

УДК 534.12

ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИЙ СЛАБОГО РАЗРЫВА

© 2014 г.

С.В. Бакушев

Пензенский госуниверситет архитектуры и строительства

tim-graf_penza@rambler.ru

Поступила в редакцию 10.02.2014

Рассматривается задача построения дифференциальных уравнений характеристик и соотношений на них, а также определения скоростей распространения продольно-поперечных волн деформаций в сплошной среде, механическое поведение которой описывается произвольными перекрестными зависимостями между первыми инвариантами тензоров и вторыми инвариантами девиаторов напряжений и деформаций. Исследуются условия возникновения чисто продольных и чисто поперечных волн. В качестве примера построены векторные диаграммы продольно-поперечных волн деформаций для трех математических моделей сплошной среды.

Ключевые слова: волны деформаций, плоская задача, физическая нелинейность.

Продольно-поперечные волны деформаций возникают в сплошной среде, заполняющей полупространство $x > 0$, если к его поверхности приложены нормальные $p(t)$ и касательные $q(t)$ нагрузки, монотонно возрастающие во времени (рис. 1).

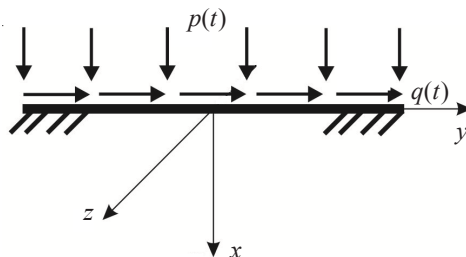


Рис. 1

Обзор некоторых решений данной задачи изложен в монографии [1] и работах [2–6]. При этом отмечено, что рассматривались тела, механическое поведение которых описывается уравнениями теории пластического течения, уравнениями динамики грунтов С.С. Григоряна и уравнениями билинейной теории пластичности.

В настоящей статье рассматриваются сплошные среды, механическое поведение которых описывается произвольными перекрестными зависимостями между первыми инвариантами тензоров σ и ϵ и вторыми инвариантами девиаторов T и Γ напряжений и деформаций:

$$\sigma = 3K(\varepsilon, \Gamma)\varepsilon, \quad T = G(\varepsilon, \Gamma)\Gamma. \quad (1)$$

Здесь $K(\varepsilon, \Gamma)$ – модуль объемного расширения (сжатия), $G(\varepsilon, \Gamma)$ – модуль сдвига.

Пусть на поверхности полупространства действуют равномерно распределенные нагрузки $p(t)$ и $q(t)$, бесконечно протяженные в направлении осей y и z (см. рис. 1). В начальный момент времени $t = 0$ нормальные и касательные нагрузки на поверхности полупространства отсутствуют: $p(0) = 0, q(0) = 0$. В этом случае продольно-поперечные волны являются, вообще говоря, волнами деформаций слабого разрыва. Предположим, что волны сильного разрыва внутри полупространства с течением времени не образуются.

Полупространство соответствует условиям плоской задачи, если

$$u = u(x), \quad v = v(x), \quad w = 0, \quad (2)$$

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x(x), \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \varepsilon_z = 0, \quad (3)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}(x), \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

При этом

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y = \varepsilon_x, \quad \Gamma = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{4\varepsilon_x^2 + 3\gamma_{xy}^2}. \quad (4)$$

Физические уравнения имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \left(K + \frac{4}{3}G \right) \varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \left(K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon_x, \quad \tau_{yz} = 0; \\ \sigma_z &= \left(K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon_x, \quad \tau_{zx} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя соотношения (5) в динамические уравнения равновесия и учитывая зависимости (1) и (4), получим:

$$\begin{aligned} &\left[\left(K + \frac{4}{3}G \right) + \left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon} + \frac{4}{3} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right) \varepsilon_x + \frac{4\varepsilon_x^2}{3\Gamma} \left(\frac{\partial K}{\partial \Gamma} + \frac{4}{3} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \right) \right] \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \\ &+ \left(\frac{\partial K}{\partial \Gamma} + \frac{4}{3} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \right) \frac{\varepsilon_x \gamma_{xy}}{\Gamma} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} = \rho \frac{\partial v_x}{\partial t}, \\ \gamma_{xy} \left(\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} + \frac{4\varepsilon_x}{3\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \right) \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \left(G + \frac{\gamma_{xy}^2}{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \right) \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} &= \rho \frac{\partial v_y}{\partial t}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial t}.$$

Присоединяя к системе (6) уравнения совместности

$$\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} = \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial t} = \frac{\partial v_y}{\partial x}, \quad (7)$$

получаем систему четырех дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных относительно величин $\partial \varepsilon_x / \partial x$, $\partial \gamma_{xy} / \partial x$, $\partial v_x / \partial t$, $\partial v_y / \partial t$, $\partial \varepsilon_x / \partial t$, $\partial \gamma_{xy} / \partial t$, $\partial v_x / \partial x$, $\partial v_y / \partial x$. В матричной форме система уравнений (6), (7) имеет вид:

$$\mathbf{A} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial x} + \mathbf{B} \frac{\partial \bar{\mathbf{u}}}{\partial t} = 0. \quad (8)$$

Здесь матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} имеют вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где

$$a_{11} = \left(K + \frac{4}{3} G \right) + \left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon} + \frac{4}{3} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right) \varepsilon_x + \frac{4 \varepsilon_x^2}{3 \Gamma} \left(\frac{\partial K}{\partial \Gamma} + \frac{4}{3} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \right), \quad (9)$$

$$a_{12} = \left(\frac{\partial K}{\partial \Gamma} + \frac{4}{3} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \right) \frac{\varepsilon_x \gamma_{xy}}{\Gamma}, \quad a_{21} = \left(\frac{\partial G}{\partial \varepsilon} + \frac{4 \varepsilon_x}{3 \Gamma} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \right) \gamma_{xy}, \quad a_{22} = G + \frac{\gamma_{xy}^2}{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial \Gamma}.$$

Вектор-столбец $\bar{\mathbf{u}}$ имеет следующую структуру:

$$\bar{\mathbf{u}} = [\varepsilon_x \quad \gamma_{xy} \quad v_x \quad v_y]^T.$$

Характеристические кривые уравнения (8) определяются путем решения уравнения $|\mathbf{A} - \alpha \mathbf{B}| = 0$, или в развернутой форме:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \alpha \rho & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \alpha \rho \\ -\alpha & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0,$$

вещественные решения которого задают характеристические кривые, описываемые дифференциальными уравнениями

$$\alpha_{i,j} = \frac{dx}{dt}, \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2. \quad (10)$$

Здесь

$$\alpha_{1,1} = +\sqrt{\frac{M_1}{2\rho}}, \quad \alpha_{1,2} = -\sqrt{\frac{M_1}{2\rho}}, \quad \alpha_{2,1} = +\sqrt{\frac{M_2}{2\rho}}, \quad \alpha_{2,2} = -\sqrt{\frac{M_2}{2\rho}},$$

причем

$$M_{1,2} = (a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}. \quad (11)$$

Дифференциальные уравнения (10) определяют, вообще говоря, четыре семейства характеристических кривых. Система уравнений (6), (7) будет гиперболического типа, если все $\alpha_{i,j}$ вещественные.

Найдем соотношения вдоль характеристических направлений. Введем вектор $\bar{\mathbf{l}} = [l_1 \quad l_2 \quad l_3 \quad l_4]$. Компоненты вектора $\bar{\mathbf{l}}$ являются решением уравнения

$$\bar{\mathbf{l}} \cdot (\mathbf{A} - \alpha \mathbf{B}) = 0.$$

Следовательно, имеет место:

$$\begin{cases} (a_{11} - \alpha^2 \rho) \cdot l_1 + a_{21} \cdot l_2 = 0, \\ (a_{22} - \alpha^2 \rho) \cdot l_2 + a_{12} \cdot l_1 = 0, \\ l_3 - \alpha \rho \cdot l_1 = 0, \\ l_4 - \alpha \rho \cdot l_2 = 0. \end{cases} \quad (12)$$

Соотношения вдоль характеристик найдем из уравнения $\bar{\mathbf{I}} \cdot \mathbf{B} \cdot (d\bar{\mathbf{u}}/dt) = 0$:

$$l_3 \frac{d\varepsilon_x}{dt} + l_4 \frac{d\gamma_{xy}}{dt} - \rho l_1 \frac{dv_x}{dt} - \rho l_2 \frac{dv_y}{dt} = 0. \quad (13)$$

Используя далее зависимости (12), уравнение (13) приведем к виду:

$$a_{21}(\alpha^2 \rho - a_{22})(\alpha d\varepsilon_x - dv_x) + \alpha(\alpha^2 \rho - a_{11})(\alpha^2 \rho - a_{22})d\gamma_{xy} - a_{12}a_{21}dv_y = 0. \quad (14)$$

Итак, вдоль четырех семейств характеристик (10) выполняются соотношения (14).

Используя соотношения (3), систему (6) в терминах перемещений приведем к виду:

$$\begin{cases} a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{12} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ a_{21} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_{22} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (15)$$

Система (7) при этом удовлетворяется тождественно. Уравнения (15) описывают процесс распространения продольно-поперечных волн деформаций.

Пусть $\omega(x, t) = 0$ – уравнение поверхности разрыва [7]. Применяя к системе (15) кинематические условия совместности

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} \right] = \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_k} \lambda_u,$$

получим динамические условия совместности:

$$\begin{cases} \left[a_{11} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 \right] \lambda_u + a_{12} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \lambda_v = 0, \\ a_{21} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 \lambda_u + \left[a_{22} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 - \rho \left(\frac{\partial \omega}{\partial t} \right)^2 \right] \lambda_v = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Поскольку значения скоростей распространения волн N по нормали к фронту определяются соотношением

$$N^2 = \frac{(\partial \omega / \partial t)^2}{(\partial \omega / \partial x)^2 + (\partial \omega / \partial y)^2},$$

а направляющие косинусы l_i вектора нормали к фронту волны в локальной системе координат, совпадающей с главными осями, соответственно равны

$$l_1^2 = \frac{(\partial \omega / \partial x)^2}{(\partial \omega / \partial x)^2 + (\partial \omega / \partial y)^2}, \quad l_2^2 = \frac{(\partial \omega / \partial y)^2}{(\partial \omega / \partial x)^2 + (\partial \omega / \partial y)^2},$$

то система (16) после элементарных преобразований запишется в виде:

$$\begin{cases} (a_{11}l_1^2 - \rho N^2)\lambda_{u_1} + a_{12}l_1^2\lambda_{u_2} = 0, \\ a_{21}l_1^2\lambda_{u_1} + (a_{22}l_1^2 - \rho N^2)\lambda_{u_2} = 0. \end{cases} \quad (17)$$

Приравнявая нулю определитель системы (17), т.е. полагая для коэффициентов прерывности λ_{u_1} и λ_{u_2} существование ненулевых решений, получим:

$$2\rho N_{1,2}^2 = l_1^2 [(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}}]. \quad (18)$$

Формула (18) определяет две независимые скорости распространения продольно-поперечных волн деформаций в сплошной среде.

Выпишем коэффициенты, входящие в формулы (16) и, соответственно, в формулу (18). При этом будем помнить, что в главных осях $\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = 0$, однако $\partial\gamma_{xy}/\partial x \neq 0$ и $\partial\gamma_{yx}/\partial y \neq 0$. На основании соотношений (4) получаем $\varepsilon/\Gamma = \sqrt{3}/4$. Следовательно,

$$\begin{aligned} a_{11} &= \left(K + \frac{4}{3}G \right) + \left(\frac{\partial K}{\partial \varepsilon} + \frac{4}{3} \frac{\partial G}{\partial \varepsilon} \right) \sqrt{\frac{3}{4}} \Gamma + \left(\frac{\partial K}{\partial \Gamma} + \frac{4}{3} \frac{\partial G}{\partial \Gamma} \right) \Gamma, \\ a_{12} &= 0, \quad a_{21} = 0, \quad a_{22} = G. \end{aligned} \quad (19)$$

С учетом соотношений (19) формула (18) будет иметь вид:

$$2\rho N_1^2 = l_1^2 (2a_{11}), \quad 2\rho N_2^2 = l_1^2 (2a_{22}). \quad (20)$$

Рассмотрим условия возникновения и распространения чисто продольных и чисто поперечных волн деформаций.

В локальной системе координат, совпадающей в каждой точке сплошной среды с направлениями главных деформаций (напряжений), введем вектор $\bar{\lambda}$ с составляющими $(\lambda_{u_1}, \lambda_{u_2})$ в каждой точке сплошной среды. Пусть λ_n – проекция вектора $\bar{\lambda}$ на нормаль к переднему фронту волны (рис. 2), т.е. $\lambda_n = \lambda_{u_1}l_1 + \lambda_{u_2}l_2$, где $l_1 = \cos \alpha$, $l_2 = \sin \alpha$ – направляющие косинусы нормали к переднему фронту волны.

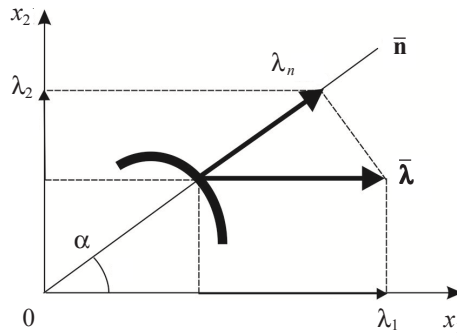


Рис. 2

Случай 1. Пусть $l_1 = 1$, $l_2 = 0$, т.е. главное направление x_1 совпадает с направлением нормали к фронту волны ($\alpha = 0$). Система (17) примет вид:

$$\begin{cases} (a_{11} - \rho N^2)\lambda_{u_1} = 0, \\ (a_{22} - \rho N^2)\lambda_{u_2} = 0. \end{cases} \quad (21)$$

Отсюда получаем:

$$N_1^2 = \frac{a_{11}}{\rho}, \quad N_2^2 = \frac{a_{22}}{\rho}.$$

Рассмотрим распространение волны N_1 . Если $N = N_1$, то система (21) приводится к виду:

$$\begin{cases} 0 \cdot \lambda_{u_1} = 0, \\ (a_{22} - \rho N^2) \lambda_{u_2} = 0, \end{cases}$$

и так как $a_{22} \neq \rho N_1^2$, то $\lambda_{u_2} = 0$. Это означает, что из двух составляющих вектора $\underline{\lambda}$ одна равна нулю, следовательно, проекции λ_n и λ_{u_1} совпадают с самим вектором $\underline{\lambda}$; другими словами, главное направление x_1 и нормаль к фронту волны \underline{n} совпадают с вектором скорости N_1 . Имеет место только продольная волна.

При распространении волны N_2 ($N = N_2$) система (21) приводится к виду:

$$\begin{cases} (a_{11} - \rho N_2^2) \lambda_{u_1} = 0, \\ 0 \cdot \lambda_{u_2} = 0, \end{cases}$$

а так как $a_{11} \neq \rho N_2^2$, то $\lambda_{u_1} = 0$, т.е. проекции λ_n и λ_{u_2} совпадают с самим вектором $\underline{\lambda}$. Следовательно, главное направление x_1 и нормаль к фронту волны \underline{n} перпендикулярны к вектору скорости N_2 . Имеет место только поперечная волна.

Случай 2. Пусть $l_1 = 0, l_2 = 1$, т.е. главное направление x_2 совпадает с направлением нормали к фронту волны ($\alpha = 90^\circ$). Система (17) будет иметь вид:

$$\begin{cases} -\rho N^2 \lambda_{u_1} = 0, \\ -\rho N^2 \lambda_{u_2} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Отсюда следует, что $N = 0$, т.е. в направлении x_2 волна не распространяется.

На рис. 3 показаны векторные диаграммы мгновенных скоростей продольно-поперечных волн деформаций, построенные по уравнениям (20) для трех математических моделей сплошной среды. Сплошные линии соответствуют приведенным скоростям $(2\rho/G_0)N_1^2$, штриховые – скоростям $(2\rho/G_0)N_2^2$. Исходные данные: $K_0/G_0 = 1,1547$; $g/\Gamma_s = 1$; $\Gamma/\Gamma_s = 0,75$; $\Gamma_s = 0,1155$; $f = 0,5$.

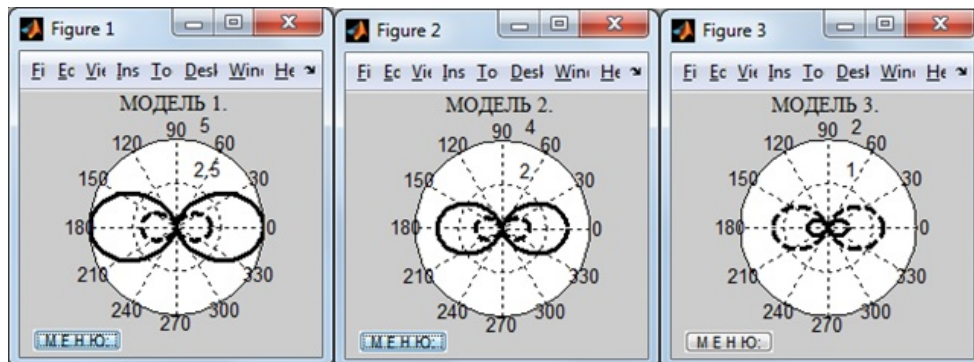


Рис. 3

Модель 1. Механическое поведение сплошной среды описывается линейным законом, т.е. деформационные зависимости (1) имеют вид:

$$\sigma = K_0 \varepsilon, \quad T = G_0 \Gamma. \quad (23)$$

Модель 2. Механическое поведение сплошной среды описывается квадратичным законом в отношении сдвиговых деформаций. Деформационные зависимости (1) в этом случае равны:

$$\sigma = K_0 \varepsilon, \quad T = G_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s}\right) \Gamma. \quad (24)$$

Модель 3. Механическое поведение сплошной среды описывается перекрестными зависимостями между инвариантами напряженного и деформированного состояний:

$$\sigma = K_0 \left[1 - \frac{g}{\varepsilon} \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right)^2 \left(\frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right)^2\right] \varepsilon, \quad (25)$$

$$T = \left[G_0 \left(1 - \frac{\Gamma}{2\Gamma_s}\right) + K_0 f \frac{g}{\Gamma_s} \left(2 - \frac{\Gamma}{\Gamma_s}\right)^2 \frac{\Gamma}{\Gamma_s} - K_0 f \frac{\varepsilon}{\Gamma} \right] \Gamma.$$

Модель 1 соответствует уравнениям линейной теории упругости, модель 2 соответствует теории малых упругопластических деформаций, модель 3 соответствует деформационной теории пластичности сыпучей среды [8].

В формулах (23)–(25) обозначено: K_0 – начальный модуль объемного расширения (сжатия); G_0 – начальный модуль сдвига при чистом сдвиге; f – аналог коэффициента внутреннего трения; g – коэффициент дилатансии; Γ_s – предельная интенсивность деформаций сдвига, $0 \leq \Gamma/\Gamma_s \leq 1$.

Численные исследования показывают, что скорости распространения продольно-поперечных волн деформаций существенно зависят как от рассматриваемого направления распространения волны, так и от уровня напряженного и деформированного состояния в рассматриваемой точке среды, а также от физических констант материала сплошной среды. В частности, для модели 3 скорости волн N_1 больше скоростей волн N_2 для малых уровней сдвиговых деформаций $0 < \Gamma/\Gamma_s < 0,5$ и малых коэффициентов внутреннего трения $f < 0,5$ и, наоборот, для $0,5 < \Gamma/\Gamma_s < 1$ и $f > 0,5$ скорости N_1 меньше скоростей N_2 .

Изложенные в статье результаты могут быть использованы при построении алгоритмов расчета напряженно-деформированного состояния полупространств, находящихся в условиях плоской деформации, от действия на поверхности динамических нагрузок.

Список литературы

1. *Новацкий В.К.* Волновые задачи теории пластичности / Пер. с польск. В.А. Шачнева; под ред. Г.С. Шапиро. М.: Мир, 1978. 307 с.
2. *Гольдберг З.А.* О взаимодействии плоских продольных и поперечных упругих волн // Акустический журнал. 1960. Т. 6, №3. С. 307–310.
3. *Степанов Н.С.* К вопросу о взаимодействии продольных и поперечных упругих волн // Акустический журнал. 1967. Т. 13, №2. С. 270–275.

4. Зарембо Л.К., Красильников В.Н. Нелинейные явления при распространении упругих волн в твердых телах // Успехи физических наук. 1970. Т. 102, №12. С. 549–586.
5. Лямов В.Е. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. М.: Изд-во МГУ, 1983. 224 с.
6. Ерофеев В.И. Волновые процессы в твердых телах с микроструктурой. М.: Изд-во МГУ, 1999. 328 с.
7. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. 4. Ч. 2. М.: Наука, 1981. 550 с.
8. Гениев Г.А. К вопросу о деформационной теории пластичности сыпучей среды // Строительная механика и расчет сооружений. 1974. №4. С. 8–10.

THE LONGITUDINAL-TRANSVERSE WAVES OF DEFORMATIONS OF THE WEAK GAP

S.V. Bakushev

The author considers the task of construction differential equations of characteristics and relations on them, defining the speed of propagation longitudinal-cross deformation waves in continuum mechanical behavior of which is described by arbitrary cross relations between the first invariants of tensors and second invariants of stress and deformation deviators. They have researched the conditions of originating purely longitudinal and purely cross waves. As an example vector diagrams of long cross waves of deformation for three mathematical models of continuum are constructed.

Keywords: waves of deformations, plane problem, physical non-linearity.