L_3 нормальный изгибающий момент M_{nn} равен нулю, на участках линии l_h он равен M_0 и на опоре L_1 разрыв угловой скорости равен нулю, действуя, как в [1, 4, 5], для мощности внутренних сил (3) получаем выражение

$$N = \dot{\alpha}^* M_0 \left\{ \int_0^{2\pi} L(v_2) \left[1 + \frac{D_2(v_2)}{R_1(v_2)} \right] dv_2 - 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} L(v_2) \left[1 - \frac{D_3(v_2)}{R_1(v_2)} \right] dv_2 \right\}. \quad (9)$$

Подставляя полученные значения (7)–(9) в (2), получаем уравнение движения для схем деформирования 1 и 2:

$$\rho \ddot{\alpha}(t) [\Sigma_1(0, \xi_1, D_h) + \Sigma_1(\xi_1, \xi_2, D_3) + \Sigma_1(\xi_2, \pi, D_h)] = 2(-1)^{i+1} P(t) \Sigma - 6M_0 \left[\int_0^{2\pi} L(v_2) \left(1 + \frac{D_2}{R_1} \right) dv_2 - 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} L(v_2) \left(1 - \frac{D_3}{R_1} \right) dv_2 \right]. \quad (10)$$

Начальные условия имеют вид

$$\dot{\alpha}(0) = \alpha(0) = 0. \quad (11)$$

2. Определение предельной нагрузки и схемы деформирования

Предельную нагрузку определим из (10) с учетом $\ddot{\alpha} = 0$. Тогда имеем

$$P_{0i} = 3(-1)^{i+1} M_0 \frac{\int_0^{2\pi} L(v_2) (1 + D_2/R_1) dv_2 - 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} L(v_2) (1 - D_3/R_1) dv_2}{\Sigma} \quad (i=1, 2). \quad (12)$$

В выражении (12) в числителе всегда выполняется неравенство

$$\int_0^{2\pi} L(v_2) \left(1 + \frac{D_2}{R_1} \right) dv_2 - 2 \int_{\xi_1}^{\xi_2} L(v_2) \left(1 - \frac{D_3}{R_1} \right) dv_2 > 0,$$

следовательно, если $\Sigma > 0$, то реализуется схема 1, если $\Sigma < 0$ – схема 2.

В случае схем 3, 4 области S_{11} и S_{22} деформируются независимо. Динамическое поведение области S_{11} как защемленной криволинейной пластины с отверстием рассмотрено подробно в [4, 5], а области S_{22} как криволинейной пластины, защемленной по произвольному внутреннему контуру, – в работах [3, 5]. При движении по схеме 3, поскольку деформируется только внутренняя от опоры часть S_{11} , поведение пластины и предельная нагрузка не зависят от формы внешнего контура пластины L_2 и от функции $D_2(v_2)$. Предельная нагрузка $P_{0*}(d_1)$ для области S_{11} запишется в виде:

$$P_{0*}(d_1) = 6M_0 \frac{\int_0^{2\pi} L(1 - d_1/R_1) dv_2 - \int_{\xi_1}^{\xi_2} L(1 - D_3/R_1) dv_2}{\Sigma_3(0, \xi_1, D_h) + \Sigma_3(\xi_1, \xi_2, D_3) + \Sigma_3(\xi_2, \pi, D_h)},$$

$$\Sigma_3(\mu_1, \mu_2, D) = \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{L}{R_1} (D - d_1)^2 (3R_1 - 2D - d_1) dv_2.$$

Для разных защемленных по контуру пластин со свободным отверстием в [5] получено, что при фиксированном контуре и увеличении свободного отверстия предельная нагрузка пластины сначала немного снижается, а затем увеличивается. Следовательно, при деформировании по схеме 3 предельная нагрузка P_{03} может быть минимальной при некотором значении $d_1 = d_{10}$, отличном от нуля, поэтому

$$P_{03} = \min_{0 \leq d_1 < \min D_3} P_{0*}(d_1) = P_{0*}(d_{10}). \quad (13)$$

При движении по схеме 4, поскольку деформируется только внешняя от опоры часть пластины S_{22} , поведение пластины и предельная нагрузка не зависят от наличия отверстия и функции $D_3(v_2)$. Предельная нагрузка P_{04} для области S_{22} такова:

$$\begin{aligned}
P_{04} &= \min_{0 \leq d_2 < \min D_2} \frac{6M_0 \int_0^{2\pi} L(1 + D_2/R_1) dv_2}{\int_0^{2\pi} (L/R_1)(D_2 - d_2)[3R_1(D_2 + d_2) + 2(D_2^2 + D_2d_2 + d_2^2)] dv_2} = \\
&= 6M_0 \frac{\int_0^{2\pi} L(1 + D_2/R_1) dv_2}{\int_0^{2\pi} (L/R_1)D_2^2(3R_1 + 2D_2) dv_2}. \quad (14)
\end{aligned}$$

Таким образом, если пластина деформируется по схеме 4 и в ней образуется шарнирная линия l_2 , то она расположена на опорной линии L_1 и $d_2 = 0$, а область S_{22} совпадает с областью S_2 .

Предельная нагрузка для пластины определится как $P_0 = \min(P_{01}, P_{02}, P_{03}, P_{04})$. Номер i , соответствующий минимальному значению величин P_{0i} , равен номеру схемы деформирования пластины ($i = 1, 4$).

3. Интегрирование уравнений движения

Для «средних» нагрузок при $P_{\max} > P_0$ движение пластины по схемам 1, 2 определяется уравнением (10), которое запишем в виде (i – номер схемы):

$$\begin{aligned}
\ddot{\alpha}(t) &= G_i [P(t) - P_0], \\
G_i &= \frac{2(-1)^{i+1} \Sigma}{\rho[\Sigma_1(0, \xi_1, D_h) + \Sigma_1(\xi_1, \xi_2, D_3) + \Sigma_1(\xi_2, \pi, D_h)]} \quad (i = 1, 2). \quad (15)
\end{aligned}$$

При движении по схемам 3, 4 поведение пластины рассмотрено в [3–5], оно описывается также уравнением (15), но при следующих значениях G_i ($i = 3, 4$):

$$\begin{aligned}
G_3 &= 2 \frac{\Sigma_3(0, \xi_1, D_h) + \Sigma_3(\xi_1, \xi_2, D_3) + \Sigma_3(\xi_2, \pi, D_h)}{\Sigma_4(0, \xi_1, D_h) + \Sigma_4(\xi_1, \xi_2, D_3) + \Sigma_4(\xi_2, \pi, D_h)} \Big|_{d_1=d_{10}}, \\
\Sigma_4(\mu_1, \mu_2, D) &= \int_{\mu_1}^{\mu_2} \frac{L}{R_1} (D - d_1)^3 (4R_1 - 3D - d_1) dv_2, \\
G_4 &= \frac{2 \int_0^{2\pi} (L/R_1) D_2^2 (3R_1 + 2D_2) dv_2}{\int_0^{2\pi} (L/R_1) D_2^3 (4R_1 + 3D_2) dv_2}.
\end{aligned}$$

Начальные условия имеют вид (11). В момент времени $t = T$ нагрузка снимается, и пластина движется далее по инерции.

При $0 \leq t \leq T$, интегрируя уравнение (15), получаем

$$\dot{\alpha}(t) = G_i \left[\int_0^t P(\tau) d\tau - P_0 t \right], \quad \alpha(t) = G_i \left[\int_0^t \int_0^m P(\tau) d\tau dm - P_0 \frac{t^2}{2} \right].$$

При $T < t < t_f$ движение пластины происходит по инерции до остановки в момент t_f и описывается уравнением

$$\ddot{\alpha}(t) = -G_i P_0$$

с начальными условиями $\dot{\alpha}(T)$, $\alpha(T)$. Момент t_f определяется из условия

$$\dot{\alpha}(t_f) = 0. \quad (16)$$

Интегрируя уравнение движения, получаем

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}(t) &= \dot{\alpha}(T) - G_i P_0(t - T), \\ \alpha(t) &= \alpha(T) + \dot{\alpha}(T)(t - T) - G_i P_0 \frac{(t - T)^2}{2}.\end{aligned}\quad (17)$$

Из уравнений (16), (17) следует

$$t_f = \frac{\int_0^T P(t) dt}{P_0}, \quad \alpha(t_f) = G_i \left[\frac{\left(\int_0^T P(t) dt \right)^2}{2P_0} - \int_0^T tP(t) dt \right].$$

Прогибы пластины определяются из равенств (5) для схем 1, 2 и $\dot{u}(v_1, v_2, t) = -\dot{\alpha}(t)(v_1 - d_{10})$ для схемы 3, $\dot{u}(v_1, v_2, t) = \dot{\alpha}(t)v_1$ для схемы 4.

Максимальный остаточный прогиб пластины

$$w_{\max} = G_i \left[\frac{\left(\int_0^T P(t) dt \right)^2}{2P_0} - \int_0^T tP(t) dt \right] z_i \quad (i = \overline{1, 4}),$$

где $z_1 = \max_{v_2} D_3(v_2)$, $z_2 = z_4 = \max_{v_2} D_2(v_2)$, $z_3 = \max_{v_2} D_3(v_2) - d_{10}$ (i – номер схемы).

4. Численные примеры

В качестве примера рассмотрим эллиптическую пластину, опертую внутри своего контура на круглую опору радиуса a_1 и имеющую свободное отверстие в форме эллипса (рис. 4).

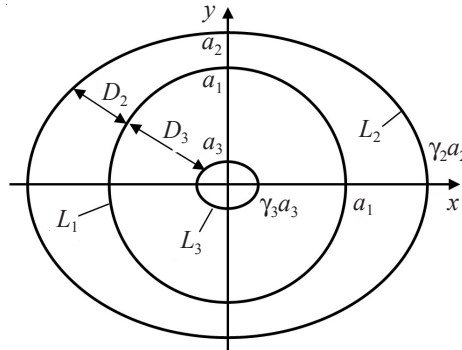


Рис. 4

Для такой пластины уравнения контуров L_i ($i = \overline{1, 3}$) в декартовой системе координат имеют вид ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

$$L_1 : x = a_1 \cos \varphi, \quad y = a_1 \sin \varphi; \quad L_2 : x = \gamma_2 a_2 \cos \varphi, \quad y = a_2 \sin \varphi; \quad a_3 \leq a_1 \leq a_2;$$

$$L_3 : x = \gamma_3 a_3 \cos \varphi, \quad y = a_3 \sin \varphi; \quad \xi_1 = 0, \quad \xi_2 = \pi, \quad \gamma_j \geq 1 \quad (j = 2, 3), \quad \gamma_3 a_3 < a_1.$$

Тогда получаем:

$$v_1 = \sqrt{x^2 + y^2} - a_1, \quad v_2 = \varphi,$$

$$L = D_h = R_1 = a_1, \quad D_j = \sqrt{(\gamma_j a_j - a_1)^2 \cos^2 \varphi + (a_j - a_1)^2 \sin^2 \varphi} \quad (j = 2, 3),$$

$$\Sigma_2(0, \pi, D_3) = \int_0^\pi (D_2 + D_3)[3a_1(D_3 - D_2) - 2(D_2^2 - D_2D_3 + D_3^2)]d\varphi,$$

$$P_{0i} = \frac{6(-1)^{i+1} M_0 \int_0^\pi (D_2 + D_3)d\varphi}{\int_0^\pi (D_2 + D_3)[3a_1(D_3 - D_2) - 2(D_2^2 - D_2D_3 + D_3^2)]d\varphi} \quad (i = 1, 2),$$

$$P_{03} = 6M_0 \min_{0 \leq d_1 \leq a_1 - a_3} \frac{\int_0^\pi (a_1 + D_3 - d_1)d\varphi}{\int_0^\pi (D_3 - d_1)^2 (3a_1 - 2D_3 - d_1)d\varphi},$$

$$P_{04} = 6M_0 \frac{\pi a_1 + \int_0^\pi D_2 d\varphi}{\int_0^\pi D_2^2 (3a_1 + 2D_2)d\varphi}.$$

На рис. 5 приведены безразмерные значения предельных нагрузок P_{0j} ($j = \overline{1, 4}$) в зависимости от отношения a_1/a_2 (то есть в зависимости от расположения опорного контура) при параметрах $\gamma_2 = \gamma_3 = 1,3$, $a_3 = 0,1a_2$.

Кривая 1 изображает нагрузку P_{01} , кривая 2 – P_{02} , кривая 3 – P_{03} , кривая 4 – P_{04} . Предельная нагрузка P_0 определяется как нижняя огибающая кривых P_{0j} . На интервале $0,13 \leq a_1/a_2 \leq 0,54$ реализуется схема предельного деформирования 2; при $0,54 \leq a_1/a_2 \leq 0,83$ – схема 4; при $0,83 \leq a_1/a_2 \leq 0,92$ – схема 3, при $0,92 \leq a_1/a_2 \leq 1$ – схема 1. Рассматриваемая пластина имеет максимальную предельную нагрузку и, следовательно, наименьшую повреждаемость при расположении опоры на окружности радиусом $a_1 = 0,83a_2$.

На рис. 6 продемонстрировано влияние наличия отверстия на значение предельной нагрузки для кольцевой пластины, опертой на круговую внутреннюю опору ($\gamma_2 = \gamma_3 = 1$). Здесь линия $b_1b_2b_3b_4$ изображает безразмерную предельную нагрузку для круглой пластины без отверстия ($a_3 = 0$) в зависимости от расположения опорной окружности, а линия $c_1c_2c_3c_4c_5$ – предельную нагрузку в случае отверстия радиусом $a_3 = 0,2a_2$.

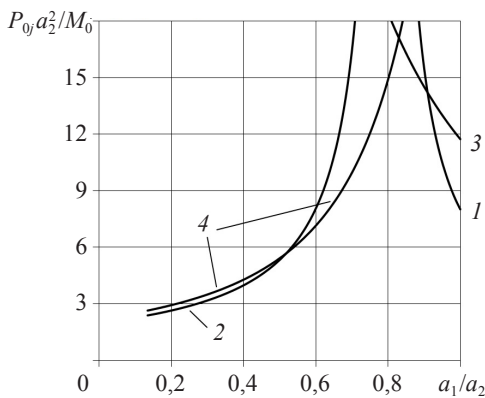


Рис. 5

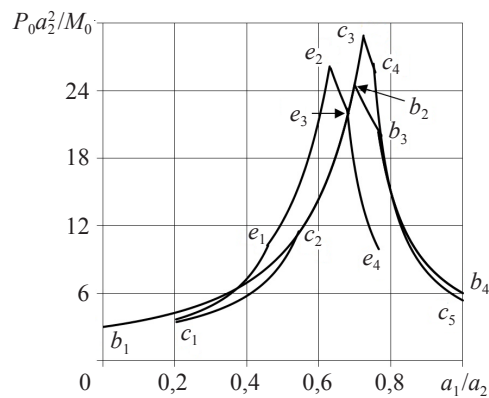


Рис. 6

В предельном поведении пластины с отверстием в зависимости от расположения опоры реализуются все четыре схемы деформирования: на интервале c_1c_2 – схема 2, на интервале c_2c_3 – схема 4, на интервале c_3c_4 – схема 3, на интервале c_4c_5

– схема 1. В пластине без отверстия схема 2 вообще не реализуется, на интервале b_1b_2 пластина деформируется по схеме 4, на интервале b_2b_3 – по схеме 3, на интервале b_3b_4 – по схеме 1. Если пластина шарнирно опerta по внешнему контуру ($a_1 = a_2$), то в случае отсутствия отверстия предельная нагрузка будет меньше предельной нагрузки для пластины с отверстием. Пластина без отверстия имеет наибольшую предельную нагрузку при расположении опоры на окружности радиусом $a_1 = 0,7a_2$ (в точке b_2), при этом $P_0 = 24,08M_0/a_2^2$. Такое расположение опоры совпадает с оптимальным, полученным в [6] для круглой пластины на основе точного решения с использованием условия пластичности Йогансена. Пластина с отверстием имеет наименьшую повреждаемость при расположении опоры на окружности радиусом $a_1 = 0,73a_2$ (в точке c_3), в этом случае $P_0 = 28,5M_0/a_2^2$. Таким образом, изменяя расположение опорной окружности внутри контура пластины, можно найти такое положение опоры, при котором пластина с отверстием будет более прочной, чем пластина без отверстия.

В качестве другого примера рассмотрим кольцевую пластину, опертую по внутреннему контуру в форме эллипса (рис. 7).

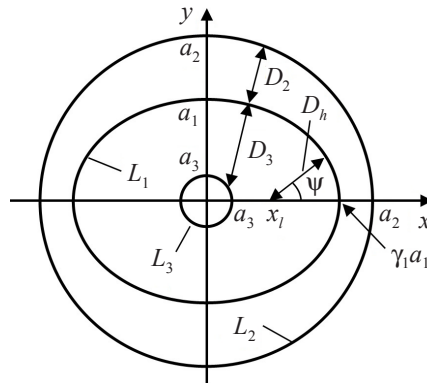


Рис. 7

Центры пластины и опорного эллипса совпадают. Для этой пластины уравнения контуров L_i ($i = 1, 3$) в декартовой системе координат имеют вид ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$):

$$L_1: x = \gamma_1 a_1 \cos \varphi, y = a_1 \sin \varphi \quad (\gamma_1 \geq 1); \quad L_2: x = a_2 \cos \varphi, y = a_2 \sin \varphi;$$

$$L_3: x = a_3 \cos \varphi, y = a_3 \sin \varphi \quad (a_3 \leq a_1 \leq a_2, a_3 < \gamma_1 a_1 < a_2).$$

Координаты (x, y) , (v_1, v_2) связаны соотношениями:

$$x = a_1 \left[\gamma_1 + \frac{v_1}{L(v_2)} \right] \cos v_2, \quad y = a_1 \left[1 + \frac{v_1 \gamma_1}{L(v_2)} \right] \sin v_2;$$

$$L(v_2) = a_1 \sqrt{\gamma_1^2 \sin^2 v_2 + \cos^2 v_2}.$$

Тогда

$$D_h(v_2) = a_1 \sqrt{\sin^2 v_2 + \frac{\cos^2 v_2}{\gamma_1^2}}, \quad R_1(v_2) = a_1 \frac{\left(\sqrt{\gamma_1^2 \sin^2 v_2 + \cos^2 v_2} \right)^3}{\gamma_1},$$

$$D_2(v_2) = x_l(v_2) \cos(\pi - \psi) + \sqrt{a_2^2 - x_l^2(v_2) \sin^2(\pi - \psi)} - D_h(v_2),$$

$$D_3(v_2) = D_h(v_2) - \left[x_l(v_2) \cos(\pi - \psi) + \sqrt{a_3^2 - x_l^2(v_2) \sin^2(\pi - \psi)} \right]. \quad (18)$$

Здесь ψ – угол между нормалью к контуру L_1 и положительным направлением оси Ox : $\psi(v_2) = \arctg(\gamma_1 \operatorname{tg} v_2)$; $x_l(v_2)$ – точка пересечения нормали к контуру L_1 и оси Ox : $x_l(v_2) = a_1[(\gamma_1^2 - 1) \cos v_2] / \gamma_1$ (см. рис. 7). Обозначим $x_* = x_l(0) = a_1(\gamma_1^2 - 1) / \gamma_1$. При $\gamma_1 = 1$ будет $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \pi$. При $\gamma_1 > 1$, если $a_3 \geq x_*$, то $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = \pi$. Если $a_3 < x_*$, то значения ξ_1 , ξ_2 определяются из уравнения $D_h(\xi_i) = D_3(\xi_i)$ ($i = 1, 2$), которое с учетом выражения (18) принимает вид

$$\cos \xi_i = \frac{\gamma_1 a_3}{a_1(\gamma_1^2 - 1)} \quad (i = 1, 2).$$

Нагрузки P_{0i} ($i = \overline{1, 4}$) вычисляются по формулам (12)–(14). Безразмерная предельная нагрузка для кольцевой пластины с внутренней опорой в форме эллипса приведена на рис. 6 (линия $c_1 e_1 e_2 e_3 e_4$). Считалось, что внешний и внутренний радиусы пластины равны a_2 и $0,2a_2$, полуоси опорного эллипса равны $1,3a_1$ и a_1 . В зависимости от расположения опоры реализуются все четыре рассматриваемые выше схемы деформирования: на интервале $c_1 e_1$ – схема 2, на интервале $e_1 e_2$ – схема 4, на интервале $e_2 e_3$ – схема 3, на интервале $e_3 e_4$ – схема 1. Пластина имеет наибольшую предельную нагрузку при опоре, имеющей параметр $a_1 = 0,65a_2$ (в точке e_2), при этом $P_0 = 25,7M_0 / a_2^2$.

Заключение

Получено общее решение задачи о предельном поведении и динамическом изгибе идеальной жесткопластической пластины произвольной формы с произвольным свободным отверстием, опертой по криволинейному гладкому замкнутому контуру, расположенному внутри пластины. Пластина находится под действием равномерно распределенной по поверхности кратковременной динамической нагрузки высокой интенсивности взрывного типа. Рассмотрены четыре схемы, по которым пластина может деформироваться в зависимости от геометрических параметров внешнего и внутреннего контуров пластины и контура опирания. Уравнения движения пластины выведены из принципа виртуальной мощности с использованием принципа Даламбера. Определены условия реализации каждой из схем деформирования. Получены аналитические формулы для вычисления предельной нагрузки и остаточных прогибов пластины. В качестве примеров рассмотрены двусвязная эллиптическая пластина, опертая внутри своего контура на круглую опору, и кольцевая пластина, опертая по внутреннему контуру в форме эллипса. Построены графики зависимости предельной нагрузки от расположения опоры. Для рассматриваемых пластин определено оптимальное расположение опоры. Оптимальной считается опора, при которой пластина имеет наибольшую предельную нагрузку. Показано, что в случае отсутствия отверстия в пластине реализуются только три схемы из четырех рассмотренных и что, изменяя расположение опоры внутри контура пластины, можно найти такое положение опоры, при котором пластина с отверстием будет более прочной, чем пластина без отверстия.

Список литературы

1. Romanova T.P., Nemirovsky Yu.V. Dynamic rigid-plastic deformation of arbitrarily shaped plates // *J. Mechanics of Materials and Structures*. 2008. V. 3, No 2. P. 313–334.
2. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Моделирование динамического деформирования жесткопластических двусвязных пластин с произвольными закрепленными криволинейными контурами на вязкоупругом основании // *Прикладная механика и техническая физика*. 2011. Т. 52, №2. С. 156–172.
3. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Моделирование динамического поведения двусвязной жесткопластической криволинейной пластины, закрепленной по внутреннему контуру // *Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всерос. конф. с международ. участием. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций (г. Самара, 29–30 мая 2008 г.)*. Самара: СамГТУ, 2008. С. 197–207.
4. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Моделирование динамического поведения жесткопластической криволинейной пластины с произвольным свободным отверстием // *Теоретическая и прикладная механика: Международ. науч.-техн. сб.* Минск: БНТУ, 2007. №23. С. 26–34.
5. Немировский Ю.В., Романова Т.П. Динамическое сопротивление плоских пластических преград. Новосибирск: Изд-во «ГЕО», 2009. 311 с.
6. Оленев Г.М. Оптимальное расположение дополнительных опор к жесткопластическим круглым пластинкам в случае импульсного нагружения // *Уч. зап. Тартуского гос. ун-та*. 1983. Вып. 659. С. 30–41.
7. Ерхов М.И. Теория идеально пластических тел и конструкций. М.: Наука, 1978. 352 с.

MODELING OF BEHAVIOR OF DOUBLY CONNECTED RIGID-PLASTIC PLATE OF ARBITRARY FORM WITH THE INTERNAL CURVILINEAR SUPPORT UNDER EXPLOSIVE LOADS

Yu.V. Nemirovsky, T.P. Romanova

The general solution of the problem of limit and dynamic deformation is obtained for the ideal rigid-plastic plate of arbitrary form with an arbitrary free hole, supported on curved smooth closed contour located on the plate. The plate is subjected to short-term dynamic load of explosive type with high intensity, uniformly distributed over the surface. It is shown that there are several mechanisms of deformation, depending on the forms of the contours of plate and on the contour of the support. The analytical formulas are obtained for calculation of the limit load and the final deflections of plates. Optimal location of the support, at which the plate has a maximum limit load, is defined. Numerical examples are given.

Keywords: rigid-plastic doubly connected plate, curvilinear contour, free hole, internal curvilinear support, explosive load, limit load, final deflection.